УДК 539.374

# УЧЕТ АНИЗОТРОПИИ ПРИ ПЛОСКОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ЛИСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Т. Д. Семыкина, Л. П. Цуканова**

*Воронежский государственный университет,*
*Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 10.02.09 г.

**Аннотация**. Рассматривается распределение пластической зоны вблизи круглого отверстия в бесконечной пластине из трансверсально-изотропного материала. Отверстие нагружено крутящими усилиями, рассматриваются два случая нагружения нормальными усилиями: по внутренней границе плоскости или на бесконечности. Условие текучести для трансверсально-изотропного материала линеаризовано методом малого параметра, который характеризует анизотропию материала.

**Ключевые слова:** пластичность, трансверсально-изотропный материал, плоско напряженное состояние, малый параметр.

**Abstract.** The article studies the spreading of plastic zone near the round hole in an endless plate of transversal-isotropic material. The hole is loaded with spinning boosters. We deal with two cases of loading of normal boosters: along the internal border of plane or on endlessness. The fluidity condition for transversal-isotropic material is linearised by the small parameter method, which characterizes the material anisotropy.

**Keywords:** plasticity, transversal-isotropic material, flat-strained state, small parameter.

1. Рассматривается напряженное состояние вблизи отверстия радиуса R в плоскости из несжимаемого трансверсально-изотропного материала. К отверстию приложено нормальное равномерное давление $q$ и касательные усилия $\tau$.

При упругом деформировании упругий потенциал трансверсально-изотропного материала принимает вид [1]

$$W(\varepsilon_{ij}) = \mu I_2 = \\ = \mu \frac{2+r}{2(1+2r)}\left[(1+r)(\varepsilon_\rho^2+\varepsilon_\theta^2)+2r\varepsilon_\rho\varepsilon_\theta+2\varepsilon_{\rho\theta}^2\right], \quad (1)$$

здесь $r$ — коэффициент анизотропии, равный отношению деформации по ширине к деформации по толщине при растяжении образцов.

С учетом формул Грина закон Гука для потенциала (1) имеет вид

$$\sigma_\rho = \mu\frac{2+r}{1+2r}\left[(1+r)\varepsilon_\rho + r\varepsilon_\theta\right],$$
$$\sigma_\theta = \mu\frac{2+r}{1+2r}(r\varepsilon_\theta + (1+r)\varepsilon_\rho), \quad (2)$$
$$\sigma_{\rho\theta} = 2\mu\frac{2+r}{1+2r}\varepsilon_{\rho\theta}.$$

При осесимметричном напряженном состоянии решение упругой задачи с учетом граничных условий будет

$$\sigma_\rho = \frac{-q}{\rho^2},\ \sigma_\theta = \frac{q}{\rho^2},\ \tau_{\rho\theta} = \frac{\tau}{\rho^2}, \quad (3)$$

здесь $\rho$ — радиальная координата, отнесенная к радиусу отверстия $R$.

При некоторых значениях нагрузок на внутренней поверхности возникает пластическое течение.

При растяжении тонкой пластины напряженное состояние в пластической зоне, по аналогии с изотропным материалом [2], [3], удовлетворяет условию

$$\sigma_1 - \left(1-\sqrt{\frac{2}{1+r}}\right)\sigma_2 = 2k, \quad (4)$$

$k$ — предел текучести при сдвиге.

Согласно экспериментальным данным, примем за малый параметр $\delta$ коэффициент $1-\sqrt{\frac{2}{1+r}}$, тогда условие пластичности (4) запишется в виде

$$\sigma_1 - \delta\sigma_2 = 2k. \quad (5)$$

В полярной системе координат главные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta-\sigma_\rho}{2}\right)^2+\tau_{\rho\theta}^2}\ . \quad (6)$$

С учетом соотношения (6) условие пластичности (5) запишется в компонентах тензора напряжений

$$\frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}(1-\delta)+(1+\delta)\sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta-\sigma_\rho}{2}\right)^2+\tau_{\rho\theta}^2}=2k. \quad (7)$$

