УДК 517.988.8

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ПОЛУДИСКРЕТНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА*

В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 04.03.2009 г.

Аннотация. Приводятся условия слабой разрешимости задачи Коши для линейного параболического уравнения в гильбертовом пространстве. В условиях установленной слабой разрешимости задачи исследуется среднеквадратичная сходимость приближенных решений, найденных полудискретным методом Галеркина. Для случая проекционных подпространств типа конечных элементов найдены оценки скорости сходимости, точные по порядку аппроксимации.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, метод Галеркина.

Abstract. Sufficient conditions for the weak solvability of the Cauchy problem for a parabolic equation in a Hilbert space. By these conditions, the mean square convergence of approximate solutions which was found using the semi-discrete Galerkin method is established. For the projection subspaces of finite elements type speeds estimates which ave exact in the approximation order ave found.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, Galerkin method.

1. УРАВНЕНИЯ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения считаем плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$ на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных форм $l(t,u,v)$. Предположим, что для всех $u, v \in V$ функция $t \to l(t,u,v)$ измерима на $[0,T]$ и выполнены оценки:

$$| l(t,u,v) | \leq M_1 \| u \|_V \| v \|_V, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re} l(t,u,u) + \lambda \| u \|_H^2 \geq \delta \| u \|_V^2 \quad (\lambda \geq 0, \delta > 0). \tag{2}$$

Форма $l(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}(t): V \to V'$ такой, что $l(t,u,v) = (\mathcal{L}(t)u, v)$. Под выражением (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то, в силу отождествления $H \equiv H'$, выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением элементов в пространстве H [1]. Из (1) для $u \in V$ следует оценка $\| \mathcal{L}(t)u \|_{V'} \leq M_1 \| u \|_V$. Из измеримости функции $t \to l(t,u,v)$ следует, что функция $t \to \mathcal{L}(t)u \in V'$ слабо измерима по Лебегу. Так как пространство V' сепарабельно, то (см., например, [2, гл. 4]) эта функция измерима по Бохнеру.

В пространстве V' рассмотрим задачу

$$u'(t) + \mathcal{L}(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u^0. \tag{3}$$

Производные функций в работе понимаются в обобщенном смысле (см., например, [3]). Если в задаче (3) $u^0 \in H$ и функция $f \in L_2(0,T;V')$, то (см., например, [3] и [4]) задача (1) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, удовлетворяются начальное условие и почти всюду на $[0,T]$ уравнение (1).

В [5, с.212] замечено, что подобная разрешимость задачи типа (3) для нестационарных уравнений Навье—Стокса имеет место и в более общем случае, когда функция $f \in L_1(0,T;H) + L_2(0,T;V') = X$, то есть $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где $f_1 \in L_1(0,T;H)$ и $f_2 \in L_2(0,T,V')$.

Покажем, что аналогичное обобщение имеет место для параболических уравнений типа (3).

Теорема 1. *Пусть форма $l(t,u,v)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, элемент*

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-01-00131.

$u^0 \in H$ и функция $f \in X$. Тогда задача (3) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$ и $u' \in X$. Удовлетворяются начальное условие и почти всюду на $[0,T]$ уравнение (3).

Доказательство. Единственность решения $u(t)$ устанавливается как и в случае $f \in L_2(0,T,V')$ [4, с. 111].

Перейдем к доказательству существования решения задачи (3). Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная линейно независимая система элементов в пространстве V. Заметим, что система элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна также и в пространствах H и V'. Определим подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$. Определим на $[0,T]$ функцию $t \to u_m(t) \in V_m$ как решение задачи

$$(u_m'(t),\varphi_i) + l(t,u_m(t),\varphi_i) = (f(t),\varphi_i), \qquad (4)$$

где $i=\overline{1,m}$, а элемент $u_m(0) = P_m u^0 \in V_m$, где P_m — ортогональный проектор в пространстве H на $V_m \subset H$. Задача (6) очевидным образом сводится к задаче Коши для системы m линейных дифференциальных уравнений первого порядка и имеет единственное решение $u_m(t)$.

