УДК 517.9

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО О БИФУРКАЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Ю. В. Лысакова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.03.2009 г.

Аннотация. В статье приводится обобщение классической теоремы М.А. Красносельского о бифуркации для уравнений с уплотняющими операторами в бесконечномерном пространстве.

Ключевые слова: бифуркация, решение операторного уравнения, уплотняющий оператор.

Abstract. The article provides a generalization of classical bifurcation M.A. Krasnosel'skii theorem for the equations with condensing operators in infinite-dimensional space.

Keywords: bifurcation, solution of the operator equation, condensing operator.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию операторного уравнения

$$x = \Psi(x,\varepsilon) + \varepsilon\Phi(x,\varepsilon) \qquad (1)$$

на наличие двух и более решений при малых ε. Здесь операторы

$$\Psi : E \times [0,1] \to E \text{ и } \Phi : E \times [0,1] \to E,$$

где E — бесконечномерное банахово пространство, k-раз непрерывно дифференцируемы. Также предполагается, что

(A) *Оператор* Ψ *уплотняет с константой* $q < 1$ *по совокупности переменных* x *и* ε *относительно меры некомпактности Хаусдорфа, а оператор* Φ *уплотняет по совокупности переменных* x *и* ε *относительно меры некомпактности Хаусдорфа с некоторой константой* q_1; *параметр* ε *изменяется на таком промежутке, что* $q + \varepsilon q_1 < 1$.

Напомним, что оператор F называется уплотняющим по совокупности переменных отностительно меры некомпактности Хаусдорфа с константой $q < 1$, если

$$\chi(F([0,1] \times \Omega)) \le q\chi(\Omega),$$

где $q < 1$, а χ — мера некомпактности Хаусдорфа (см. [1]).

В статье приведены условия, при которых $\varepsilon = 0$ является точкой бифуркации уравнения (1). То есть при $\varepsilon = 0$ уравнение (1) имеет изолированное решение x_0, а при близких к нулю, но не равных нулю значениях ε уравнение (1) имеет по крайней мере два непрерывно зависящих от ε решения, близких к x_0.

Результаты такого исследования для конечномерного случая были опубликованы в работе [2]. Главное отличие бесконечномерного случая заключается в том, что проекторы Рисса, соответствующие ветви собственных значений линейной части оператора $\Psi + \varepsilon\Phi$, сходящейся к 1 при $\varepsilon \to 0$, не будут непрерывны по норме. Поэтому в статье используются условия, указанные в [3]. Ниже приводятся дополнительные предположения на линейную часть, обеспечивающие и в бесконечномерном просранстве непрерывность проекторов Рисса по норме. Таким образом, результат из [2] остается верным и в этом случае.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$x = \Psi(x,\varepsilon) + \varepsilon\Phi(x,\varepsilon). \qquad (2)$$

Будем предполагать, что операторы $\Psi : E \times [0,1] \to E$ и $\Phi : E \times [0,1] \to E$, где E — бесконечномерное банахово пространство, трижды непрерывно дифференцируемы по переменной x. Операторы Ψ и Φ удовлетворяют условию (A). Пусть уравнение (2) имеет решение x_ε, которое представимо в виде:

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \omega(\varepsilon), \qquad (3)$$

где $\| \omega(\varepsilon) \| = o(\varepsilon)$. То есть

$$x_\varepsilon = \Psi(x_\varepsilon,\varepsilon) + \varepsilon\Phi(x_\varepsilon,\varepsilon). \qquad (4)$$

Ниже предполагается, что $\Psi, \Psi_1', \Psi_{11}''$ имеют частные производные по ε в точке $(x_0, 0)$. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ точка x_0 является решением уравнения (2):

$$x_0 = \Psi(x_0, 0).$$

Сделаем замену переменных

$$x = x_\varepsilon + z. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$z = \Psi(x_\varepsilon + z, \varepsilon) + \varepsilon\Phi(x_\varepsilon + z, \varepsilon) - \\ -\Psi(x_\varepsilon, \varepsilon) - \varepsilon\Phi(x_\varepsilon, \varepsilon). \qquad (6)$$

Значение $z = 0$ является решением уравнения (6) при всех ε.

