УДК 517. 946

АСИМПТОТИКА ПРИ $t \to \infty$ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 1

Е. Н.Свиридова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 5.02.2009 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению ряда компонент решения системы уравнений, описывающей малые колебания экспоненциально стратифицированной и равномерно вращающейся жидкости в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3), жестко связанной с вращающейся жидкостью. Жидкость стратифицирована вдоль оси Ox_3, совпадающей с осью вращения: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, где $\beta > 0$ — параметр стратификации. Построена асимптотика при $t \to +\infty$ одной из компонент решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы, переменные коэффициенты, существование решения, асимптотическое поведение.

Abstract. This article is devoted to studying a number of components of solution of the system of partial differential equations. The system of equations describes the small fluctuations of the exponentially stratified and uniformly rotating fluid in the Cartesian system of coordinates (x_1, x_2, x_3) rigidly connected with the rotating fluid. The fluid is stratified along the axis Ox_3 coinciding with the axis of rotation: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, where $\beta > 0$ is a parameter of stratification. The asymptotics of one of the components of the solution is constructed.

Keywords: differential equations, systems of differential equations, variable coefficients, existence of solution, asymptotic behavior.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе изучается двумерное движение стратифицированной жидкости, то есть такое, которое описывается функциями, не зависящими от одной из пространственных переменных, x_1 или x_2 (для определенности — от x_2). Рассмотрение двумерного движения в рамках указанной модели жидкости приводит к системе линеаризованных уравнений Эйлера (см. [1])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial}{\partial x_1} p = 0, \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x_3} p = 0, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1 \in \mathbf{R}, x_3 > 0, t > 0; \boldsymbol{\alpha} = (0,0,\alpha)$ — вектор Кориолиса; $\omega_0^{\ 2} = 2\beta g$ — квадрат частоты Вейсяля—Брента, p — динамическое давление, $\rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в невозмущенном состоянии.

С помощью замены $\sigma = p\rho_0^{-1}(x_3) = A^{-1} p\, e^{2\beta x_3}$ приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0; \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_3} - 2\beta\sigma\right) = 0; \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Будем решать (2) со следующими начальными и граничными условиями:

$$V_k(x,0) = 0,\ k = 1,2,3,\ \frac{\partial V_3}{\partial t}(x,0) = 0,$$
$$\sigma(x,0) = 0,\ V_3(x_1,x_3,t)\big|_{x_3=0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1,t). \tag{3}$$

Замечание. В силу условия соленоидальности задаваемого четвертым уравнением системы, с компонентами вектора скорости частиц

$V=\{V_1,V_2,V_3\}$ можно связать функцию тока $\psi=\psi(x_1,x_3,t)$ следующим соотношением: $\{V_1,V_3\}=\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_3},-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right\}$. Этим соотношением обусловлено граничное условие.

Предполагается, что функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям

Условие 1. При некотором $\delta>0$ равномерно по $x_1\in\mathbf{R}$ справедлива оценка $|\psi(x,t)|\le c\exp(-\delta t)$, $t\to+\infty$.

Условие 2. В $L_1(\mathbf{R}\times(0;\infty))$ существуют следующие производные функции $\psi(x_1,t)$:

$$\chi_n(x_1,t)=\left(1-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^n\psi(x_1,t),\ n=2,3,4.$$

Условие 3. Имеет место оценка

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|\psi(x,t)|\,dx<\infty.$$

Условие 4. Функция $\psi(x,t)$ финитна: $\psi(x,t)=0$ при $t>N$.

Введем нормы

$$\langle\langle f\rangle\rangle_\rho=\left\{\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty(1+t^2)\left|F_{x_1\to s_1}[f(x_1,t)]\right|(1+s_1^{2\rho})\,ds_1dt\right\}^{1/2}$$

$$|||g(x,t)|||^2_{L_2(\mathbf{R}^2\times(0;\infty))}=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left|e^{-\beta x_3}g(x,t)\right|^2dxdt.\quad(4)$$

Через $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}^3)}$, $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}_+{}^2)}$, $\|\cdot\|_{L_2(W_2{}^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))}$ будем обозначать стандартные нормы в соответствующих пространствах $L_2(\mathbf{R}^3)$, $L_2(\mathbf{R}_+{}^2)$, $L_2(W_2{}^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))$, где $W_2{}^\rho(\mathbf{R})$ — пространство Соболева—Слободецкого с индексом ρ на $\mathbf{R}$.