Установим для $u_m(t)$ некоторые априорные оценки. Из (4) следует тождество

$$\begin{aligned}(u_m'(t),u_m(t)) + l(t,u_m(t),u_m(t)) &= \\ = (f(t),u_m(t)).\end{aligned} \qquad (5)$$

Возьмем от (5) удвоенную вещественную часть и оценим, воспользовавшись (1), (2) и условием $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где $f_1 \in L_1(0,T;H)$ и $f_2 \in L_2(0,T,V')$.

$$\frac{d}{dt}\| u_m(t)\|_H^2 + 2\delta \| u_m(t)\|_V^2 - 2\lambda \| u_m(t)\|_H^2 \le$$
$$\le 2\| f_1(t)\|_H \| u_m(t)\|_H + 2\| f_2(t)\|_{V'} \| u_m(t)\|_V .$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(1+\| u_m(t)\|_H^2) + \delta \| u_m(t)\|_V^2 \le \\ &\le (2\lambda + \| f_1(t)\|_H)(1+\| u_m(t)\|_H^2) + \delta^{-1}\| f_2(t)\|_{V'}^2 .\end{aligned} \qquad (6)$$

Из (6) выделим оценку

$$\frac{d}{dt}(1+\| u_m(t)\|_H^2) \le$$
$$\le (2\lambda + \| f_1(t)\|_H)(1+\| u_m(t)\|_H^2) + \delta^{-1}\| f_2(t)\|_{V'}^2,$$

которой воспользуемся для оценки производной

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\int_0^t (2\lambda + \| f_1(s)\|_H) ds\right)(1+\| u_m(t)\|_H^2)\right\} =$$
$$= \left\{\exp\left(-\int_0^t (2\lambda + \| f_1(s)\|_H) ds\right)\right\}\frac{d}{dt}(1+\| u_m(t)\|_H^2) -$$
$$-(2\lambda + \| f_1(t)\|_H)\left\{\exp\left(-\int_0^t (2\lambda + \| f_1(s)\|_H) ds\right)\right\}\times$$
$$\times(1+\| u_m(t)\|_H^2) \le$$
$$\le \delta^{-1}\| f_2(t)\|_{V'}^2 \left\{\exp\left(-\int_0^t (2\lambda + \| f_1(s)\|_H) ds\right)\right\}.$$

Последнюю оценку интегрируем от 0 до $t \le T$.

$$\left\{\exp\left(-\int_0^t (2\lambda + \| f_1(s)\|_H) ds\right)\right\}(1+\| u_m(t)\|_H^2) \le$$
$$\le 1 + \| P_m u^0\|_H^2 + \delta^{-1}\int_0^t \| f_2(\tau)\|_{V'}^2 \times$$
$$\times \exp\left(-\int_0^\tau (2\lambda + \| f_1(s)\|_H) ds\right) d\tau.$$

Отсюда следует оценка

$$1+\| u_m(t)\|_H^2 \le$$
$$\le \left(\exp\int_0^T (2\lambda + \| f_1(t)\|_H)\, dt\right)\times$$
$$\times\left(1+\| P_m u^0\|_H^2 + \delta^{-1}\int_0^T \| f_2(t)\|_{V'}^2\, dt\right).$$

Очевидно, что $\| P_m u^0\|_H \le \| u^0\|_H$ и, кроме того, так как система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в H, то $\| P_m u^0 - u^0\|_H \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом,

$$\max_{0\le t\le T}\| u_m(t)\|_H^2 \le K_1(T,\lambda,\delta,u^0,f). \qquad (7)$$

Вернемся к оценке (6) и проинтегрируем ее от 0 до t.

$$\| u_m(t)\|_H^2 + \delta\int_0^t \| u_m(s)\|_V^2 ds \le \| u_m^0\|_H^2 +$$
$$+\int_0^t (2\lambda + \| f_1(s)\|_H)(1+\| u_m(s)\|_H^2) ds +$$
$$+\delta^{-1}\int_0^t \| f_2(s)\|_{V'}^2 ds.$$