Разложим правую часть уравнения (6) в ряд Тейлора в точке $z = 0$:

$$z = \Psi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon)z + \frac{1}{2}\Psi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon)zz + \\ + \frac{1}{6}\Psi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon)zzz + \varepsilon\Phi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon)z + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon\Phi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon)zz + \frac{1}{6}\varepsilon\Phi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon)zzz + \Omega(z) = \\ = (\Psi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon\Phi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon))z + \frac{1}{2}(\Psi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon) + \\ + \varepsilon\Phi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon))zz + \frac{1}{6}(\Psi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon) + \\ + \varepsilon\Phi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon))zzz + \Omega(z), \qquad (7)$$

где $\| \Omega(z) \| = o(\| z \|^3)$. Разложим $\Psi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon)$ по первой переменной в ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, ε). Имеем

$$\Psi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon) = \Psi_{11}''(x_0, \varepsilon) + \varepsilon\Psi_{111}'''(x_0, \varepsilon)x_1 + \alpha(\varepsilon),$$

где $\alpha(\varepsilon)$ — члены более высокого порядка малости по ε. Далее, раскладывая $\Psi_{11}''(x_0, \varepsilon)$ и $\Psi_{111}'''(x_0, \varepsilon)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_0, 0)$, получим:

$$\Psi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon) = \Psi_{11}''(x_0, 0) + \varepsilon\Psi_{112}'''(x_0, 0) + \\ + \varepsilon\Psi_{111}'''(x_0, 0)x_1 + \beta(\varepsilon), \qquad (8)$$

где $\beta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$.

Подставляя (8) в (7) получим

$$z = (\Psi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon\Phi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon))z + \frac{1}{2}\Psi_{11}''(x_0, 0)zz + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon(\Psi_{111}'''(x_0, 0)x_1 + \Psi_{112}'''(x_0, 0) + \Phi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon))zz + \\ + \frac{1}{6}(\Psi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon\Phi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon))zzz + W(\varepsilon, z),$$

где $\| W(\varepsilon, z) \| = o(\| z \|^3)$.

Введем новые обозначения:

$$V(\varepsilon) = \Psi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon\Phi_1'(x_\varepsilon, \varepsilon),$$
$$C_\Psi^2(z, z) = \frac{1}{2}\Psi_{11}''(x_0, 0)zz,$$
$$C^2(\varepsilon, z) = \frac{1}{2}(\Psi_{111}'''(x_0, 0)x_1 + \\ + \Psi_{112}'''(x_0, 0) + \Phi_{11}''(x_\varepsilon, \varepsilon))zz,$$
$$C_\Psi^3(\varepsilon, z) = \frac{1}{6}\Psi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon)zzz,$$
$$C_\Phi^3(\varepsilon, z) = \frac{1}{6}\Phi_{111}'''(x_\varepsilon, \varepsilon)zzz.$$

Имеем

$$z = V(\varepsilon)z + C_\Psi^2(z, z) + \varepsilon C^2(\varepsilon, z) + \\ + C_\Psi^3(\varepsilon, z) + \varepsilon C_\Phi^3(\varepsilon, z) + W(\varepsilon, z), \qquad (9)$$

где $V(\varepsilon)$ — сильно непрерывный по ε линейный оператор, $C_\Psi^2(z, z)$ и $C^2(\varepsilon, z)$ — однородные по z операторы второго порядка, $C_\Psi^3(\varepsilon, z)$ и $C_\Phi^3(\varepsilon, z)$ — однородные по z операторы третьего порядка, $\| W(\varepsilon, z) \| = o(\| z \|^3)$.

