

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЧНО ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫХ ТРЕЩИН В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ МАТЕРИАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

М. Г. Ордян, В. Е. Петрова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.02.2009 г.

Аннотация. Работа посвящена задаче теплопроводности о взаимодействии трещин в двухкомпонентном материале (биматериале), находящемся под действием теплового потока. Предполагалось, что трещины теплопроницаемы, причём теплопроницаемости внутренних трещин и межфазной разные. Для построения основных уравнений задачи использованы методы комплексных потенциалов и метод суперпозиции. Полученные сингулярные интегральные уравнения решены методом малого параметра для случая, когда длина межфазной трещины намного больше характерной длины внутренней трещины. Получены асимптотические аналитические выражения для коэффициентов интенсивности тепловых потоков в вершинах межфазной трещины и проанализировано влияние на них геометрии задачи, коэффициентов теплопроводности материалов и коэффициентов теплопроницаемости трещин.

Ключевые слова: тепловой поток, граница раздела, трещина, коэффициент интенсивности тепловых потоков, коэффициент теплопроводности, комплексный потенциал, сингулярное интегральное уравнение, малый параметр.

Abstract. The work is devoted to the thermal problem of crack interaction in a bimaterial subjected to a heat flux. It is assumed that the cracks surfaces are partially insulated with thermal conductivity coefficients are different for internal cracks and for an interface crack. The method of complex potentials and the superposition technique are used for construction of equations of the problem. In the case when an interface crack is much larger than internal cracks the obtained singular integral equations are solved by small parameter method. The asymptotic analytical formulas for the thermal intensity factors are derived. The influence of the geometry of the problem, thermal conductivity coefficients of the materials and the heat conductivity index of crack surfaces on the thermal intensity factors at the interface crack tips are investigated.

Key words: heat flux, interface, crack, thermal intensity factor, thermal conductivity coefficient, complex potential, singular integral equation, small parameter.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается двумерная задача теплопроводности о взаимодействии трещин в двухкомпонентном материале (биматериале), находящемся под действием теплового потока. Эта задача имеет как самостоятельное значение, так и вспомогательное, как первый этап решения несвязанной задачи термоупругости. Математическая формулировка задачи теплопроводности для термоизолированных трещин совпадает с задачей продольного сдвига для трещин со свободными от напряжений краями (нагрузка приложена на бесконечности). Решение задачи теплопроводности для системы термоизолированных трещин в биматериале дано в работе [1]. Решение задачи продольного сдвига для системы трещин в биматериале получено в

работе [2], и эти результаты используются в данной статье.

Двухкомпонентные материалы встречаются во многих конструкциях, и они подвергаются не только механическим нагрузкам, но и тепловым. Вдоль границы соединения материалов из-за разности их тепловых и упругих свойств возникают напряжения, приводящие к расслоению материалов и появлению межфазных дефектов. Также, наличие трещин и других неоднородностей и дефектов ведёт к дополнительному перераспределению тепловых потоков и, как следствие, к дополнительным напряжениям. Поэтому задача взаимодействия внутренних трещин и межфазной позволяет лучше понять механизм влияния неоднородностей на тепловые потоки и распределение температуры в биматериале.

В настоящее время существует большое количество исследований в этой области, обзор

работ можно найти в [3, 4]. В данной работе исследуется взаимодействие трещин при предположении, что трещины теплопроницаемы, причём теплопроницаемости внутренних трещин и межфазной разные. В работе [5] рассматривалась задача о частично теплопроницаемой межфазной трещине. Был введён коэффициент теплопроницаемости трещины $\eta \in [0, 1]$, $\eta = 0$ соответствует термоизолированной трещине, $\eta = 1$ – полностью теплопроницаемой трещине. Аналогичные коэффициенты введены и в данной работе.

Для построения основных уравнений задачи использованы методы комплексных потенциалов и метод суперпозиции. Схема построения комплексных потенциалов для задачи о трещине в биматериале применена такая же, как в работе [6]. Полученные сингулярные интегральные уравнения решены методом малого параметра [4] для случая, когда длина межфазной трещины намного больше длины внутренней трещины. Посчитаны коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах межфазной трещины и проанализировано влияние на них геометрии задачи, коэффициентов теплопроводности материалов и коэффициентов теплопроницаемости трещин.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухкомпонентный материал (биматериал), состоящий из двух изотропных теплопроводящих полубесконечных сред $y > 0$ (1) и $y < 0$ (2), с коэффициентами теплопроводности $k_j = const$ ($j=1,2$). Предполагается, что на границе раздела материалов есть трещина длиной $2a_0$, а один из материалов содержит внутренние трещины длиной $2a_k$ (рис. 1). Декартова система координат x, y выбрана так, чтобы начало координат совпадало с центром межфазной трещины и ось x лежала на линии

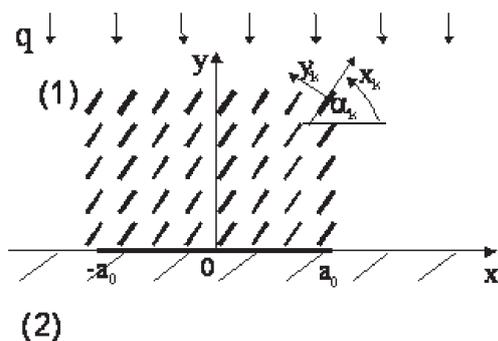


Рис. 1. Схема расположения межфазной трещины и системы микротрещин в биматериале

раздела материалов. Положение внутренних трещин определяется координатами их центров z_k^0 и углами наклона α_k ($k = 0, 1, \dots, N$) к оси x . На биматериал действует тепловой поток интенсивности q , приложенный на бесконечности, перпендикулярно границе раздела материалов.