Из последней оценки и (7) получим

$$\delta\int_0^T \| u_m(t)\|_V^2\, dt \le \| u_m^0\|_H^2 +$$
$$+[1+K_1(T,\lambda,\delta,u^0,f)]\int_0^T (2\lambda + \| f_1(t)\|_H) dt +$$
$$+\delta^{-1}\int_0^T \| f_2(t)\|_{V'}^2 dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^T \| u_m(t)\|_V^2\, dt \le K_2(T,\lambda,\delta,u^0,f). \qquad (8)$$

Из оценки (8) следует, что последовательность функций $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$. Тогда существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$, слабо сходящаяся к элементу $z \in L_2(0,T;V)$. Остается обосновать, что функция $z(t)$ является решением задачи (3) и обладает необходимой гладкостью. Соответствующие подобные рассуждения проводятся в [4, гл. 3, § 1], а также в [5, гл. 3, § 1]. □

Решения задач типа (3), существование которых обусловлено теоремой 1, далее называются слабыми решениями.

2. УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Пусть на $u, v \in V$ для $t \in [0,T]$ задано семейство полуторалинейных форм $a(t,u,v)$ таких, что функция $t \to a(t,u,v)$ измерима на $[0,T]$,

$$a(t,u,v) = \overline{a(t,v,u)} \quad (u, v \in V), \tag{9}$$

где черта над выражением означает комплексное сопряжение, и выполняются оценки

$$| a(t,u,v) | \leq M_1 \| u \|_V \| v \|_V \quad (u,v \in V), \tag{10}$$

$$a(t,u,u) \geq \delta \| u \|_V^2 \quad (\delta > 0,\, u \in V). \tag{11}$$

Форма $a(t,u,v)$ определяетоператор $A(t) : V \to V'$ такой, что

$$(A(t)u, v) = a(t,u,v) \quad (u, v \in V).$$

Предположим, что почти при всех $t \in [0,T]$ определен линейный оператор $B(t) : H \to V'$ такой, что

$$\| B(t)u \|_{V'} \leq M_2 \| u \|_H \quad (u \in H). \tag{12}$$

Считаем, что функция $t \to B(t)u \in V'$, где $u \in H$, измерима на $[0,T]$.

В пространстве V' на $[0,T]$ рассмотрим задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t), \;\; u(0) = u^0, \tag{13}$$

Покажем, что задача (13) сводится к задаче (3) с оператором $\mathcal{L}(t) = A(t) + B(t)$. Определим для этого форму

$$l(t,u,v) = a(t,u,v) + (B(t)u, v) \quad (u, v \in V), \tag{14}$$

В силу (10), (12) и непрерывного вложения $V \subset H$ получим

$$\begin{gathered} | l(t,u,v) | \leq M_1 \| u \|_V \| v \|_V + \\ + M_2 \| u \|_H \| v \|_V \leq M \| u \|_V \| v \|_V , \end{gathered} \tag{15}$$

то есть выполняется (1). Кроме того,

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} l(t,u,u) = a(t,u,u) + \operatorname{Re}(B(t)u,u) \geq \\ \geq a(t,u,u) - | (B(t)u,u) | \geq \\ \delta \| u \|_V^2 - M_2 \| u \|_H \| u \|_V \geq \\ \geq \delta 2^{-1} \| u \|_V^2 - M_2^2 (2\delta)^{-1} \| u \|_H^2 , \end{gathered} \tag{16}$$

то есть выполняется и (2).

Замечание 1. Вместо предположения (12) от оператора $B(t)$ можно потребовать выполнения условия, часто равносильного в приложениях, что почти при всех $t \in [0,T]$ оператор $B(t) : V \to H$ такой, что

$$\| B(t)u \|_H \leq M_2 \| u \|_V \quad (u \in V).$$

Очевидно, что и в этом случае выполняется, как (15), так и (16).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия (10)—(12), элемент $u^0 \in H$ и функция $f \in X$. Тогда задача (13) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$ и $u' \in X$. Удовлетворяются начальное условие и почти всюду на $[0,T]$ уравнение (13).*

3. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Далее рассматриваем задачу (13) в условиях следствия 1. Сформулируем приближенную задачу.

