УДК 517.9

О СХОДИМОСТИ ТРАЕКТОРНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРОВ АППРОКСИМАЦИЙ АВТОНОМНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА

С. К. Кондратьев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию: 10.03.2009 г.

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование траекторных и глобальных аттракторов аппроксимаций автономной трехмерной системы Навье—Стокса и доказывается сходимость траекторных и глобальных аттракторов аппроксимации соответственно к траекторному и глобальному аттракторам системы Навье—Стокса в смысле полуотклонений в некоторых метрических пространствах.

Ключевые слова: система Навье—Стокса, топологическая аппроксимация, траекторный аттрактор, глобальный аттрактор, сходимость аттракторов.

Abstract. In the present paper the existence of trajectory and global attractors of approximations of the autonomous three-dimensional Navier—Stokes equations is stated as well as their convergence to the trajectory and the global attractors of the Navier—Stokes equations, respectively, in the sence of Hausdorff distance in certain metric spaces.

Keywords: Navier—Stokes equations, topological approximation, trajectory attractor, global attractor, convergence of attractors.

ВВЕДЕНИЕ

Двумерная система Навье—Стокса — это одна из первых задач математической физики, для которых понятия конечномерных динамических систем были перенесены на бесконечномерный случай.

Поскольку в тех функциональных пространствах, где имеется решение трехмерной системы Навье—Стокса, не установлена его единственность, то нельзя построить соответствующую динамическую систему. Однако в статьях [1], [2] был предложен другой подход к определению глобального аттрактора как множества в фазовом пространстве, притягивающего сечения ограниченных множеств *функций*, принадлежащих фиксированному *пространству траекторий*. В этом случае для доказательства существования глобального аттрактора используется понятие *траекторного аттрактора*, состоящего из *функций* и обладающего определенными притягивающими свойствами.

В работе [1] в качестве пространства траекторий для трехмерной системы Навье—Стокса берется множество ее слабых решений, удовлетворяющих определенному энергетическому неравенству, инвариантному относительно сдвигов по времени. Методом Галеркина доказывается существование таких решений. Изучаются некоторые свойства пространства траекторий, и в частности доказывается существование траекторного аттрактора, следствием чего является существование глобального аттрактора. В настоящей работе тот же метод применен для исследования траекторных и глобальных аттракторов системы, аппроксимирующей систему Навье—Стокса. Кроме того, установлена сходимость траекторных и глобальных аттракторов аппроксимаций к соответствующим аттракторам системы Навье—Стокса.

В п. 1 приводятся формулировки основных определений и результатов теории траекторных аттракторов.

В п. 2 без доказательства приводятся результаты, касающиеся аттракторов системы Навье—Стокса. Они не только будут использованы в дальнейшем, но и являются моделью, по которой изучается аппроксимирующая система.

В п. 3 рассматривается аппроксимирующая система, формулируется теорема о существовании ее решений.

В п. 4 устанавливается ряд необходимых неравенств.

В п. 5 вводится пространство траекторий для аппроксимирующей системы, устанавливаются некоторые его свойства. Также устанавливается возможность применения аппроксимационно-топологического метода для доказательства непустоты пространства траекторий системы Навье—Стокса. Доказывается существование траекторного и глобального аттракторов аппроксимации.

В п. 6 исследуется сходимость аттракторов аппроксимации к аттракторам системы Навье—Стокса.

1. ТРАЕКТОРНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Приведем важнейшие определения и результаты теории траекторных аттракторов (см. [2], [1]), а прежде опишем используемые пространства и обозначения.

Пусть E, E_0 — банаховы пространства, $E \subset E_0$ (вложение непрерывно); также считаем, что пространство E рефлексивно.