В работе [2] доказано существование решения задачи (2), (3), получены оценки для норм компонент решения и их производных, входящих в систему, в пространствах $L_2(\mathbf{R}_+{}^2)$, $L_2(W_2{}^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))$, выполнена проверка начальных и граничных условий. В частности, доказано, что компонента $V_3(x,t)$ решения имеет при $x_3>0$ представление

$$V_3(x_1,\ x_3,\ t)=\exp(\beta x_3)F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\hat{h}(s_1,s_3,\gamma)\right],\quad(5)$$

где

$$\hat{h}(s_1,s_3,\gamma)=\frac{2s_1s_3\widehat{\psi}(s_1,\gamma)}{(s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2)}+$$
$$+\frac{2s_1s_3\widehat{\psi}(s_1,\gamma)}{(s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2)^2}\frac{(\alpha^2-\omega_0{}^2)s_1{}^2}{\gamma^2+\dfrac{\alpha^2s_3{}^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0{}^2s_1{}^2}{s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2}},$$

причем $\widehat{\psi}(s_1,\gamma)=L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1\to s_1}[\psi(x_1,t)]\right]$, $L_{t\to\gamma}$ — преобразование Лапласа (с учётом начальных условий) и $F_{x_1\to s_1}$ — частичное преобразование Фурье. Доказано также выполнение следующей оценки

$$\begin{aligned}&|||V_3(x_1,x_3,t)|||_{L_2(\mathbf{R}_+^2\times(0;\infty))}\le\\&\le\|\psi(x_1,t)\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))}+c\langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2},\end{aligned}\quad(6)$$

аналогичным образом, с использованием свойств преобразования Фурье по переменной x: $\frac{\partial}{\partial x_k}F^{-1}_{s\to x}\left[\tilde{f}(s_1,s_3)\right]=F^{-1}_{s\to x}\left[-is_k\tilde{f}(s_1,s_3)\right]$, $k=\overline{1,3}$, и свертки по переменной t: $D^\kappa(f*g)=(D^\kappa f*g)=(f*D^\kappa g)$, и равенства Парсеваля, на основе утверждений из [3], получены оценки нормы (4) остальных компонент решения и их производных, входящих в систему.

В настоящей работе исследовано асимптотическое поведение $t\to\infty$ компоненты решения $V_3(x,t)$. Доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t\to+\infty$ для компоненты $V_3(x,t)$ решения задачи (2), (3) справедливо следующее асимптотическое представление

$$\begin{aligned}V_3(x,t)&=kt^{-\frac{5}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}(x_1-y_1)\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1+\\&+(1+|x_1|)x_3^{-3}t^{-3}O\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|z|)\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),\end{aligned}\quad(7)$$

$$k=\frac{3\beta^2\exp(\beta x_3)\alpha^{1.5}\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)}{\sqrt{2}\pi^{1.5}x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\beta}+\int\limits_{\beta}^{+\infty}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{2\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}-\frac{\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2}\right)d\lambda,$$

константа k равномерна по x_3: $0<\varepsilon<x_3<<N<\infty$.

Асимптотика компоненты решения $\mathbf{V_3}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ при $t\to\infty$

Перепишем представление (5) компоненты $V_3(x,t)$ решения задачи (2), (3) при $x_3>0$ в виде

$$\begin{aligned}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\hat{h}(s_1,s_3,\gamma)\right]&=2s_1s_3\widehat{\psi}(s_1,t)\left(s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2\right)^{-1}+\\&+\widehat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{E}_3(s,t),\end{aligned}\quad(8)$$

где

$$\widehat{E}_3(s,t)=\frac{2s_3s_1^3\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{\left(s_1^{\,2}+s_3^{\,2}+\beta^2\right)^2}\cdot\frac{\sin[S(s_1,s_3)t]}{S(s_1,s_3)},$$
$$S(s_1,s_3)=\sqrt{\frac{\alpha^2s_3^{\,2}+\alpha^2\beta^2+\omega_0^{\,2}s_1^{\,2}}{s_1^{\,2}+s_3^{\,2}+\beta^2}}, \tag{9}$$

В силу условия 2 справедливо представление

$$\widehat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{E}_3(s,t)=\widehat{\chi}_n(s_1,t)\underset{(t)}{*}\frac{1}{\left(1+s_1^2\right)^n}\widehat{E}_3(s,t)=$$
$$=\widehat{\chi}_n(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{B}_n(s,t),\quad n=2,3,4,$$