Учитывая допустимые значения $\sigma_\rho$, $\sigma_\theta$ и $\delta$, условие (7) после элементарных преобразований может быть записано следующим образом

$$\begin{gathered}\left[(\sigma_\rho-2k)(\sigma_\theta-2k)-\tau_{\rho\theta}^2\right]- \\ -\delta(\sigma_\rho^2+\sigma_\theta^2-2k(\sigma_\rho+\sigma_\theta)+2\tau_{\rho\theta}^2)+ \\ +\delta^2(\sigma_\rho\sigma_\theta-\tau_{\rho\theta}^2)=0.\end{gathered} \quad (8)$$

Для определения напряжений используется метод возмущений [4], при котором напряжения представляются в виде рядов по степеням малого параметра

$$\begin{gathered}\sigma_\rho=\sum_{m=0}^{\infty}\delta^m\sigma_\rho^{(m)},\ \sigma_\theta=\sum_{m=0}^{\infty}\delta^m\sigma_\theta^{(m)}, \\ \tau_{\rho\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}\delta^m\tau_{\rho\theta}^{(m)}.\end{gathered} \quad (9)$$

Уравнение равновесия при осесимметричном состоянии имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\ \frac{d\tau_{\rho\theta}}{d\rho}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0. \quad (10)$$

Из второго уравнения системы (10) получаем, что $\tau_{\rho\theta}$ с учетом граничных условий равно

$$\tau_{\rho\theta}=\tau\cdot\rho^{-2}. \quad (11)$$

Для определения нормальных напряжений необходимо решать систему, состоящую из первого уравнения системы (10) и условия текучести (5).

1.1 Подставив (9) в (8) и приравнивая члены при одинаковых степенях $\delta$, для нулевого приближения получаем

$$(\sigma_\rho^0-2k)(\sigma_\theta^0-2k)-\tau_{\rho\theta}^{0\ 2}=0. \quad (12)$$

В качестве нулевого приближения принимается напряженное состояние изотропной пластины ($\delta=0$).

Определим напряжения в пластической зоне $R\le\rho\le\rho_s$, где $\rho_s$ — радиус упруго-пластической границы. В этом случае соотношение (12) с учетом (11) устанавливает зависимость $\sigma_\theta^{0P}$ от $\sigma_\rho^{0P}$

$$\sigma_\theta^{0P}-2k=\frac{\tau^2}{\rho^4(\sigma_\rho^{0P}-2k)}, \quad (13)$$

здесь и далее индексом «$P$» отмечаются значения напряжений в пластической области.

Система уравнений (10) и (13) определяет напряжения в пластической зоне

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{0P}=2k-\frac{\sqrt{C\rho^2-\tau^2}}{\rho^2}, \\ \sigma_\theta^{0P}=2k-\frac{\tau^2}{\rho^2\sqrt{C\rho^2-\tau^2}},\ \tau_{\rho\theta}^{0\ P}=\frac{\tau}{\rho^2}.\end{gathered} \quad (14)$$

Константу $C$ находим из граничных условий $\sigma_\rho^{0P}=-q$ при $\rho=1$

$$C=\tau^2+(2k+q)^2. \quad (15)$$

В упругой области классическое решение задачи Коши с учетом отсутствия нагрузок на внешней границе пластины выпишется в виде

$$\sigma_\rho^{0e}=\frac{-B_1}{\rho^2},\ \sigma_\theta^{0e}=\frac{B_1}{\rho^2},\ \tau_{\rho\theta}^{0\ e}=\frac{B_2}{\rho^2}, \quad (16)$$

здесь и далее индексом «$e$» отмечаются значения напряжений в упругой области.

При $\rho\to\infty$ все напряжения стремятся к нулю. Константы $B_1$ и $B_2$ необходимо определить из условий сопряжения напряжений на упруго-пластической границе:

$$\left[\sigma_\rho^0\right]=\left[\tau_{\rho\theta}^0\right]=0 \text{ при } \rho=\rho_{S0}.$$

Отсюда $B_2=\tau$.

$$B_1=\sqrt{C\rho_{S0}^2-\tau^2}-2k\rho_{S0}^2. \quad (17)$$

Радиус упруго-пластической границы находим с помощью условия (12), которое выполняется для упругих напряжений.

$$\begin{gathered}\left(\sigma_\rho^{0e}-2k\right)\left(\sigma_\theta^{0e}-2k\right)-\left(\tau_{\rho\theta}^{0\ e}\right)^2=0 \\ \text{при } \rho=\rho_{S0}.\end{gathered} \quad (18)$$

Из (18) определяется радиус упруго-пластической границы $\rho_{S0}$

$$\rho_{S0}^2=\frac{\tau^2}{C}+\frac{C}{16k^2}. \quad (19)$$

Соотношение (19) позволяет получить предельные нагрузки, при которых в изотропной плоскости возникает пластическое течение вблизи отверстия ($\rho_{S0}=1$).

$$q^2=4k^2-\tau^2$$

Очевидно, если $\tau=0$, то соответствующее значение давления $q_0=2k$, т.е. $q_0>q$.