Применяя принцип суперпозиции, данную задачу с условиями на бесконечности сводим к задаче с условиями на границах разрезов. Основная задача есть сумма решений двух задач со следующими условиями:

1. Бездефектный биматериал под действием теплового потока;

2. Биматериал с трещинами, на краях которых заданы тепловые потоки, равные по величине потокам, посчитанным в первой подзадаче, но противоположного знака.

Кроме того, в соответствии с принципом суперпозиции, задача распадается на подзадачи более простой геометрии, каждая из которых содержит только один дефект. Таким образом, надо рассмотреть решение для биматериала с внутренней трещиной, решение для межфазной трещины, а затем построить уравнения для задачи о взаимодействии внутренних трещин с межфазной.

Итак, полная температура $T_j^*(x, y)$ представляется в виде двух слагаемых

$$T_j^*(x, y) = T_j^0(x, y) + T_j(x, y) \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

где $T_j^0(x, y)$ — температура в бездефектном биматериале, $T_j(x, y)$ — возмущенное температурное поле, вызванное наличием дефектов.

Температура T_j^* , как гармоническая функция, должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta T_j^*(x, y) = 0. \quad (2)$$

Будем предполагать, что трещины частично теплопроводящие. Тогда граничные условия для основной задачи будут следующими:

$$k_1 \frac{\partial T_1^*(x, 0^+)}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2^*(x, 0^-)}{\partial y} = -\eta_0 q_0(x), \quad (3)$$

$$|x| \leq a_0,$$

$$k_j \frac{\partial T_{jn}^*(x_n, 0^+)}{\partial y_n} = k_j \frac{\partial T_{jn}^*(x_n, 0^-)}{\partial y_n} = -\eta q_n(x_n),$$

$$|x_n| \leq a_n, \quad j = 1, 2.$$

$$k_1 \frac{\partial T_1^*(x, 0^+)}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2^*(x, 0^-)}{\partial y}, \quad (4)$$

$$T_1^*(x, 0^+) = T_2^*(x, 0^-), \quad |x| \geq a_0, \quad y = 0.$$

$$\begin{aligned} T_1^*(\pm a_0, 0^+) &= T_2^*(\pm a_0, 0^-), \\ T_{jn}^*(\pm a_0, 0^+) &= T_{jn}^*(\pm a_0, 0^-) \end{aligned} \quad (5)$$

и на бесконечности в случае теплового потока q

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial T_1^*(x, y)}{\partial y} &= k_2 \frac{\partial T_2^*(x, y)}{\partial y} = q, \\ x^2 + y^2 &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношениями (3) моделируется частичная теплопроницаемость поверхностей межфазной и внутренних трещин. Мы предполагаем, что через линию трещин проходят тепловые потоки $q_y(x)$ и $q_{y_n}(x)$, которые составляют некоторую часть от тепловых потоков $q_0(x)$ и $q_n(x)$, которые были бы при полной теплопроницаемости поверхностей трещин. В этих соотношениях $\eta_0 = const$ и $\eta = const$ коэффициенты частичной теплопроводности поверхностей межфазной и внутренних трещин соответственно. Они изменяются от 0 до 1, где 0 соответствует случаю теплоизолированных трещин, а 1 соответствует случаю полной теплопроницаемости поверхностей трещин.

Решение первой задачи известно, и для биматериала под воздействием теплового потока q имеет следующий вид

$$T_j^0(x, y) = \frac{qy}{k_j}, \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

Рассмотрим вторую задачу. Функция $T_j(x, y)$, определяющая возмущенное температурное поле, также удовлетворяет уравнению Лапласа. Подставив (1) в (3)-(6) и учитывая (7), получим граничные условия для $T_j(x, y)$

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial T_1(x, 0^+)}{\partial y} &= k_2 \frac{\partial T_2(x, 0^-)}{\partial y} = q_0(x)(1 - \eta_0), \\ |x| &\leq a_0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$k_j \frac{\partial T_{jn}(x_n, 0^\pm)}{\partial y_n} = q_n(x_n)(1 - \eta), \quad |x_n| \leq a_n.$$

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial T_1(x, 0^+)}{\partial y} &= k_2 \frac{\partial T_2(x, 0^-)}{\partial y}, \\ T_1(x, 0^+) &= T_2(x, 0^-), \end{aligned} \quad (9)$$

$$|x| \geq a_0, \quad y = 0,$$

$$\begin{aligned} T_1(\pm a_0, 0^+) &= T_2(\pm a_0, 0^-), \\ T_{jn}(\pm a, 0^+) &= T_{jn}(\pm a, 0^-), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial y} &= k_2 \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial y} = 0, \\ x^2 + y^2 &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$q_0(x) = -k_j \frac{\partial T_j^0}{\partial y}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} q_n(x_n) &= -k_j \frac{\partial T_j^0}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0} = \\ &= -k_j \left(-\frac{\partial T_j^0}{\partial x} \sin \alpha_n + \frac{\partial T_j^0}{\partial y} \cos \alpha_n \right) \Big|_{y_n=0}. \end{aligned}$$

Знаки '+' и '-' обозначают предельные значения функций на верхней и нижней поверхностях трещин соответственно.