где

$$B_n(x,t)=F^{-1}_{s\to x}\left[\widehat{B}_n(s,t)\right]=$$
$$=\frac{2\left(\alpha^2-\omega_0^{\,2}\right)}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_3s_1^{\,3}\sin[St]\exp\left[-i(x,s)\right]}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^{\,2}+s_3^{\,2}+\beta^2\right)^2S}ds_1ds_3. \tag{10}$$

С помощью замены $s_1=\lambda\cos\theta$, $\sqrt{s_3^2+\beta^2}=\lambda\sin\theta$ в представлении (10), приходим к равенству $B_n(x,t)=-i(2\pi)^{-2}\left(\omega_0^2-\alpha^2\right)\left(B_n^+(x,t)-B_n^-(x,t)\right)$, где

$$B_n^{\pm}(x,t)=\int\limits_0^{0.5\pi}\cos^3\theta\sin\theta\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\times$$
$$\times\exp\left(\pm it\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}\right)H_n(\theta)\,d\theta, \tag{11}$$

$$H_n(\theta)=\left(\int\limits_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta}+\int\limits_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right)\lambda e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\times$$
$$\times\left(e^{ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}}+e^{-ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}}\right)\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^{-n}d\lambda. \tag{12}$$

При выполнении условия 1 из представления (8) следует, что для оценки поведения при $t\to+\infty$ функции $V_3(x,t)$ достаточно получить соответствующие оценки для интегралов (11).

Доказательство теоремы 1 основано на изучении асимптотического поведения при $t\to\infty$ интегралов (11), которое будет проведено ниже.

Фазовые функции $S(\theta)=\pm\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}$ имеют на отрезке $[0;0.5\pi]$ две критических точки: $\theta_1=0$, $\theta_2=0.5\pi$. Устроим на $[0;0.5\pi]$ разбиение единицы:

$$\eta_1(\theta)+\eta_2(\theta)=1,\quad \eta_k(\theta)\in C^\infty([0;0.5\pi]),$$
$$k=1,2,$$

$$\eta_1(\theta)=\begin{cases}1, & \theta\le\pi/6\\ 0, & \theta\ge\pi/3\end{cases};$$
$$\eta_2(\theta)=\begin{cases}1, & \theta\ge\pi/3\\ 0, & \theta\le\pi/6\end{cases}.$$

Таким образом, требуется изучить асимптотики следующих интегралов

$$B_n^{\pm}(x,t,0)=$$
$$=\int\limits_0^{\pi/3}\eta_1(\theta)\cos^3\theta\sin\theta\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\times$$
$$\times\exp\left(\pm itS(\theta)\right)H_n(\theta)\,d\theta,n=4;$$
$$B_n^{\pm}\left(x,t,\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\eta_2(\theta)\cos^3\theta\sin\theta\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\times$$
$$\times\exp\left(\pm itS(\theta)\right)H_n(\theta)\,d\theta,n=4.$$

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛА $\mathbf{B_n(x,t,0)}$

Нами будет использовано следующее утверждение (см.[4], стр.103):

Теорема 01. Пусть $I=[x_0;x_0+\delta]$ - конечный отрезок, $\delta>0$, $f(x),S(x)\in C^\infty(I)$, $f^{(k)}(x_0+\delta)=0$, $k=0,1,2,\ldots$. Пусть функция $S(x)$ имеет на I единственную стационарную точку x_0 и $S^{(k)}(x_0)=0$, $1\le k\le m-1$, $S^{(m)}(x_0)\ne0$, $m\ge2$. Тогда при $\lambda\to\infty$

$$F(\lambda,x_0)=\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}f(x)\exp\left(i\lambda S(x)\right)dx\sim$$
$$\sim\lambda^{-\frac{1}{m}}\exp\left(i\lambda S(x_0)\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-\frac{k}{m}},$$
$$a_k=\Gamma\left((k+1)m^{-1}\right)(k!m)^{-1}\times$$
$$\times\exp\left(i\pi(k+1)\delta(x_0)(2m)^{-1}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^k\times$$
$$\times\left[f(x)\left(-\delta(x_0)\left(S(x)-S(x_0)\right)\right)^{-\frac{k+1}{m}}(x-x_0)^{k+1}\right]\Bigg|_{x=x_0},$$
$$\delta(x_0)=\operatorname{sgn}S^{(m)}(x_0).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для интеграла $B_n(x,t,0)$ (при $n=4$) справедливо при $t\to+\infty$ следующее асимптотическое представление

$$B_n(x,t,0)=O\left(t^{-3}\right), \tag{13}$$

причем оценка $O\left(t^{-3}\right)$ равномерна по x_3 : $0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$.

Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть $n = 4$. Справедливо равенство $H_n(\theta)\big|_{\theta=0} = 0$.

Доказательство. Подынтегральная функция в представлении (12) непрерывна, интеграл $H_n(\theta)$ абсолютно сходится и является непрерывной функцией (по теореме о предельном переходе под знаком интеграла Лебега). При $\theta \to 0$ промежутки интегрирования в (12) стремятся к нулю. Следовательно, $H_n(0) = 0$.

Лемма 2. Пусть $n = 4$. Справедливы равенства

$$\frac{d}{d\theta} H_n(\theta)\big|_{\theta=0} = \frac{d^2}{d\theta^2} H_n(\theta)\big|_{\theta=0} =$$

$$= \frac{d^3}{d\theta^3} H_n(\theta)\big|_{\theta=0} = \frac{d^4}{d\theta^4} H_n(\theta)\big|_{\theta=0} = 0.$$

Доказательство. С помощью замены $\xi = \lambda \sin\theta$ функцию $H_4(\theta)$ можно записать в виде

$$H_4(\theta) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right) \frac{2\exp\left[-ix_1\xi\cos\theta\sin^{-1}\theta\right]\xi\sin^{-2}\theta\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)}{\left(1+\xi^2\cos^2\theta\sin^{-2}\theta\right)^4} d\xi.$$

В последнем представлении снова выполняем замену $\mu = \sin\theta$. Тогда

$$H_4(\mu) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right) \frac{2\exp\left[-ix_1\xi\sqrt{1-\mu^2}\,/\,\mu\right]\mu^6\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)}{\left(\mu^2\left(1-\xi^2\right)+\xi^2\right)^4} \xi d\xi.$$

$$\frac{d}{d\mu}H_4 = 2\left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right)\left\{\frac{\exp[-ix_1\xi\mu^{-1}\sqrt{1-\mu^2}\,]\left(-ix_1\xi\right)\left(\mu^2-\mu-1\right)\mu^4\left(1-\mu^2\right)^{-0.5}\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)}{\left(\mu^2\left(1-\xi^2\right)+\xi^2\right)^4} + \right.$$

$$+6\mu^5\exp\left[-ix_1\xi\sqrt{1-\mu^2}\,/\,\mu\right]\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)\left(\mu^2\left(1-\xi^2\right)+\xi^2\right)^{-4} +$$

$$\left. +8\exp\left[-ix_1\xi\sqrt{1-\mu^2}\,/\,\mu\right]\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)\mu^7\left(1-\xi^2\right)\left(\mu^2\left(1-\xi^2\right)+\xi^2\right)^{-5}\right\}\xi d\xi.$$

Интеграл $\frac{d}{d\mu}H_4$ абсолютно сходится за счет высоких степеней ξ в знаменателях дробей. При $\mu = 0$ подынтегральные выражения обращаются в ноль. Следовательно, $\frac{d}{d\mu}H_4(\mu)\Big|_{\mu=0} = 0$.

Дальнейшее доказательство проводится аналогично, путем непосредственного дифференцирования. В частности, можно установить, что четвертая производная допускает представление в виде

$$\frac{d}{d\mu}H_4(\mu) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right)\exp\left[-ix_1\xi\sqrt{1-\mu^2}\mu^{-1}\right]\times$$

$$\times\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)\times\left\{\frac{\xi^5x_1^4f_1(\mu)}{A^5} + \frac{\xi^6x_1^3f_2(\mu)}{A^5} + \frac{\xi^7x_1^2f_3(\mu)}{A^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^8x_1f_4(\mu)}{A^7} + \frac{\xi^9f_5(\mu)}{A^8} + g(x_1,\xi,\mu)f_6(\mu)\right\}d\xi,$$

где $f_j(\mu)$ — функции, зависящие от μ, причем $f_j(0) = 0$, $j = \overline{1,6}$, интеграл

$$\left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right)\exp\left[-ix_1\xi\sqrt{1-\mu^2}\mu^{-1}\right]\times$$

$$\times\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)g(x_1,\xi,\mu)f_6(\mu)d\xi$$

абсолютно сходится. Высокие степени ξ в знаменателях дробей по-прежнему обеспечивают абсолютную сходимость интеграла $\frac{d^4}{d\mu^4}H_n(\mu)$, а при $\mu = 0$ подынтегральные функции обращаются в ноль.