Через V_h, где параметр $h > 0$, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Рассмотрим задачу определения функции $u_h(t)$ со значениями в V_h такую, что для всех $v_h \in V_h$ и почти при всех $t \in [0,T]$ выполняется

$$\begin{gathered} (u_h'(t), v_h) + a(t, u_h(t), v_h) + (B(t)u_h(t), v_h) = \\ = (f(t), v_h),\, u_h(0) = u_h^0, \end{gathered} \tag{17}$$

где элемент $u_h^0 \in V_h$ считаем заданным. Очевидно, задача (17) имеет единственное решение.

Обратим внимание, что для случая $f \in L_2(0,T;V')$ среднеквадратичная сходимость полудискретного метода Галеркина (17) исследовалась в [7]. В данной же работе предполагается $f \in X$.

Приведем некоторые вспомогательные факты, необходимые далее. Определим пространство $V_{h'}$, задав на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\| u_h \|_{V_h'} = \sup | (u_h, v_h) |$, где точная верхняя граница берется по всем элементам $v_h \in V_h$ с $\| v_h \|_V = 1$. Очевидно, что $\| u_h \|_{V_h'} \leq \| u_h \|_{V'}$. Пусть P_h — ортогональный проектор в пространстве H на $V_h \subset H$. В [6] показано, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и для $u \in V'$ справедлива оценка $\| \overline{P}_h u \|_{V_h'} \leq \| u \|_{V'}$. Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$, которое получается соответствующим предельным переходом.

В таком случае, задача (17) равносильна в пространстве V_h задаче

$$u_h'(t) + \overline{P}_h A(t)u_h(t) + \overline{P}_h B(t)u_h(t) = \overline{P}_h f(t), \quad u_h(0) = u_h^0. \tag{18}$$

Обозначим через $A_h(t)$ сужение на V_h оператора $\overline{P}_h A(t)$. Тогда из соотношения

$$(A_h(t)u_h, v_h) = a(t, u_h, v_h) \quad (u_h, v_h \in V_h)$$

и свойств формы $a(t,u,v)$ следует относительно скалярного произведения в пространстве H самосопряженность и положительная определенность оператора $A_h(t): V_h \to V_h$.

Приведем две леммы из [7].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (9)—(11). Тогда для любых $u_h \in V_h$ и $t \in [0,T]$ выполняются оценки:*

$$\delta \| u_h \|_V^2 \le \| A_h^{1/2}(t)u_h \|_H^2 \le M_1 \| u_h \|_V^2, \tag{19}$$

$$\delta \| A_h^{-1/2}(t)u_h \|_H^2 \le \| u_h \|_{V_h'}^2 \le M_1 \| A_h^{-1/2}(t)u_h \|_H^2 . \tag{20}$$

Лемма 2. *Предположим, что в уравнении (18) функция $\overline{P}_h f(t) \in L_2(0,T;V_h')$ и выполняются (9)—(11). Дополнительно предположим, что функция $t \to a(t,u,v)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и почти всюду на $[0,T]$ выполняется оценка*

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} a(t,u,v) \right| \le M_2 \| u \|_V \| v \|_V \quad (u, v \in V). \tag{21}$$

Тогда для решения $u_h(t)$ задачи (18) справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \| u_h(t) \|_{V_h'}^2 + \int_0^T (\| u_h(t) \|_H^2 + \| A_h^{-1}(t)u_h'(t) \|_H^2) dt \le \le M \left\{ \| u_h^0 \|_{V_h'}^2 + \int_0^T \| A_h^{-1}(t)\overline{P}_h f(t) \|_H^2 \, dt \right\}. \tag{22}$$

Определим для $t \in [0,T]$ гильбертовы пространства

$$V(t) = \{u, v \in V \mid (u,v)_{V(t)} = a(t,u,v)\}.$$

Из (19) и (20) следует эквивалентность норм пространств V и $V(t)$, равномерная по $t \in [0,T]$.

$$\delta^{-1/2} \| u \|_V \le \| u \|_{V(t)} \le M_1^{1/2} \| u \|_V \quad (u \in V).$$