Наличие касательных напряжений на границе отверстия приводит к понижению предельного давления.

1.2 Рассмотрим определение первого приближения напряжений с учетом (11) и третьего соотношения (14)

$$\tau_{\rho\theta}^{(n)P} = 0. \tag{20}$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho^1}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^1 - \sigma_\theta^1}{\rho} = 0. \tag{21}$$

Запишем условие текучести, используя (8) и (12) для первого приближения

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{1P}\left(\sigma_\theta^{0P} - 2k\right) + \sigma_\theta^{1P}\left(\sigma_\rho^{0P} - 2k\right) - \\ -\left(\sigma_\rho^{0P} + \sigma_\theta^{0P} - 3k\right)^2 + k^2 = 0,\end{gathered} \tag{22}$$

Подставляя в (22) соотношение (14), получим

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{1P}\left(\sigma_\theta^{0P} - 2k\right) + \sigma_\theta^{1P}\left(\sigma_\rho^{0P} - 2k\right) - \\ -\left(k - \frac{C}{\sqrt{C\rho^2 - \tau^2}}\right)^2 + k^2 = 0.\end{gathered} \tag{23}$$

Первое приближение напряжений в пластической области определяется из системы (21), (23)

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{1P} = \frac{C_1}{\sqrt{C\rho^2 - \tau^2}} - \frac{C}{\sqrt{C\rho^2 - \tau^2}}\ln\frac{4k\sqrt{C\rho^2 - \tau^2}}{C} + \\ +2k - \frac{k^2}{C}\sqrt{C\rho^2 - \tau^2}.\end{gathered} \tag{24}$$

На границе отверстия $\rho = 1$ должно выполняться граничное условие $\sigma_\rho^1 = 0$, откуда определяется константа $C_1$.

$$C_1 = \frac{k^2}{C}(q + 2k)^2 + C\ln\frac{4k(q + 2k)}{C}. \tag{25}$$

Решение в упругой области запишется аналогично (3):

$$\sigma_\rho^{1e} = \frac{C_2}{\rho^2},\ \sigma_\theta^{1e} = \frac{-C_2}{\rho^2},\ \tau_{\rho\theta}^{1\,e} = \frac{C_3}{\rho^2}. \tag{26}$$

Константы $C_2$ и $C_3$ находим из условия сопряжения на упруго-пластической границе, которую зададим в виде $\rho_S = \rho_{S0} + \delta\rho_{S1}$, при этом должны выполняться условия сопряжения [4]:

$$\begin{gathered}\left[\sigma_\rho^1 + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}\rho_{S1}\right] = \left[\sigma_\theta^1 + \frac{d\sigma_\theta^0}{d\rho}\rho_{S1}\right] = \\ = \left[\tau_{\rho\theta}^1 + \frac{d\tau_{\rho\theta}^0}{d\rho}\rho_{S1}\right] = 0\end{gathered} \quad \text{при } \rho = \rho_{S0}. \tag{27}$$

Из последнего условия сопряжения получаем $C_3 = 0$, то есть $\tau_{\rho\theta}^{1\,e} = 0$.

Используя первые два условия сопряжения, получим

$$C_2 = \left(4k\frac{C_1}{C} + \frac{7}{4}k\right)\rho_{S0}{}^2 - \left(4k\rho_{S0}{}^2 - \frac{C}{2k} + 2B_1\right)\frac{\rho_{S1}}{\rho_{S0}}, \tag{28}$$

и условие для определения $\rho_{S1}$

$$\begin{gathered}\frac{8k\tau^2}{C^2\rho_{S0}{}^2}\left(C + 8k^2\tau^2\right)\frac{\rho_{S1}}{\rho_{S0}} = \\ = -\frac{40k^2\rho_{S0}{}^2}{C} - \left(4\frac{C_1}{C} + \frac{7}{4}k\right)\left(1 - \frac{16k^2\tau^2}{C^2}\right).\end{gathered} \tag{29}$$

Из последнего соотношения очевидно, что $\rho_{S1} < 0$, т.е. при наличии анизотропии, характеризующейся параметром $\delta > 0$, радиус упруго-пластической зоны уменьшается по сравнению с изотропной пластиной.