Заметим, что из Теоремы 1.5.9 (см. [1]) следует, что операторы $V(\varepsilon)z, C^2(\varepsilon, z), C_\Psi^3(\varepsilon, z)$, $C_\Phi^3(\varepsilon, z)$ — уплотняющие по совокупности переменных ε и z относительно меры некомпактности Хаусдорфа с константой $q < 1$, оператор $C_\Psi^2(z, z)$ уплотняет относительно меры некомпактности Хаусдорфа с константой $q < 1$.

Предположим, что 1 является простым собственным значением оператора $V(0)$. Положим, что оператор $V(\varepsilon)$ при близких к 0, но не равных 0 значениях ε не имеет собственных значений, равных 1.

Обозначим через $\mu(\varepsilon)$ простое собственное значение оператора $V(\varepsilon)$, непрерывно зависящее от ε и обращающееся в 1 при $\varepsilon = 0$. В силу п.п. 2.7.3 и 2.7.14 из [1] такое $\mu(\varepsilon)$ существует и единственно при достаточно малых ε.

Будем предполагать, что $\mu(\varepsilon)$ представимо в виде

$$\mu(\varepsilon) = 1 + \frac{1}{2}\mu''(0)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \qquad (10)$$

Такое представление $\mu(\varepsilon)$ связано с работой [4] В.С. Луда для дифференциальных уравнений.

Пусть e_0 — нормированный собственный вектор оператора $V(0)$, соответствующий собственному значению, равному 1, а g_0 — собственный вектор оператора $V^*(0)$, сопряженного оператору $V(0)$, соответствующий собственному значению 1 и нормированный условием

$$(e_0, g_0) = 1. \qquad (11)$$

Будем также предполагать, что e_ε и g_ε представимы в виде

$$e_\varepsilon = e_0 + \varepsilon e_1 + o(\varepsilon), \\ g_\varepsilon = g_0 + \varepsilon g_1 + o(\varepsilon). \qquad (12)$$

Возможность такого представления для e_ε и g_ε вытекает из результатов Г.М. Вайникко (см. [5]).

В дальнейших построениях основную роль будут играть числа:

$$\xi = (C^2(0, e_0), g_0), \\ \xi_\Psi = (C_\Psi^3(0, e_0), g_0), \\ \xi_0^1 = (C_\Psi^2(e_0, e_0), g_1).$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема (Обобщение теоремы М. А. Красносельского). *Пусть нелинейный уплотняющий по совокупности переменных ε и z относительно меры некомпактности Хаусдорфа с константой $q<1$ оператор $U(\varepsilon)z$ допускает представление*

$$U(\varepsilon)z = V(\varepsilon)z + C_\Psi^2(z,z) + \varepsilon C^2(\varepsilon,z) + \\ + C_\Psi^3(\varepsilon,z) + \varepsilon C_\Phi^3(\varepsilon,z) + W(\varepsilon,z), \tag{13}$$

где $V(\varepsilon)$ — сильно непрерывный по ε линейный оператор, $C_\Psi^2(z,z)$ и $C^2(\varepsilon,z)$ — однородные по z операторы второго порядка, $C_\Psi^3(\varepsilon,z)$ и $C_\Phi^3(\varepsilon,z)$ — однородные по z операторы третьего порядка, $W(\varepsilon,z) = o(\| z \|^3)$.

Пусть 1 — простое собственное значение оператора $V(0)$, которому соответствует нормированный вектор e_0. Пусть 1 не является собственным значением операторов $V(\varepsilon)$ при близких к 0 и отличных от 0 значениях ε. Пусть g_0 — собственный вектор сопряженного оператора $V^*(0)$, удовлетворяющий условию (11).

Пусть выполнено условие

$$C_\Psi^2(e_0,\nu) \in PE \ \text{для любых} \ \nu \in E,$$

где P — проектор Рисса оператора $V(0)$, отвечающий единичному собственному значению. Пусть числа ξ, ξ_Ψ, ξ_0^1 отличны от нуля. Пусть оператор $V^*(\varepsilon)z$ уплотняет по совокупности переменных ε и z относительно меры некомпактности Хаусдорфа с константой $q<1$.