Обозначим через $Q_h(t)$ ортогональный проектор в пространстве $V(t)$ на V_h. Заметим, что

$$a(t,u,v_h) = a(t, Q_h(t)u, v_h) \quad (u \in V, v_h \in V_h). \tag{23}$$

Из (23) следует полезное соотношение

$$\overline{P}_h A(t)u = \overline{P}_h A(t)Q_h(t)u \quad (u \in V). \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть для задачи (13) выполнены требования следствия 1, а также (21). Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (13), а $u_h(t)$ — решение задачи (18). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\le t\le T} \| P_h u(t) - u_h(t) \|_{V_h'}^2 + \int_0^T (\| u(t) - u_h(t) \|_H^2 + \| A_h^{-1}(t)[\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)] \|_H^2) dt \le M \left\{ \| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V_h'}^2 + \int_0^T \| [I - Q_h(t)]u(t) \|_H^2 \, dt \right\}. \tag{25}$$

Доказательство. К уравнению (13) применим оператор P_h. При этом заметим, что $\overline{P}_h u'(t) = [P_h u(t)]'$.

$$[P_h u(t)]' + \overline{P}_h A(t)u(t) + \overline{P}_h B(t)u(t) = \overline{P}_h f(t). \tag{26}$$

Вычтем из (26) тождество (18). Полученное равенство преобразуем к виду

$$[P_h u(t) - u_h(t)]' + \overline{P}_h A(t)[P_h u(t) - u_h(t)] + \overline{P}_h B(t)[P_h u(t) - u_h(t)] = = \overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t) + \overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t). \tag{27}$$

В тождестве (27) правая часть принадлежит пространству $L_2(0,T;V_h')$. Тогда из (27) и (22) следует оценка

$$\max_{0\le t\le T} \| P_h u(t) - u_h(t) \|_{V_h'}^2 + \int_0^T \| P_h u(t) - u_h(t) \|_H^2 \, dt + \int_0^T \| A_h^{-1}(t)[\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)] \|_H^2 \, dt \le \le M \Big\{ \| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V_h'}^2 + \int_0^T \| A_h^{-1}(t)\overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t) \|_H^2 \, dt + \int_0^T \| A_h^{-1}(t)\overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t) \|_H^2 \, dt \Big\}. \tag{28}$$

Свойство (24) позволяет установить оценку

$$\int_0^T \| A_h^{-1}(t)\overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t) \|_H^2 \, dt = = \int_0^T \| [P_h - Q_h(t)]u(t) \|_H^2 \, dt \le \int_0^T \| [I - Q_h(t)]u(t) \|_H^2 \, dt.$$

Воспользовавшись непрерывным вложением $V \subset H$ и оценками (19), (20) и (12), получим

$$\| A_h^{-1}(t)\overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t) \|_H^2 \le \le c \| A_h^{-1}(t)\overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t) \|_V^2 \le \le c\delta^{-1} \| A_h^{-1/2}(t)\overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t) \|_H^2 \le \le c\delta^{-1}M_1 \| \overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t) \|_{V_h'}^2 \le c\delta^{-1}M_1M_3^2 \| (P_h - I)u(t) \|_H^2 \le \le c\delta^{-1}M_1M_3^2 \| [Q_h(t) - I]u(t) \|_H^2 .$$

Таким образом, установлена оценка

$$\int_0^T \| A_h^{-1}(t)\overline{P}_h B(t)(P_h - I)u(t) \|_H^2 \, dt \le$$
$$\le c\delta^{-1} M_1 M_3^2 \int_0^T \| [I - Q_h(t)]u(t) \|_H^2 \, dt.$$

Из (28), полученных оценок слагаемых в правой части (28), неравенства треугольника для норм и аппроксимационного свойства ортопроектора P_h следует оценка (25). □

Покажем эффективность установленной оценки (25).