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $T_j(x, y)$ И ПОСТРОЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Межфазная трещина. Задача состоит в нахождении гармонической функции $T_j(x, y)$, удовлетворяющей граничным условиям (8)-(10) и условию на бесконечности (11). Функция $T_j(x, y)$ может быть представлена как действительная часть от аналитической функции $f_j(z)$ комплексной переменной z

$$k_j T_j(x, y) = \text{Re}[f_j(z)]. \quad (13)$$

Введем функцию

$$F_j(z) = f_j'(z). \quad (14)$$

и функцию $\hat{\gamma}_0(x)$, определяющую скачок температур на линии межфазной трещины

$$2\hat{\gamma}_0(x) = T_1(x, 0^+) - T_2(x, 0^-), \quad |x| < a_0.$$

Решение задачи для межфазной трещины в интегральном виде, в терминах функции, производной от скачка температур $\hat{\gamma}_0'(x)$, получается в следующем виде [1]:

$$F_j(z) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{2}{\pi i} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{\hat{\gamma}_0'(t)}{t - z} dt, \quad (15)$$

где функция $\hat{\gamma}_0'(x)$ является решением сингулярного интегрального уравнения,

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{\hat{\gamma}_0'(t)}{t - x} dt = \frac{1}{2} \pi \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} q_0(x)(1 - \eta_0), \quad |x| < a_0, \quad (16)$$

с дополнительным условием (10), которое можно написать в следующем интегральном виде

$$\int_{-a_0}^{a_0} \hat{\gamma}_0'(t) dt = 0. \quad (17)$$

Распределение температуры $T_j(x, y)$ определяется с помощью уравнений (13), (14).

Трещина в биматериале с неповрежденной границей раздела. Рассмотрим теперь внутрен-

ную трещину в биматериале. Предположим, что решение для трещины в бесконечном однородном материале известно, и обозначим комплексный потенциал задачи теплопроводности через $F^0(z)$.

Предположим, что трещина расположена в материале (1) ($y > 0$). Используя теорему об аналитическом продолжении и теорему Лиувилля [8] (с учетом условия на бесконечности (11)), комплексный потенциал для той же трещины в биматериале получаем в следующем виде

$$F(z) = \begin{cases} F^0(z) - K\overline{F^0(z)}, & z \in (1) \\ (1 + K)F^0(z), & z \in (2) \end{cases}, \quad (18)$$

где $K = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$.

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим внутреннюю трещину, взаимодействующую с межфазной трещиной. В случае, когда внутренняя трещина расположена в материале (1) ($y > 0$), используя формулу (18), дополнительный тепловой поток, возникающий на межфазной линии из-за внутренней трещины, определяется следующим образом

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\frac{1}{2i} \lim_{z \rightarrow x} [F^+(z) - \overline{F^+(z)}] = -\frac{k_2}{i(k_1 + k_2)} [F^0(x) - \overline{F^0(x)}] = -q_s(x), \quad (19)$$

где комплексный потенциал $F^0(z)$ для трещины в однородном материале (1) ($y > 0$) используем в интегральной форме [7]

$$F^0(z) = \frac{k_1}{\pi i} \int_{-a_k}^{a_k} e^{-i\alpha_k} \frac{\hat{\gamma}'_k(t)}{t - z_k} dt, \quad (20)$$

$$z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0).$$

Здесь неизвестная функция $\hat{\gamma}'_k$ представляет собой производную от скачка температуры на линии k -ой трещины

$$\hat{\gamma}'_k = \frac{\partial \hat{\gamma}_k(x)}{\partial x}, \quad 2\hat{\gamma}_k(x) = T_{jk}^+ - T_{jk}^-, \quad |x| < a_k.$$

Подставляя формулу (20) в уравнение (19), получаем дополнительный тепловой поток $q_s(x)$ в следующем виде

$$q_s(x) = -\frac{2k_1 k_2}{\pi(k_1 + k_2)} \int_{-a_k}^{a_k} \hat{\gamma}'_k(t) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{te^{i\alpha_k} + z_k^0 - x} \right] dt, \quad (21)$$

$$|x| < a_0.$$

Построим систему интегральных уравнений для случая, когда внутренние трещины расположены на материале (1) ($y > 0$). Добавляя тепловой поток $q_s(x)$ к правой стороне интегрального уравнения для межфазной трещины (16), получаем

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{\hat{\gamma}'_0(t)}{t - x} dt = \frac{1}{2} \pi(1 - \eta_0) [q_0(x) + q_s(x)] \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}, \quad (22)$$

$$|x| < a_0.$$

Подставив (21) в (22), получим следующее интегральное уравнение

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{\hat{\gamma}'_0(t)}{t - x} dt + (1 - \eta_0) \int_{-a_k}^{a_k} P_{0k}(t, x) \hat{\gamma}'_k(t) dt = \frac{1}{2} \pi q_0(x) (1 - \eta_0) \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}, \quad |x| < a_0, \quad (23)$$