Тогда можно указать такие положительные числа r_0 и δ_0, что справедливы следующие утверждения:

1^0. При $\varepsilon = 0$ уравнение

$$z = U(0)z \tag{14}$$

не имеет в шаре $\| z \| < r_0$ ненулевых решений.

2^0. Если $\xi_\Psi > 0$, то

(a) уравнение (14) имеет в шаре $\|z\| < r_0$ ровно два непрерывно зависящих от ε ненулевых решения $z_1(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$, если $\mu''(0) \in \left(-\infty, \frac{(\xi+\xi_0^1)^2}{2\xi_\Psi}\right)$;

решения удовлетворяют условиям:

$$sign(z_1(\varepsilon), g_0) = sign(z_2(\varepsilon), g_0) = \\ = -sign(\xi + \xi_0^1) \tag{15}$$

если $\mu''(0) \in \left(0, \frac{(\xi+\xi_0^1)^2}{2\xi_\Psi}\right)$;

$$sign\ (z_1(\varepsilon), g_0) = -sign\ (z_2(\varepsilon), g_0) \tag{16}$$

если $\mu''(0) \in (-\infty, 0)$;

(b) уравнение (14) не имеет ненулевых решений в шаре $\|z\| < r_0$, если $\mu''(0) \in \left(\frac{(\xi+\xi_0^1)^2}{2\xi_\Psi}, \infty\right)$.

3^0. Если $\xi_\Psi < 0$, то

(a) уравнение (14) имеет в шаре $\|z\| < r_0$ ровно два непрерывно зависящих от ε ненулевых решения $z_1(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$, если $\mu''(0) \in \left(\frac{(\xi+\xi_0^1)^2}{2\xi_\Psi}, \infty\right)$;

решения удовлетворяют условиям:

$$sign(z_1(\varepsilon), g_0) = sign(z_2(\varepsilon), g_0) = sign(\xi + \xi_0^1), \tag{17}$$

если $\mu''(0) \in \left(\frac{(\xi+\xi_0^1)^2}{2\xi_\Psi}, 0\right)$;

$$sign(z_1(\varepsilon), g_0) = -sign(z_2(\varepsilon), g_0), \tag{18}$$

если $\mu''(0) \in (0, \infty)$;

(b) уравнение (14) не имеет ненулевых решений в шаре $\|z\| < r_0$, если $\mu''(0) \in \left(-\infty, \frac{(\xi+\xi_0^1)^2}{2\xi_\Psi}\right)$.

Пример, иллюстрирующий данный результат, приведен в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akhmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N.* Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1992.

2. *Лысакова Ю.В.* К теореме М.А. Красносельского о бифуркации // Вестник ВГУ, 2008. — № 2. — С. 129—132.

3. *Каменский М.И.* Об исследовании устойчивости периодических решений для нового класса систем квазилинейных уравнений в банаховом пространстве // Доклады академии наук, 1997. — Т. 353, № 1 — С. 13—16.

4. *Loud W.S.* Periodic Solutions of a perturbed autonomous system // Annals of mathematics, 1959. — Vol.70, № 3 — P. 490—529.

5. *Вайникко Г.М.* Об аппроксимации линейных и нелинейных операторов и приближенном решении операторных уравнений : диссертация...докт физ.-мат. наук:002/Г.М. Вайникко // Тарту. гос. ун-т. — Тарту : Б.и., 1968.

6. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1966.

Лысакова Юлия Валерьевна, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, тел.: +7 903 6507097, e-mail: juli06@mail.ru.

Lysakova Yulia Valerievna, post graduate student of mathematical department, Voronezh State University, tel. +7 903 6507097, e-mail: juli06@mail.ru.