Банахово пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ состоит из функций, существенно ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в пространстве E, и норма в этом пространстве определяется обычным образом:

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;E)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\geq 0}\|u(t)\|_E .$$

Линейное пространство $C(\mathbb{R}_+;E_0)$ состоит из непрерывных на полуоси $\mathbb{R}_+$ функций, принимающих значения в в пространстве E_0. Сходимость в этом пространстве определяется как равномерная сходимость на каждом отрезке $[0,M]$, $M>0$. Топология, описанная с помощью такой сходимости, может быть задана метрикой

$$\|u-v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\frac{\|u-v\|_{C([0,k];E_0)}}{1+\|u-v\|_{C([0,k];E_0)}}$$

Эта метрика инвариантна относительно сдвигов, но функционал $\|\cdot\|_{C([0,k];E_0)}$ не является нормой, так как он не однородный.

Особенно нас будут интересовать функции класса $C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$. Можно показать (см. [2]), что такие функции принадлежат пространству $C_w(\mathbb{R}_+;E)$ функций, слабо непрерывных на $\mathbb{R}_+$ со значениями в E. В частности, отсюда следует, что для любой функции $u\in C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ значения $u(t)$ принадлежат пространству E при *всех* $t\in\mathbb{R}_+$.

Аналогичным образом определяются пространства $L_\infty(\mathbb{R};E)$, $C(\mathbb{R};E_0)$, отличающиеся от рассмотренных тем, что образующие их функции определены на всей числовой оси; в определении метрики пространства $C(\mathbb{R};E_0)$ используются величины $\|u-v\|_{C([-k,k];E_0)}$.

Рассмотрим *операторы сдвигов* $T(h)$, каждый из которых функции f ставит в соответсвие функцию $T(h)f$, такую что

$$T(h)f(t) = f(t+h).$$

При $h\geqslant 0$ операторы $T(h)$ являются линейными ограниченными на $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ и линейными непрерывными на $C(\mathbb{R}_+;E_0)$, а при произвольных $h\in\mathbb{R}$ — линейными ограниченными или непрерывными соответственно на $L_\infty(\mathbb{R};E)$ и $C(\mathbb{R};E_0)$. Легко видеть, что имеет место тождество $T(h_1)T(h_2)=T(h_1+h_2)$, а также что $T(0)$ — тождественный оператор; это позволяет говорить, что семейство $\{T(h): h\geqslant 0\}$ является полугруппой, которая называется *полугруппой трансляций*.

Ограничение на $\mathbb{R}_+$ функции f, определенной на $\mathbb{R}$, будем обозначать $\Pi_+ f$, а ограничение на отрезок $[0,M]$ функции f, определенной на $\mathbb{R}_+$, будем обозначать $\Pi_M f$.

Пусть имеется некоторое автономное эволюционное уравнение вида

$$\partial_t u = A(u). \tag{1}$$

Рассмотрим некоторое семейство решений $\mathcal{H}^+$ этого уравнения, определенных на $\mathbb{R}_+$. Пока нет необходимости уточнять, в каком смысле функции из $\mathcal{H}^+$ являются решениями. Потребуем только, чтобы выполнялось включение $\mathcal{H}^+\subset C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$, где E, E_0 - надлежащим образом выбранные пространства, и чтобы множество $\mathcal{H}^+$ являлось *трансляционно инвариантным*, то есть

$$T(t)\mathcal{H}^+\subset\mathcal{H}^+ \text{ при } t\geq 0.$$

Множество $\mathcal{H}^+$ будем называть *пространством траекторий* уравнения (1), а его элементы — *траекториями*.

Определение 1. Множество $P\subset C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ называется *притягивающим* для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ уравнения (1) в топологии $C(\mathbb{R}_+;E_0)$, если для любого ограниченного (в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$) множества $B\subset\mathcal{H}^+$ и для любого числа $M\geqslant 0$ выполнено соотношение

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];E_0)}(\Pi_M T(t)B, \Pi_M P)\to 0 \ (t\to+\infty). \tag{2}$$

Замечание 1. Очевидно, условие притягивания (2) можно заменить эквивалентным

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{u\in B}\inf_{v\in P}\|T(u)-v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} = 0. \tag{2'}$$

Определение 2. Множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}^+$ называется траекторным аттрактором в пространстве траекторий $\mathcal{H}^+$ относительно топологии $C(\mathbb{R}_+; E_0)$, если

i) $\mathcal{U}$ компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;

ii) $\mathcal{U}$ строго инвариантно относительно $\{T(t)\}$, то есть

$$T(t)\mathcal{U} = \mathcal{U} \ \forall t \geq 0;$$

iii) $\mathcal{U}$ является притягивающим множеством в пространстве $\mathcal{H}^+$ в топологии $C(\mathbb{R}_+; E_0)$.