где P_{0k} — регулярные ядра, которые содержат геометрию задачи

$$P_{0k}(t, x) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{te^{i\alpha_k} + z_k^0 - x} \right]. \quad (24)$$

Необходимо второе уравнение для того, чтобы найти неизвестные функции $\hat{\gamma}'_0(t)$, $\hat{\gamma}'_k(t)$. Используя комплексные потенциалы (15) для задачи межфазной трещины, тепловой поток $q_a(x)$ на линии внутренней трещины, вызванной межфазной трещиной, определяется с помощью второго уравнения из (12) следующим образом

$$q_a(x) = -k_1 \frac{\partial T_1^0}{\partial y} = \operatorname{Im}[F_1(x)] = -\frac{2k_1 k_2}{\pi(k_1 + k_2)} \int_{-a_0}^{a_0} \hat{\gamma}'_0(t) \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_n}}{t - xe^{i\alpha_n} - z_n^0} \right] dt, \quad (25)$$

$$|x| < a_n.$$

Добавляя тепловой поток из (25) к правой стороне интегрального уравнения для внутреннего дефекта [7]

$$k_1 \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\hat{\gamma}'_n(t)}{t - x} dt = \pi((1 - \eta)[q_n(x) + q_a(x)], \quad |x| < a_n, \quad (26)$$

после некоторых перестановок получаем следующее интегральное уравнение

$$k_1 \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\hat{\gamma}'_n(t)}{t - x} dt + (1 - \eta) \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} \int_{-a_0}^{a_0} P_{n0}(t, x) \hat{\gamma}'_0(t) dt = \pi q_n(x) (1 - \eta), \quad |x| < a_n, \quad (27)$$

с регулярным ядром

$$P_{n0}(t, x) = \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\alpha_n}}{t - xe^{i\alpha_n} - z_n^0}\right]. \quad (28)$$

Решение системы (23), (27) должно удовлетворять дополнительному условию (10), которое можно написать в следующем интегральном виде

$$\int_{-a_k}^{a_k} \hat{\gamma}'_k(t) dt = 0 \quad (k = 0, n). \quad (29)$$

Если в материале (1) ($y > 0$) существует система N внутренних трещин, то система уравнений (23), (27) принимает следующий вид:

$$\int_{-a_0}^{a_0} \frac{\hat{\gamma}'_0(t)}{t-x} dt + (1-\eta_0) \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{a_k} P_{0k}(t, x) \hat{\gamma}'_k(t) dt = \frac{1}{2} \pi q_0(x) (1-\eta_0) \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2}, \quad |x| < a_0, \quad (30)$$

$$k_1 \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\hat{\gamma}'_n(t)}{t-x} dt + (1-\eta) \frac{2k_1 k_2}{k_1+k_2} \int_{-a_0}^{a_0} P_{n0}(t, x) \hat{\gamma}'_0(t) dt + k_1 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-a_k}^{a_k} P_{nk}(t, x) \hat{\gamma}'_k(t) dt = \pi q_n(x) (1-\eta), \quad |x| < a_n, \quad (31)$$

$$n = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$P_{nk}(t, x) = \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\alpha_n}}{te^{i\alpha_k} + z_k^0 - xe^{i\alpha_n} - z_n^0}\right], \quad (32)$$

которые дополняются условиями (29).

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Предположим, что длина внутренних трещин намного меньше длины межфазной, т.е. $2a_k \ll 2a_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, и все микротрещины имеют одинаковую длину $a_k = a$ ($k = 1, 2, \dots, N$). В этом случае решение систем уравнений (30), (31) получаем с помощью метода малого параметра [4], принимая за малый параметр отношение длины внутренней трещины к длине межфазной, т.е. $\lambda = \frac{a}{a_0} \ll 1$.

Введем замену переменных $x = \chi a_k$, $t = \tau a_k$, ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) в (30), (31) и перейдем к безразмерным величинам $w_k = \frac{z_k^0}{a_0}$, ($k = 0, 1, 2, \dots, N$).

Учитывая, что $\hat{\gamma}'_n(\chi)$ в безразмерных координатах имеет вид

$$\gamma'_n(\chi) = \frac{d\gamma_n(\chi)}{d\chi} = a_n \frac{d\hat{\gamma}'_n(x)}{dx} = a_n \hat{\gamma}'_n(\chi a_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (33)$$

Получим

$$\int_{-1}^1 \frac{\gamma'_0(a_0 \tau)}{\tau - \chi} d\tau + a(1-\eta_0) \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 P_{0k}(a\tau, a_0 \chi) \gamma'_k(a\tau) d\tau = \frac{1}{2} \pi q_0(\tau a_0) (1-\eta_0) \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2}, \quad |\chi| < 1, \quad (34)$$

$$k_1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma'_n(a\tau)}{\tau - \chi} d\tau + a_0(1-\eta) \times \frac{2k_1 k_2}{k_1+k_2} \int_{-1}^1 P_{n0}(a_0 \tau, a\chi) \gamma'_0(a_0 \tau) d\tau + a k_1 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-1}^1 P_{nk}(a\tau, a\chi) \gamma'_k(a\tau) d\tau = \pi q_n(\tau a) (1-\eta), \quad |\chi| < 1, \quad (35)$$

$n = 1, 2, \dots, N$.