2. Рассмотрим бесконечную пластину, растянутую усилиями $P$ с отверстием, нагруженным сдвиговыми усилиями $\tau$. Пластина изготовлена из трансверсально-изотропного материала, описываемого соотношением (1), (2) в упругой области и условием текучести (4) в пластической области.

2.1. Упругое состояние изотропной пластины можно принять в качестве нулевого решения

$$\sigma_\rho^{0e} = p\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right),\ \sigma_\theta^{0e} = p\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right),\ \tau_{\rho\theta}^{0\,e} = \frac{\tau}{\rho^2}. \tag{30}$$

Если вблизи отверстия возникает пластическое состояние, то учитывая уравнение (12), решение в этой зоне имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{0P} = 2k - \frac{\sqrt{4k^2\rho^2 + \tau^2(\rho^2 - 1)}}{\rho^2}, \\ \sigma_\theta^{0P} = 2k - \frac{\tau^2}{\rho^2\sqrt{4k^2\rho^2 + \tau^2(\rho^2 - 1)}}, \\ \sigma_{\rho\theta}^{0\,P} = \frac{\tau}{\rho^2}.\end{gathered} \tag{31}$$

В упругой области при $\rho_{S0} \le \rho \le \infty$ упругое решение с учетом граничных условий на бесконечности запишется в виде

$$\sigma_\rho^{0e} = p + \frac{C_2}{\rho^2},\ \sigma_\theta^{0e} = p - \frac{C_2}{\rho^2},\ \tau_{\rho\theta}^{0\,e} = \frac{C_3}{\rho^2}. \tag{32}$$

Используя условие сопряжения контактных напряжений на упруго-пластической границе, определяется:

$$C_3 = \tau;$$

$$\frac{\sqrt{4k^2\rho_{S0}{}^2 + \tau^2(\rho_{S0}{}^2 - 1)}}{\rho_{S0}{}^2} = 2k - p - \frac{C_2}{\rho_{S0}{}^2}. \quad (33)$$

Упругое решение на упруго-пластической границе должно удовлетворять условию текучести (12), из чего следует:

$$\frac{C_2{}^2}{\rho_{S0}{}^4} = (2k-p)^2 - \frac{\tau^2}{\rho_{S0}{}^4}. \quad (34)$$

Соотношения (33), (34) определяют радиус упруго-пластической зоны $\rho_{S0}$:

$$\rho_{S0}{}^2 = \frac{4k^2+\tau^2}{4(2k-p)^2} + \frac{\tau^2}{4k^2+\tau^2}. \quad (35)$$

Если положить $\rho_{S0} = 1$ (начало пластического течения на контуре), получим соотношение для предельных нагрузок изотропной пластины

$$p = k - \frac{\tau^2}{4k}. \quad (36)$$

Из соотношения (36) следует, что с увеличением $\tau$ уменьшается предельное значение растягивающей нагрузки.

2.2 Первое приближение определяется из уравнений (21) и (22). Подставляя в условие (22) соотношения (31), получим условие текучести в виде

$$\sigma_\rho^{1P}\frac{\tau^2}{\rho^2\phi(\rho)} + \sigma_\theta^{1P}\frac{\phi(\rho)}{\rho^2} - \left(k - \frac{4k^2+\tau^2}{\phi(\rho)}\right)^2 - k^2 = 0, \quad (37)$$

где $\phi(\rho) = \sqrt{4k^2\rho^2 + \tau^2(\rho^2-1)}$.