Определим для оператора $A(t)$, порожденного формой $a(t,u,v)$, множество

$$D[A(t)] = \{v \in V \mid A(t)v \in H\}. \tag{29}$$

Операторы $A(t)$ в пространстве H являются самосопряженными и положительно определенными операторами с областями определения (29), где $D[A(t)] \subset V$. Кроме того, для самосопряженных положительно определенных операторов $A^{1/2}(t)$ области их определения $D[A^{1/2}(t)] = V$ (см., например, [8] и [9]). Очевидно, что $\| u \|_{V(t)} = \| A^{1/2}(t)u \|_H$ для всех $u \in V$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (9)—(11). Тогда для $u \in V$ и $t \in [0,T]$ справедливы оценки:*

$$\| [I - Q_h(t)]u \|_V \le \delta^{-1/2} \| [I - Q_h(t)]u \|_{V(t)} \le$$
$$\le \delta^{-1/2} M_1^{1/2} \| (I - Q_h)u \|_V, \tag{30}$$

$$\| [I - Q_h(t)]u \|_H \le$$
$$\le M_1 \| (I - Q_h)A^{-1}(t) \|_{H\to V} \| (I - Q_h)u \|_V . \tag{31}$$

Оценка (30) следует из (19) и свойства ортогональной проекции, как элемента наилучшей аппроксимации. Оценка (31) установлена в [10].

Предположим теперь, что задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, т.е. $\| (I - Q_h)v \|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$, где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и последовательность подпространств $\{V_h\}$ предельно плотна в V. Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (13), а $u_h(t)$ — решение задачи (18). Предположим, что $\| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V'} \to 0$ при $h \to 0$ (например, $u_h^0 = P_h u^0$). Тогда при $h \to 0$*

$$\int_0^T \| u(t) - u_h(t) \|_H^2 \, dt \le$$
$$\le M\left\{\| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V'}^2 + \int_0^T \| (I - Q)u(t) \|_V^2 \, dt\right\} \to 0. \tag{32}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V_h'} \le \| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V'} . \tag{33}$$

Теперь (32) следует из (25), (30) и непрерывного вложения $V \subset H$. □

Оценка (25) позволяет получать и числовые характеристики скорости сходимости.

Пусть существует гильбертово пространства $E \subset V$ такое, что $D[A(t)] \subset E \subset V$ и для всех $u \in D[A(t)]$ и $t \in [0,T]$ выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\| u \|_E \le \alpha \| A(t)u \|_H \quad (u \in D[A(t)]), \tag{34}$$

где $\alpha > 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства: $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V' = W_2^{-1}(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то пространства следующие: $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega)$.

Пусть подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством

$$\| (I - Q_h)u \|_V \le ch \| u \|_E \quad (u \in E), \tag{35}$$

типичным для подпространств типа конечных элементов (см. например, [11]). Из (34) и (35) получим

$$\| (I - Q_h)A^{-1}(t) \|_{H\to V} \le c\alpha h. \tag{36}$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть подпространства V_h обладают свойством (35), а для операторов $A(t)$ выполняется требование (34). Тогда в случае слабого решения $u(t)$ задачи (13) справедлива оценка*

$$\int_0^T \| u(t) - u_h(t) \|_H^2 \, dt \le$$
$$\le M\{\| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V'}^2 + h^2 \int_0^T \| u(t) \|_V^2 \, dt\}. \tag{37}$$

Если же решение $u(t)$ задачи (13) такое, что $u \in L_2(0,T;E)$, то оценка следующая

$$\int_0^T \| u(t) - u_h(t) \|_H^2 \, dt \le$$
$$\le M\{\| P_h u^0 - u_h^0 \|_{V'}^2 + h^4 \int_0^T \| u(t) \|_E^2 \, dt\}. \tag{38}$$

Доказательство оценок (37) и (38) следует из оценок (25), (33), (31), (35) и (36). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

2. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

3. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

5. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

6. *Вайникко Г.М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. ур-ния. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269—1277.

7. *Смагин В.В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143 — 160.

8. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.

9. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

10. *Смагин В.В.* Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Журн. вычислит. математ. и математ. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 908 — 919.

11. *Марчук Г.И.* Введение в пр оекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

Смагин Виктор Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета. Тел. (4732) 208-771, e-mail: smagin@math.vsu.ru

Smagin Victor Vasilievich — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University. Phone: (4732) 208-771, e-mail: smagin@math.vsu.ru