Неизвестные функции $\gamma'_0(\chi)$ и $\gamma'_n(\chi)$ ищем в виде рядов по малому параметру λ

$$\gamma'_0(\chi) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma'_{0p}(\chi) \lambda^p, \quad \gamma'_n(\chi) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma'_{np}(\chi) \lambda^p. \quad (36)$$

В регулярных ядрах (24), (28), (32) перейдем к безразмерным величинам и, разложив в ряды по малому параметру λ , получим

$$P_{0k}(\tau, \chi) = \sum_{u=0}^{\infty} P_{0ku}(\tau, \chi) \lambda^u, \quad (37)$$

$$P_{0ku}(a\tau, a_0 \chi) = -\frac{1}{a_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\tau^u e^{iu\alpha_k}}{(\chi - w_k)^{u+1}} \right],$$

$$P_{n0}(\tau, \chi) = \sum_{u=1}^{\infty} P_{n0u}(\tau, \chi) \lambda^u,$$

$$P_{n0u}(a_0 \tau, a\chi) = \frac{1}{a_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\chi^{u-1} e^{iu\alpha_n}}{(\tau - w_n)^u} \right],$$

$$P_{nk}(\tau, \chi) = \sum_{u=1}^{\infty} P_{nku}(\tau, \chi) \lambda^u,$$

$$P_{nku}(a\tau, a\chi) = \frac{1}{a_0} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_n} (\chi e^{i\alpha_n} - \tau e^{i\alpha_k})^{u-1}}{(w_k - w_n)^u} \right].$$

Уравнения (34), (35) регуляризуем с использованием формул обращения для интегралов типа Коши [7], затем, подставив в уравнения ряды (36), (37) и приравняв выражения при одинаковых степенях λ , получаем рекуррентную систему уравнений для определения

неизвестных коэффициентов γ'_{0k} , γ'_{nk} в рядах (36)

$$\gamma'_{00}(\chi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \left\{ -\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\chi} \tilde{q}_0(\tau)(1-\eta_0)d\tau + \right. \\ \left. + (1-\eta_0) \sum_{k=0}^N \int_{-1}^1 \tilde{P}_{0k0}(a_0\chi) \gamma'_{k0}(\tau) d\tau \right\},$$

$$\gamma'_{01}(\chi) = \frac{(1-\eta_0)}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 [\gamma'_{k1}(\tau) \tilde{P}_{0k0}(a_0\chi) + \gamma'_{k0}(\tau) \tilde{P}_{0k1}(a\tau, a_0\chi)] d\tau, \quad (38)$$

$$\gamma'_{02}(\chi) = \frac{(1-\eta_0)}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 [\gamma'_{k1}(\tau) \tilde{P}_{0k1}(a\tau, a_0\chi) + \gamma'_{k2}(\tau) \tilde{P}_{0k0}(a\tau, a_0\chi) + \gamma'_{k0}(\tau) \tilde{P}_{0k2}(a\tau, a_0\chi)] d\tau,$$

и

$$\gamma'_{n0}(\chi) = 0,$$

$$\gamma'_{n1}(\chi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \frac{1}{k_1} \left\{ -\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\chi} \tilde{q}_n(\tau)(1-\eta) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{2k_1k_2(1-\eta)}{k_1+k_2} \int_{-1}^1 \gamma'_{00}(\tau) \tilde{P}_{0k1}(a_0\tau, a\chi) d\tau + \right. \\ \left. + k_1 \sum_{k=1, k \neq n}^N \int_{-1}^1 \gamma'_{k0}(\tau) \tilde{P}_{nk1}(a\tau, a\chi) d\tau \right\}, \quad (39)$$

$$\gamma'_{n2}(\chi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\chi^2}} \frac{1}{k_1} \left\{ \frac{2k_1k_2(1-\eta)}{k_1+k_2} \int_{-1}^1 [\gamma'_{00}(\tau) \tilde{P}_{0k2}(a_0\tau, a\chi) + \right. \\ \left. + \gamma'_{01}(\tau) \tilde{P}_{n01}(a_0\tau, a\chi)] d\tau + \right. \\ \left. + k_1 \sum_{k=1, k \neq n}^N \int_{-1}^1 [\gamma'_{k1}(\tau) \tilde{P}_{nk1}(a\chi) + \gamma'_{k0}(\tau) \tilde{P}_{nk2}(a\tau, a\chi)] d\tau \right\}, \\ n = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$\tilde{P}_{nku}(a_k\tau, a_n\chi) = \frac{a_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\chi} P_{nku}(a_k\tau, a_n\xi) d\xi, \\ k, n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \tilde{q}_0(\tau) = a_0q_0(\tau a_0), \quad \tilde{q}_n(\tau) = a_nq_n(\tau a).$$

Рассмотрим случай, когда $\tilde{q}_0(\tau) = \tilde{q}_0 = const$, $\tilde{q}_n(\tau) = \tilde{q}_n = const$.