Система уравнений (21) и (37) дает решение для напряжения $\sigma_\rho^{1P}$:

$$\sigma_\rho^{1P} = \frac{C_1}{\phi(\rho)} + \frac{4k^2+\tau^2}{\phi(\rho)}\ln\phi(\rho) + \frac{k^2}{4k^2+\tau^2}\phi(\rho) - 2k. \quad (38)$$

Константа $C_1$ определяется из граничных условий $\sigma_\rho^{1P} = 0$ при $\rho = 1$:

$$C_1 = -\frac{4k^4}{4k^2+\tau^2} - (4k^2+\tau^2)\ln 2k + 4k^2. \quad (39)$$

Решение в упругой области для первого приближения запишется аналогично (26):

$$\sigma_\rho^{1e} = \frac{B}{\rho^2}; \quad \sigma_\theta^{1e} = -\frac{B}{\rho^2}. \quad (40)$$

Константа $B$ определяется из условия сопряжения напряжений (27), подставляя найденные решения, получим:

$$\frac{B}{\rho_{S0}{}^2} = -\left[\frac{4k^2+\tau^2}{\phi(\rho_{S0})} - 2(2k-p)\right]\frac{\rho_{S1}}{\rho_{S0}} + \frac{12k^4 + 3k^2\tau^2 + 4k^2\tau^2\rho_{S0}{}^2}{(4k^2+\tau^2)\phi(\rho_{S0})} + \frac{4k^2\tau^2}{\phi(\rho_{S0})}\ln\frac{\phi(\rho_{S0})}{2k} - 2k. \quad (41)$$

На упруго-пластической границе $\rho = \rho_{S0} + \delta\rho_{S1}$ упругое решение должно удовлетворять условию текучести

$$(\sigma_\rho - 2k)(\sigma_\theta - 2k) - \tau^2{}_{\rho\theta} = 0. \quad (42)$$

Раскладывая напряжения в ряд по малому параметру, снося их значения на окружность $\rho = \rho_{S0}$, получим условие текучести, которому должны удовлетворять упругие напряжения на упруго-пластической границе:

$$\sigma_\rho^{1e}(\sigma_\theta^{0e} - 2k) + \sigma_\theta^{1e}(\sigma_\rho^{0e} - 2k) - (\sigma_\rho^{0e_2} + \sigma_\theta^{0e_2} - 2k(\sigma_\rho^{0e} + \sigma_\theta^{0e}) + 2\tau_{\rho\theta}^{0\ e^2}) + \frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho}(\sigma_\theta^{0e} - 2k)\rho_{S1} + \frac{d\sigma_\theta^{0e}}{d\rho}(\sigma_\rho^{0e} - 2k)\rho_{S1} - 2\tau_{\rho\theta}^{0\ e}\cdot\frac{d\tau_{\rho\theta}^{0\ e}}{d\rho}\rho_{S1} = 0 \quad (43)$$

при $\rho = \rho_{S0}$.

Из (32), (40), (43) определяется $\rho_{S1}$:

$$2(2k-p)^2\frac{\rho_{S1}}{\rho_{S0}} = \frac{BC_2}{\rho_{S0}{}^4} + p^2 + (2k-p)^2 - kp. \quad (44)$$

Это уравнение позволяет определить радиус упруго-пластической границы в трансверсально-изотропной плоскости используя (28), (35) и (41).

Рассмотренные задачи показывают, что наличие касательных нагрузок на границе отверстия в тонкой пластине приводит к уменьшению предельного значения растягивающей нагрузки, приложенной к границе отверстия или на бесконечности. Учет анизотропии изменяет радиус упруго-пластической области по сравнению с изотропной плоскостью. Оценка этого эффекта зависит от параметра анизотропии и величины приложенных усилий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов-Аляев Г.А.* Сопротивление материалов пластическому деформированию. — Л.: Машиностроение, 1978. — 368 с.

2. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 704 с.

3. *Вульман С.А.* Моделирование расчета конструкций из трансверсально-изотропного материала с использованием экстремальных свойств условий пластичности / С. А. Вульман, Т. Д. Семыкина. // Авиакосмические технологии: Сб. тр. Третьей международной науч.-техн. конф. — Воронеж, 2002. — С. 41-46.

4. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. В 2 т. Т. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 448 с.

**Семыкина Татьяна Дмитриевна** — доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, кафедра теоретической и прикладной механики, тел.: (4732) 20-87-63, e-mail: mech@amm.vsu.ru

**Цуканова Людмила Петровна** — ст. преподаватель, Воронежский государственный технический университет, кафедра прикладной математики, тел.: (4732) 75-61-57.

**Semykina Tat'yana D.** — Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of Voronezh State University, the department of theoretical and applied mechanics, tel.: (4732) 208-763, e-mail: mech@amm.vsu.ru

**Tsukanova Ludmila P.** — Voronezh State Technical University, the department of applied mathematics, tel.: (4732) 756-157.