Замечание 2. Если траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ в $\mathcal{H}^+$ существует, то он, очевидно, единственный.

Теорема 1. *Пусть пространство траекторий $\mathcal{H}^+$ трансляционно инвариантно. Предположим, что существует притягивающее множество P для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ такое, что $P \subset \mathcal{H}^+$, причем P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. Тогда в пространстве $\mathcal{H}^+$ имеется траекторный аттрактор $\mathcal{U} \subset P$.*

Определение 3. Функция $u \in C(\mathbb{R}; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}; E)$ называется *полной траекторией* для пространства $\mathcal{H}^+$, если для любого $h \in \mathbb{R}$ имеем

$$\Pi_+ T(h)u \in \mathcal{H}^+.$$

Множество полных траекторий называется ядром $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$ пространства $\mathcal{H}^+$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K}(\mathcal{H}^+).$$

При этом ядро $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$ компактно в $C(\mathbb{R}; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}; E)$.

Для каждого множества функций $B \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ определим его сечение $B(t) \subset E$ в момент времени $t \geqslant 0$:

$$B(t) = \{u(t) : u \in B\}.$$

Определение 4. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется *глобальным аттрактором* (в E_0) для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если

i) $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E;

ii) для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества траекторий $B \subset \mathcal{H}^+$ выполнено свойство притяжения сечений $B(t)$ к $\mathcal{A}$ при $t \to +\infty$ по норме в E_0:

$$\mathrm{dist}_{E_0}(B(t), \mathcal{A}) \to 0 (t \to +\infty);$$

iii) $\mathcal{A}$ — минимальное множество, удовлетворяющее i) и ii), то есть $\mathcal{A}$ содержится в любом компактном в E_0 и ораниченном в E притягивающем множестве.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует глобальный аттрактор (в E_0) $\mathcal{A}$ для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, причем*

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(0) \equiv \mathcal{K}(\mathcal{H}^+)(0),$$

где $\mathcal{U}$ — траекторный аттрактор, а $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$ — ядро траекторного пространства $\mathcal{H}^+$.

Замечание 3. Легко видеть, что $\mathcal{A} = \mathcal{U}(\tau)$ для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ есть объединение всех значений всех траекторий, принадлежащих траекторному аттрактору.

2. ТРАЕКТОРНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОРЫ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА

Система уравнений Навье—Стокса имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \mathrm{grad} p = f, \ x \in \Omega; \quad (3)$$

$$\mathrm{div} v = 0, \ x \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь Ω — ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^3$, которую будем считать локально-липшицевой, $f = f(x,t) = (f_1, f_2, f_3)$ — плотность внешних сил, $v = v(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$, $p = p(x,t) = (p_1, p_2, p_3)$ — неизвестные функции (скорость и давление). В дальнейшем будем рассматривать только автономную систему Навье—Стокса, то есть будем считать, что плотность внешних сил f не зависит от времени.

В качестве краевого будем рассматривать условие прилипания:

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

а также снабдим задачу начальным условием

$$v|_{t=0} = v_0. \quad (6)$$

Опишем используемые функциональные пространства. Пространство H является замыканием в $(L_2(\Omega))^3$ множества $\mathcal{V}$ бесконечно дифференцируемых соленоидальных векторных полей, носители которых лежат в Ω; пространство V — замыкание множества $\mathcal{V}$ в пространстве $(H^1(\Omega))^3$. Пространство H гильбертово, скалярное произведение в нем индуцируется из $(L_2(\Omega))^3$ и в обоих пространствах задается формулой

$$(u, v) = (\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega u_i(x) v_i(x) dx)^{1/2},$$

норма же в H равна

$$\|u\|_H = (\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |u_i(x)|^2\, dx)^{1/2}.$$

Норма в пространстве V определяется следующим образом:

$$\|u\|_V = (\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |\nabla u_i(x)|^2\, dx)^{1/2}.$$

Норма $\|\cdot\|_V$ и норма, индуцированная из $(H^1(\Omega)^3)$, эквивалентны.