В этом случае, вычисляя интегралы в выражениях (38), (39), получаем решение системы (34), (35) для межфазной и внутренних трещин с точностью до λ^2

$$\gamma'_0(\chi) = \gamma'_{00}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{02}(\chi) = \\ = \frac{k_1+k_2}{2k_1k_2} \frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}} \tilde{q}_0(1-\eta_0) -$$

$$- \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{k_1} \frac{(1-\eta)(1-\eta_0)}{\sqrt{1-\chi^2}} \times \\ \times \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha_k} \frac{1-\chi w_k}{(\chi-w_k)^2 \sqrt{w_k^2-1}} \right] \times \\ \times \left\{ \tilde{q}_k - \tilde{q}_0(1-\eta_0) \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha_k} \left(1 - \frac{w_k}{\sqrt{w_k^2-1}} \right) \right] \right\}, \quad (41)$$

$$\gamma'_n(\chi) = \lambda \gamma'_{n1}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{n2}(\chi) = \frac{1}{k_1} \left\{ \lambda \frac{\chi(1-\eta)}{\sqrt{1-\chi^2}} \times \right. \\ \times \left\{ \tilde{q}_n - \tilde{q}_0(1-\eta_0) \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha_n} \left(1 - \frac{w_n}{\sqrt{w_n^2-1}} \right) \right] \right\} + \\ \left. + \lambda^2 \frac{-\chi^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{1-\chi^2}} \tilde{q}_0(1-\eta_0)(1-\eta) \operatorname{Re} \left[\frac{e^{2i\alpha_n}}{(w_n^2-1)^{3/2}} \right] \right\}, \\ n = 1, 2, \dots, N.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

По аналогии с коэффициентами интенсивности напряжений, являющимися характеристиками распределения напряжений в окрестности вершин трещин, можно ввести коэффициенты интенсивности тепловых потоков.

Если температурное поле вызвано однородным тепловым потоком интенсивности q , приложенным на бесконечности, то

$$\tilde{q}_0 = -q, \quad \tilde{q}_k = -q \cos \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (43)$$

Коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах межфазной трещины вычислим по формуле

$$k_{T0}^\pm = \mp \lim_{\chi \rightarrow \pm 1} \sqrt{a_0} \sqrt{1-\chi^2} \gamma'_0(\chi) = \\ = \mp \lim_{\chi \rightarrow \pm 1} \sqrt{a_0} \sqrt{1-\chi^2} [\gamma'_{00}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{02}(\chi)]. \quad (44)$$

Подставим (43), (41) в (44), тогда коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах межфазной трещины принимают вид

$$\frac{k_{T0}^\pm}{q\sqrt{a_0}/k_1} = (1-\eta_0) \left\{ \frac{1}{2} (m+1) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{2} (1-\eta) \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\alpha_k}}{(w_k \mp 1) \sqrt{w_k^2-1}} \right] \{ \cos \alpha_k - \right. \\ \left. - (1-\eta_0) \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha_k} - \frac{w_k e^{i\alpha_k}}{\sqrt{w_k^2-1}} \right] \} \right\}. \quad (45)$$

Здесь введено обозначение $m = k_1 / k_2$.

Коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах внутренних трещин вычислим по формуле

$$k_{Tn}^{\pm} = \mp \lim_{\chi \rightarrow \pm 1} \sqrt{a_n} \sqrt{1 - \chi^2} \gamma'_n(\chi) = \mp \lim_{\chi \rightarrow \pm 1} \sqrt{a_n} \sqrt{1 - \chi^2} [\lambda \gamma'_{n1}(\chi) + \lambda^2 \gamma'_{n2}(\chi)], \quad (46)$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

Подставим (43), (42) в (46), тогда коэффициенты интенсивности тепловых потоков в вершинах n -ой внутренней трещины принимают вид

$$\frac{k_{Tn}^{\pm}}{\sqrt{a_n} q / k_1} = (1 - \eta) \left\{ \lambda \left\{ \cos \alpha_n - (1 - \eta_0) \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha_n} \left(1 - \frac{w_n}{\sqrt{w_n^2 - 1}} \right) \right] \right\} \mp \right. \quad (47)$$

$$\left. \mp \lambda^2 (1 - \eta_0) \operatorname{Re} \left[\frac{e^{2i\alpha_n}}{(w_n^2 - 1)^{3/2}} \right] \right\},$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Пусть в однородном материале на оси x размещены две коллинеарные термоизолированные трещины различной длины $2a_0$ и $2a_1$ с центрами, находящимися в точках $z_0^0 = 0$, $z_1^0 = d$. В случае однородного теплового потока с одинаковой интенсивностью на линии трещин, т.е., когда $\tilde{q}_1(x) = \tilde{q}_2(x) = -q = const$, в работе [7] для такой задачи получено точное решение, которое в безразмерных координатах имеет вид

$$\frac{\gamma'^{(1)}(\chi)}{q} = \frac{-\chi^2 - \chi w + \frac{C_0}{a_0^2}}{\sqrt{(1 - \chi^2)[(\chi + w)^2 - \lambda^2]}}. \quad (48)$$

Здесь

$$\frac{C_0}{a_0^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \lambda^2 - w^2 + [w^2 - (1 - \lambda)^2] \frac{E(\rho)}{K(\rho)} \right\},$$

где $K(\rho)$, $E(\rho)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с модулем

$$\rho = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{w^2 - (1 - \lambda)^2}}.$$

и безразмерная величина $w = \frac{d}{a_0}$.