Доказательство теоремы 2. Применяя к интегралам $B_n^{\pm}(x,t,0)$ теорему 01 и учитывая результаты лемм 1, 2 будем иметь при $t \to +\infty$

$$B_n^{\pm}(x,t,0) = t^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\pm i\omega_0 t\right)\times$$

$$\times\left(0\cdot t^0 + 0\cdot t^{-\frac{1}{2}} + 0\cdot t^{-1} + 0\cdot t^{-\frac{3}{2}} + 0\cdot t^{-2} + O\left(t^{-\frac{5}{2}}\right)\right) =$$

$$= O\left(t^{-3}\right).$$

Отсюда получаем, что $B_n(x,t,0) = O\left(t^{-3}\right)$.

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛА $\mathbf{B_n}\left(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \frac{\pi}{2}\right)$

Обозначим

$$B_n(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}2\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)\widetilde{B}_n(x,t), \quad (14)$$

$$\widetilde{B}_n(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+s_1^2\right)^n}\frac{s_3 s_1{}^3}{\left(s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2\right)^2}\times$$
$$\times\frac{\sin[St]}{S}\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3.$$

Для изучения асимптотики в точке $\theta=0.5\pi$ проинтегрируем $\widetilde{B}_n(x,t)$ по частям по переменной s_3 два раза. В итоге получим, что вклад в асимптотику интеграла $B_n(x,t)$ от точке $\theta=0.5\pi$ складывается из суммы вкладов в асимптотику следующих интегралов:

$$B_n^1(x,t)=\frac{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}{x_3^2}t^2\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^7 s_3^3\sin[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{4.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{1.5}},$$

$$B_n^2(x,t)=-\frac{3\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{x_3^2}t\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^5 s_3\cos[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{3}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)},$$

$$B_n^3(x,t)=\frac{10\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{x_3^2}t\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^5 s_3^3\cos[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{4}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)},$$

$$B_n^4(x,t)=2\alpha^2\frac{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{x_3^2}t\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^5 s_3^3\cos[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{3}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^2},$$

$$B_n^5(x,t)=\frac{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}{x_3^2}t\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^7 s_3^3\cos[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{4}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^2},$$

$$B_n^6(x,t)=-\frac{12\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{x_3^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^5 s_3^3\sin[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{3.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{1.5}},$$

$$B_n^7(x,t)=\frac{3\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{x_3^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^5 s_3\sin[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{1.5}},$$

$$B_n^8(x,t)=-\frac{3\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}{x_3^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^7 s_3^3\sin[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{3.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{2.5}},$$

$$B_n^9(x,t)=-\frac{24}{x_3^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^3 s_3^3\sin[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{3.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{0.5}},$$

$$B_n^{10}(x,t)=\frac{12}{x_3^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^3 s_3\sin[St]\times\exp\left[-i\left(x,s\right)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{0.5}}.$$

С помощью замены $s_1=\lambda\cos\theta$, $\sqrt{s_3^2+\beta^2}=\lambda\sin\theta$ и определения вклада в асимптотику интеграла Фурье эти интегралы приводятся к виду (здесь мы учли введенное ранее разбиение единицы, поскольку вычисляем асимптотику интегралов в точке $\theta=0.5\pi$):

$$\widetilde{B}_n^1=\frac{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}{2ix_3^2}t^2\times$$
$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^7\theta\sin\theta\left[\exp(itS)-\exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}}Q_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^2=-\frac{3\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{2x_3^2}t\times$$
$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^5\theta\sin\theta\left[\exp(itS)+\exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)}R_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^3=\frac{10\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{2x_3^2}t\times$$
$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^5\theta\sin\theta\left[\exp(itS)+\exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)}Q_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^4 = \frac{2\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)\alpha^2}{2x_3^2} t \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^5\theta\sin\theta\left[\exp(itS) + \exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta\right)^2} Q_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^5 = \frac{\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^2}{2x_3^2} t \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^7\theta\sin\theta\left[\exp(itS) + \exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta\right)^2} Q_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^6 = -\frac{12\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)}{2ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^5\theta\sin\theta\left[\exp(itS) - \exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}} Q_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^7 = \frac{3\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)}{2ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^5\theta\sin\theta\left[\exp(itS) - \exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}} R_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^8 = -\frac{3\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^2}{2ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^7\theta\sin\theta\left[\exp(itS) - \exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta\right)^{2.5}} Q_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^9 = -\frac{24}{2ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^3\theta\sin\theta\left[\exp(itS) - \exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta\right)^{0.5}} Q_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{B}_n^{10} = \frac{12}{2ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^3\theta\sin\theta\left[\exp(itS) - \exp(-itS)\right]}{\left(\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta\right)^{0.5}} R_n(\theta)\,d\theta,$$