Пространство, сопряженное к V, будем обозначать V^*. Гильбертово пространство H отождествляется со своим сопряженным. С учетом этого имеют место плотные вложения $V \subset H \subset V^*$.

Шкалу пространств, отвечающих гильбертовому пространству H, обозначим H^σ, $\sigma \in \mathbb{R}$. Отметим, что при $0 < \delta \leqslant 1$ имеет место компактное вложение $H \Subset H^{-\delta}$.

Исключив давление, задачу (3), (4), (5) можно записать в операторном виде

$$v' + \nu Av - K(v) = f, \qquad (7)$$

где операторы $A: V \to V^*$, $K: V \to V^*$ определяются формулами

$$\langle Av, u\rangle = ((v,u))\ (u, v \in V),$$

$$\langle K(v), u\rangle = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega v_i v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx\ (u, v \in V).$$

Функция $v \in L_2(0,M;V)$ называется *слабым решением* системы Навье—Стокса, если производная v' в смысле распределений на $[0,M]$ со значениями в V^* принадлежит пространству $L_1(0,M;V^*)$, и равенство (7) выполняется для почти всех значений $t \in (0,M)$.

Можно показать, что всякое слабое решение является слабо непрерывной функцией со значениями в H, поэтому для $v_0 \in H$ имеет смысл начальное условие (6).

Следуя [2], приведем основные результаты, касающиеся аттрактора системы Навье—Стокса. Методом Галеркина доказывается следующая теорема:

Теорема 4. *Для произвольных $M > 0$, $f \in V^*$, $v_0 \in H$ задача (7), (6) имеет по крайней мере одно слабое решение v на отрезке $[0,M]$, причем $v \in L_\infty(0,M;H)$, и v удовлетворяет энергетическому неравенству:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 + \nu\|v(t)\|_V^2 \leqslant \langle v(t), f\rangle. \qquad (8)$$

Это неравенство следует понимать так: для любой функции $\psi \in C^\infty[0,M]$, носитель которой содержится в интервале $(0,M)$, и которая принимает *только неотрицательные значения*, выполнено неравенство

$$-\frac{1}{2}\int_\infty^\infty \|v(s)\|_H^2\, \psi'(s)ds + \nu\int_\infty^\infty \|v(s)\|_V^2\, \psi(s)ds \le$$

$$\le \int_\infty^\infty \langle v(s), f\rangle \psi(s)ds.$$

Для определения пространства траекторий рассматриваются пространства $E = H$ и $E_0 = H^{-\delta}$. Инвариантная оценка (8) позволяет построить инвариантное пространство траекторий.

Определение 5. Пространство траекторий $\mathcal{H}^+$ уравнения (7) состоит из функций $u \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$, таких что при любом $M > 0$ функция $\Pi_M u$ является слабым решением уравнения (7) на отрезке $[0,M]$, которое удовлетворяет энергетическому неравенству (8).

Можно показать, что включение $\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+;E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ действительно имеет место, а также что для любой функции $v_0 \in H$ существует траектория $v \in \mathcal{H}^+$, такая что $v(0) = v_0$.

Основной результат о существовании траекторного и глобального аттракторов для системы Навье—Стокса содержится в следующей теореме и ее следствии.

Теорема 5. *Система уравнений Навье—Стокса имеет траекторный аттрактор $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}^+$. При этом*

$$\mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K}(\mathcal{H}^+).$$

Множество $\mathcal{U}$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ и компактно в $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$, а множество $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R};H)$ и компактно в $C(\mathbb{R};H^{-\delta})$.