В настоящей работе для такой задачи получено следующее асимптотическое решение с точностью до λ^2

$$\frac{\gamma'^{(2)}(\chi)}{q} = -\frac{\chi}{\sqrt{1 - \chi^2}} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \chi^2}} \frac{1 - \chi w}{(\chi - w)^2 \sqrt{w^2 - 1}} \frac{w}{\sqrt{w^2 - 1}}. \quad (49)$$

На рис. 2 изображены графики сравнения асимптотического решения с точным решением для двух коллинеарных трещин. Сплошной линией изображен график точного решения (48). Пунктирной линией изображен график асимптотического решения (49).

Сравнение уравнений проведено для случая, когда малый параметр $\lambda = \frac{a}{a_0} = 0,1$; длина магистральной трещины $2a_0 = 2$; расстояние между центрами трещин $d = 1,11$. В этом случае результаты почти совпадают (рис. 2). Максимальное расхождение наблюдается около вершин трещины.

$$\max_{|\chi| < 1} |\gamma'^{(2)}(\chi) - \gamma'^{(1)}(\chi)| \approx 0,5142,$$

или 13,88 % от точного решения.

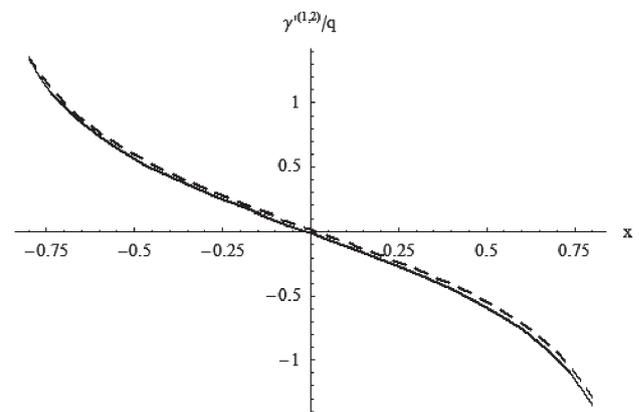


Рис. 2. Графики сравнения асимптотического решения (пунктирная линия) с точным решением (сплошная линия) для двух коллинеарных трещин

Полученное решение (41) также можно сравнить с результатами работы [2], где рассмотрена задача влияния внутренних дефектов на состояния поверхности раздела между двумя упругими материалами при продольном сдвиге.

Коэффициенты интенсивности тепловых потоков (45) в вершинах межфазной трещины для случая полностью термоизолированных

трещин $\eta_0 = \eta = 0$, совпадают с коэффициентом интенсивности напряжений, если считать, что k_j соответствуют модулям сдвига, а тепловой поток q соответствует антиплоской нагрузке.

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
РЕЗУЛЬТАТОВ
В СЛУЧАЕ БИМАТЕРИАЛА
«КЕРАМИКА/КЕРАМИКА TiC/ SiC»**

На рис. 3 и 4 изображены графики зависимости коэффициента интенсивности тепловых потоков $k_{T0}^+ / q\sqrt{a_0} / k_1$ (45) в правой вершине межфазной трещины от угла наклона микротрещин для биматериала «керамика/керамика TiC/ SiC». Коэффициенты теплопроводности TiC и SiC равны 20 (Вт/(м*К)) и 60 (Вт/(м*К)) соответственно. Когда микротрещины расположены в материале TiC, параметр m равен $m = k_1 / k_2 = 0.33$, а когда в материале SiC, то $m = 3$. Одновременно рассмотрен случай однородного материала, т.е. при $m = 1$.

Графики на рис. 3 и 4, построены для поля микротрещин, изображенного на рис.1, координаты их центров определялись по формуле

$$z_k^0 = \{(-0.8 + t0.2) + i(0.25 + p0.25);$$

$$t = 0, 1, \dots, 8. p = 0, 1, \dots, 4\}.$$

Вычисления проводились для $\lambda = 0.1$.

На рис. 3 изображены графики в случае, когда коэффициент теплопроницаемости межфазной трещины равен 0, т.е. $\eta_0 = 0$, при разных коэффициентах теплопроницаемости для мик-

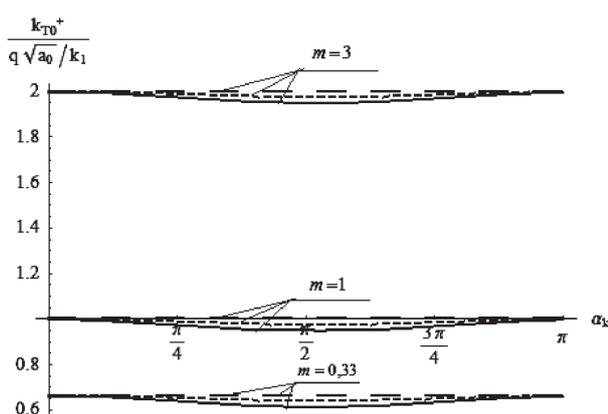


Рис. 3. Графики зависимости коэффициента интенсивности тепловых потоков в правой вершине межфазной трещины $\frac{k_{T0}^+}{q\sqrt{a_0}/k_1}$ от угла наклона микротрещин α_k при $\eta_0 = 0$. Сплошная линия соответствует $\eta = 0$, редкий пунктир при $\eta = 0,5$, частый пунктир при $\eta = 1$