где

$$Q_n(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta} + \int_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right) \times$$

$$\times \frac{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}{\lambda^3\left(1 + \lambda^2\cos^2\theta\right)^n} e^{-ix_1\lambda\cos\theta} \times$$

$$\times \left(e^{ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}} + e^{-ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}}\right) d\lambda,$$

$$R_n(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta} + \int_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right) \times$$

$$\times \frac{e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\left(e^{ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}} + e^{-ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}}\right)}{\lambda\left(1 + \lambda^2\cos^2\theta\right)^n} d\lambda. \quad (15)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для интеграла $B_n(x, t, \pi/2)$ (при $n = 2, 3, 4$) справедливо при $t \to +\infty$ следующее асимптотическое представление:

$$B_n(x, t, \pi/2) = 3\beta^2 2^{-0.5}\pi^{-1.5} x_1 x_3^{-2} \alpha^{1.5} \times$$

$$\times \sin(\pi/4 - t\alpha)\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^{-1.5} t^{-2.5} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right)\left(2\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}\right)^{-1} - \right. \quad (16)$$

$$\left. - \cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}\right)\right)\lambda^{-2} d\lambda + b(x, t),$$

где $b(x, t) = \left|x_1 x_3^{-3}\right| O\left(t^{-3}\right)$, причем оценка $b(x, t)$ равномерна по

$$x_3 : \ 0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty .$$

Доказательство. Рассмотрим представления $Q_n(\theta)$ и $R_n(\theta)$, определенные в (15).

$$R_n(\theta) = 2\left(\int_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta} + \int_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right) e^{-ix_1\lambda\cos\theta} \times$$

$$\times \cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}\right)\lambda^{-1}\left(1 + \lambda^2\cos^2\theta\right)^{-n} d\lambda;$$

$$Q_n(\theta) = \sin^2\theta R_n(\theta) - 2\beta^2 \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta} + \int_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right) \frac{e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}\right)}{\lambda^3\left(1 + \lambda^2\cos^2\theta\right)^n} d\lambda. \quad (17)$$

Проинтегрируем $R_n(\theta)$ по частям один раз. Внеинтегральные подстановки обратятся в ноль. В итоге имеем

$$R_n(\theta) = -2\left(\int_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta} + \int_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right) \frac{\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}\right)}{x_3\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\lambda} \times$$

$$\times \left[\frac{e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}}{\lambda^2\left(1 + \lambda^2\cos^2\theta\right)^n}\right] d\lambda =$$

$$= -2\left(\int_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta} + \int_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right) \frac{\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta - \beta^2}\right)}{x_3\sin^2\theta} \times$$

$$\times\left\{\frac{e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\left(-ix_1\lambda\cos\theta\right)\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}}{\lambda^2\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^n}+\right.$$
$$+\frac{e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\sin^2\theta}{\lambda\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^n\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}}-$$
$$-2\frac{e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}}{\lambda^3\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^n}+ \quad (18)$$
$$\left.-2n\frac{e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\cos^2\theta\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}}{\lambda\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^{n+1}}\right\}d\lambda.$$

Для нахождения асимптотик интегралов $\widetilde{B}_n^j$, $j=\overline{1,10}$ будем пользоваться теоремой 01. Нам потребуется вычислить выражения $\left.\frac{d}{d\theta}R_n(\theta)\right|_{\theta=0.5\pi}$ и $\left.\frac{d}{d\theta}Q_n(\theta)\right|_{\theta=0.5\pi}$. Дифференцируя по θ представления (18) и (17) и выполняя подстановку $\theta=0.5\pi$, получим

$$\left.\frac{d}{d\theta}R_n(\theta)\right|_{\theta=0.5\pi}=-2ix_1\beta^2\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\frac{\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}d\lambda,$$

$$\left.\frac{d}{d\theta}Q_n(\theta)\right|_{\theta=0.5\pi}=$$
$$=-2ix_1\beta^2\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\left(\frac{\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}+\frac{\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2}\right)d\lambda$$