ротрещин: $\eta = \{0; 0,5; 1\}$. На рис. 4 изображены графики, в случае, когда коэффициент теплопроницаемости межфазной трещины равен 0.5, т.е. $\eta_0 = 0.5$, при тех же коэффициентах теплопроницаемости для микротрещин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулирована краевая задача о взаимодействии системы внутренних трещин с межфазной в биматериале, находящемся под действием теплового потока, и построена система сингулярных интегральных уравнений. Была использована модель частично теплопроницаемых трещин, причем предполагалось, что теплопроницаемость межфазной трещины и внутренних разная. Такая модель позволяет изучать влияние дефектов материала таких, как трещины, теплофизических свойств этих трещин, а также и материалов, на распределение температурного поля и тепловых потоков в биматериале. По аналогии с коэффициентами интенсивности напряжений трещин, который используется в упругой задаче, был введён коэффициент интенсивности тепловых потоков в вершинах трещины, который является локальной характеристикой тепловых потоков в окрестности вершин трещины. Для случая, когда характерный размер внутренней трещины намного меньше длины межфазной трещины, получено аналитическое асимптотическое решение задачи, в том числе и аналитическое выражение для коэффициентов интенсивности тепловых потоков в

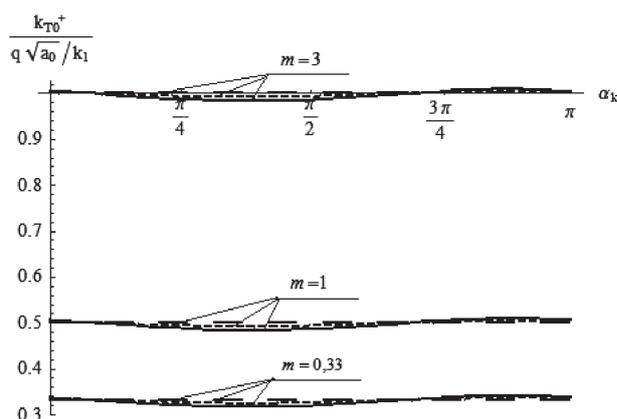


Рис. 4. Графики зависимости коэффициента интенсивности тепловых потоков в правой вершине межфазной трещины $\frac{k_{T0}^+}{q\sqrt{a_0}/k_1}$ от угла наклона микротрещин α_k при $\eta_0 = 0,5$. Обозначения см. рис. 3

вершинах трещин. Проведён параметрический анализ задачи и исследовано влияния расположения систем трещин, их ориентации, а также коэффициента теплопроницаемости трещин на коэффициент интенсивности тепловых потоков в вершинах межфазной трещины. Показано, что наличие внутренних трещин может, как увеличивать коэффициент интенсивности тепловых потоков межфазной трещины, так и уменьшать его относительно коэффициента интенсивности тепловых потоков одной межфазной трещиной. Увеличение коэффициента интенсивности тепловых потоков означает, что неоднородность тепловых полей становится более существенной, что приводит к увеличению деформаций и соответствующих напряжений в материале. Исследование термического напряженно-деформированного состояния в таком биматериале будет предметом дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petrova V. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects / V. Petrova, K. Herrmann // International Journal of Fracture. — 2004. — V. 128. — P. 49—63.

2. Мещерякова Т.В. Влияние внутренних дефектов на состояние поверхности раздела между двумя упругими материалами при продольном сдвиге / Т. В. Мещерякова, В. Е. Петрова // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей 75-летию Е. И. Шемякина — 2006. — С. 461—467.

3. Тамуж В.П. О взаимодействии макротрещины с микродефектами / В. П. Тамуж, В. Е. Петрова // Прикладная механика. — 2002. — № 10. — С. 3—34.

4. Tamuzs V. Fracture of Solids with Microdefects. / V. Tamuzs, N. Romalis, V. Petrova. — Nova Science Publishers Inc., 2000. — 247 p.

5. Lee K.Y. Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow. / K. Y. Lee, S. J. Park. // Eng. Fract. Mech. — 1995. — V. 50, № 4. — P. 475—482.

6. Suo Z. Singularities interacting with interfaces and cracks / Z. Suo // Int. J. Solids Structures. — 1989. — V. 25, № 10, P. 1133—1142.

7. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. — Киев: Наук. думка, 1976. — 445 с.

8. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 639 с.

Ордян Микаел Гарегинович — аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятности, математический факультет ВГУ; тел.: +7908 130 79 13, e-mail: omg84@mail.ru

Петрова Вера Евгеньевна — профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятности, математический факультет ВГУ; тел.: (4732) 208-618, fax: (4732) 208-553, e-mail: veraep@gmail.com

Ordyan M. G. — post-graduated student of the Department of Partial Derivative Equations and Theory of Probability, The Faculty of Mathematics of Voronezh State University; tel.: +7908 130 79 13, e-mail: omg84@mail.ru

Petrova V. E. — professor of the Department of Partial Derivative Equations and Theory of Probability, The Faculty of Mathematics of Voronezh State University, tel.: (4732) 208-618, fax: (4732) 208-553, e-mail: veraep@gmail.com