С помощью теоремы 01 находим асимптотики интегралов $\widetilde{B}_n^j$, $j=\overline{1,10}$:

$$\widetilde{B}_n^1=-\frac{48}{x_3^2}\frac{\alpha Q_n(0.5\pi)}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}\sin(t\alpha)t^{-2}+$$
$$+\frac{105\beta^2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}x_1}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{2,5}}I_1\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)t^{-2.5}+b_1(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^2=-\frac{24}{x_3^2}\frac{\alpha R_n(0.5\pi)}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}\sin(t\alpha)t^{-2}+$$
$$+\frac{45\beta^2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\alpha^{1.5}x_1}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{2.5}}I_2\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)t^{-2.5}+b_2(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^3=\frac{80}{x_3^2}\frac{\alpha Q_n(0.5\pi)}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}\sin(t\alpha)t^{-2}-$$
$$-\frac{150\beta^2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\alpha^{1.5}x_1}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{2.5}}I_1\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)t^{-2.5}+b_3(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^4=\frac{16}{x_3^2}\frac{\alpha Q_n(0.5\pi)}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}\sin(t\alpha)t^{-2}-$$
$$-\frac{30\beta^2\sqrt{2}\sqrt{\pi}\alpha^{1.5}x_1}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{2.5}}I_1\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)t^{-2.5}+b_4(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^5=-48x_3^{-2}\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{-2}Q_n(0.5\pi)\cos(t\alpha)t^{-3}+b_5(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^6=96x_3^{-2}\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{-2}Q_n(0.5\pi)\cos(t\alpha)t^{-3}+b_6(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^7=-24x_3^{-2}\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{-2}R_n(0.5\pi)\cos(t\alpha)t^{-3}+b_7(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^8=144x_3^{-2}\alpha^{-1}\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{-2}Q_n(0.5\pi)\sin(t\alpha)t^{-4}+b_8(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^9=\frac{-48\alpha Q_n(0.5\pi)}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}\sin(t\alpha)t^{-2}+$$
$$+\frac{72\beta^2\sqrt{2\pi}\alpha^{1.5}x_1}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{2.5}}I_1\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)t^{-2.5}+b_9(x,t);$$

$$\widetilde{B}_n^{10}=\frac{24\alpha R_n(0.5\pi)}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}\sin(t\alpha)t^{-2}-$$
$$-\frac{36\beta^2\sqrt{2\pi}\alpha^{1.5}x_1}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{2.5}}I_2\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)t^{-2.5}+b_{10}(x,t),$$

где

$$I_1=\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\left(\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\lambda^{-2}\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}+\right.$$
$$\left.+\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\lambda^{-2}\right)d\lambda,$$

$$I_2=\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\lambda^{-2}\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda,$$

$$b_8(x,t)=\left|x_1x_3^{-3}\right|O\left(t^{-4.5}\right),$$
$$b_j(x,t)=\left|x_1x_3^{-3}\right|O\left(t^{-3.5}\right),\ j=\overline{5,7};$$
$$b_j(x,t)=\left|x_1x_3^{-3}\right|O\left(t^{-3}\right),\ j=\overline{1,4},9,10,$$

причем оценки $O\left(t^{-\alpha}\right)$ равномерны по x_3: $0<\varepsilon<x_3<N<\infty$.

Суммируя полученные результаты и учитывая представление (14), получаем (16).

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся результатами, доказанными в [5], стр. 58 и перенесем оценку (16) на свертку $\psi(x_1,t)\underset{(x_1,t)}{*}B_n(x,t)$.

При $n=4$ для $B_n(x,t)$ имеем $B_n(x,t)=cx_1t^{-2.5}+\left|x_1x_3^{-3}\right|O\left(t^{-3}\right)$,

$$c = \frac{3\beta^2\alpha^{1.5}\sin\left(\pi/4 - t\alpha\right)}{\sqrt{2}\pi^{1.5}x_3^2\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^{1.5}} \times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right)\left(2\frac{\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)} - \frac{\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2}\right)d\lambda. \qquad (19)$$

Рассмотрим свертку

$$B_n\left(x_1, x_3, t\right) \underset{(x_1,t)}{*} \psi\left(x_1, t\right) =$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \left(x_1 - y_1\right)\left(t-\tau\right)^{-2.5}\psi\left(y_1,\tau\right)d\tau dy_1 +$$

$$+ x_3^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \left|x_1 - y_1\right| O\left(t-\tau\right)^{-3}\psi\left(y_1,\tau\right)d\tau dy_1.$$

Проведем оценки получившихся интегралов, учитывая условия 3 и 4.

$$J_1 = c\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \left(x_1 - y_1\right)\left(t-\tau\right)^{-\frac{5}{2}}\psi\left(y_1,\tau\right)d\tau dy_1 =$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^N \left(x_1 - y_1\right)t^{-\frac{5}{2}}\left(1 + O\left(\tau/t\right)\right)\psi\left(y_1,\tau\right)d\tau dy_1;$$

$$J_{1,1} = ct^{-\frac{5}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \left(x_1 - y_1\right)\psi\left(y_1,\tau\right)d\tau dy_1,$$

$$\left|J_{1,2}\right| \le ct^{-\frac{7}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^N \left|x_1 - y_1\right|\left|\psi\left(y_1,\tau\right)\right|\left|c_1\tau\right|d\tau dy_1 \le$$

$$\le ct^{-\frac{7}{2}}c_1 N\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \left|x_1 - y_1\right|\left|\psi\left(y_1,\tau\right)\right|d\tau dy_1 < \infty,$$

(интегралы сходятся в силу условия 3).

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \left|x_1 - y_1\right| O\left(t-\tau\right)^{-3}\psi\left(y_1,\tau\right)d\tau dy_1 =$$

$$= \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \left|x_1 - y_1\right| O\left(t-\tau\right)^{-3}\psi\left(y_1,\tau\right)dy_1 d\tau.$$

Оценим внутренний интеграл с помощью неравенства Питре (см. [6], с.31).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|x_1 - y_1\right|\psi\left(y_1,\tau\right)dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|y_1\right|\psi\left(x_1 - y_1,\tau\right)dy_1 \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \left|y_1\right|\right)\psi\left(x_1 - y_1,\tau\right)dy_1 \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \left|x_1\right|\right)\left(1 + \left|x_1 - y_1\right|\right)\psi\left(x_1 - y_1,\tau\right)dy_1 \le$$

$$\le \left(1 + \left|x_1\right|\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \left|z\right|\right)\psi\left(z,\tau\right)dz < \infty.$$

Тогда

$$\left|J_2\right| \le c_2\int_0^N\left|t-\tau\right|^{-3}\left\{\left(1+\left|x_1\right|\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\left|z\right|\right)\psi\left(z,\tau\right)dz\right\}d\tau \le$$

$$\le \frac{c_2}{t^3}\int_0^N\left|1 - \frac{\tau}{t}\right|^{-3}\left\{\left(1+\left|x_1\right|\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\left|z\right|\right)\psi\left(z,\tau\right)dz\right\}d\tau \le$$

$$\le \frac{8c_2\left(1+\left|x_1\right|\right)}{t^3}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\left|z\right|\right)\psi\left(z,\tau\right)dzd\tau.$$

Складывая оценки для интегралов J_1 и J_2, получаем

$$B_n\left(x_1, x_3, t\right) \underset{(x_1,t)}{*} \psi\left(x_1, t\right) =$$

$$= ct^{-2.5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(x_1 - y_1\right)\psi\left(y_1,\tau\right)d\tau dy_1 +$$

$$+\left(1+\left|x_1\right|\right)x_3^{-3}t^{-3}O\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\left|z\right|\right)\psi\left(z,\tau\right)dzd\tau\right),$$

константа c, определенная в (19), равномерна по x_3 : $0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$.

Отсюда, с учетом (5) и (8), получаем представление (7) теоремы 1.

В дальнейшем будут получены асимптотические представления для остальных компонент решения задачи (2), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перова Л. В., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О колебаниях в стратифицированной и вращающейся жидкости, возбуждаемой плоской, бегущей по дну волной. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000, — № 1. — С. 136—143.

2. *Глушко А. В., Свиридова Е. Н.* Оценка поведения при $t \to \infty$ решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. // Труды математического факультета, 2007, — № 11. — С. 35—48.

3. *Глушко А. В.* Асимптотические методы в задачах гидродинамики. — Воронеж: ВГУ, 2003. — 300 с.

4. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368с.

5. *Глушко А. В., Щербатых В. Е.* Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи типа Неймана для системы уравнений движения вращающейся жидкости. — Воронеж: ВГУ, 1984. — 60с.

6. *Глушко А. В., Карев А. Н.* О существовании, единственности и асимптотике по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости. — Воронеж: ВГУ, 1984. — 60с.

7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — изд. 4-е. — 512 с.

Свиридова Елена Николаевна — аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета ВГУ; тел.: (4732) 460-001, e-mail: slena13@mail.ru

Sviridova Elena N. — Voronezh State University, Department of Mathematics, Chair of Partial Differential Equations and Probability Theory, Post-graduate student; tel.: (4732) 460-001, e-mail: slena13@mail.ru