Следствие 1. *Множество*

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(0) = \mathcal{K}(\mathcal{H}^+)(0)$$

является глобальным аттрактором системы (7) в пространстве $H^{-\delta}$.

В доказательстве теоремы 5 важную роль играют два утверждения.

Лемма 15. *Для любой функции $u \in \mathcal{H}^+$ выполнено следующее неравенство:*

$$\|T(t)u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} + \|T(t)u\|_{L_2(0,1;V)} +$$

$$+\|T(t)u\|_{L_{4/3}(0,1;V^*)} \le C\|u\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\alpha t} + \qquad (9)$$

$$+R_0\ \ \forall t \ge 0,$$

где $C > 0$, $R_0 > 0$, $\alpha > 0$; C, α и R_0 не зависят от u.

Лемма 1. *Пусть дана последовательность* $\{u_n\}$, *ограниченная в* $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$. *Предположим, что для некоторой функции* $u^* \in C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$ *имеет место предельное соотношение*

$$u_n \to u^* \ (n \to \infty) \text{ в } C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta}).$$

Тогда $u^* \in \mathcal{H}^+$.

В дальнейшем мы докажем аналогичные утверждения для аппроксимации системы Навье—Стокса.

3. АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА

Конвективный член $\sum_{i=1}^3 u_i \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$ в системе уравнений Навье-Стокса можно заменить выражением $\sum_{i=1}^3 \dfrac{v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}}{1+\varepsilon\,|\,v\,|^2}$, где ε — некоторый положительный параметр ($|\,v\,|$ — евклидова норма). Тогда аппроксимация системы Навье—Стокса вместе с краевым условием запишется в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^3 \frac{u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}}{1+\varepsilon\,|\,v\,|^2} + \operatorname{grad} p = f,\ \ x \in \Omega$$
$$\operatorname{div} v = 0,\ \ x \in \Omega,$$
$$v\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для этой системы операторное уравнение в $L_2(0,M;V^*)$ имеет вид:

$$v' + \nu A v - K_\varepsilon(v) = f, \qquad (10)$$

где оператор $K_\varepsilon : V \to V^*$ определяется формулой

$$\langle K_\varepsilon(v), u\rangle = \sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega \frac{v_i v_j}{1+\varepsilon\,|\,v\,|^2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dx\ \ (u,v \in V).$$

Пусть M — некоторое положительное число. Рассмотрим пространство W, состоящее из функций $v \in L_2(0,M;V)$, таких что $v' \in L_2(0,M;V^*)$ (производная понимается в смысле распределений со значениями в V^*). Отметим, что имеет место вложение $W \subset C([0,M];H)$.

С помощью теории степени Лере—Шаудера доказана следующая теорема (см. [3]).

Теорема 6. *Пусть* $\varepsilon > 0$, $M > 0$. *Тогда для произвольных* $f \in V^*$, $v_0 \in H$ *существует решение* $v \in W$ *уравнения* (10), *удовлетворяющее начальному условию* $v(0) = v_0$.

Замечание 4. Теорема сформулирована для интересующего нас автономного случая, но остается справедливой, если правая часть уравнения принадлежит пространству $L_2(0,M;V^*)$.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Настоящий пункт содержит ряд утверждений технического характера, которые позволят доказать существование аттрактора уравнения (10).

Пусть $M > 0$, и $v \in W$ — решение уравнения (10) на отрезке $[0,M]$. Получим некоторые оценки функции v. Так как рассматриваемое решение принадлежит пространству W, то $\dfrac{d}{dt}\|\,v\,\|_H^2 \in L_1(0,T)$, и почти всюду имеет место равенство

$$\langle v'(t), v(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v(t)\right\|_H^2$$

(см. [3]). Применив обе части уравнения (10) к функции v и учитывая, что

$$\langle Av(t), v(t)\rangle = \left\|v\right\|_V,\ \ \langle K_\varepsilon(v(t)), v(t)\rangle = 0$$

(по поводу последнего тождества см. [3]), получаем тождество

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v(t)\right\|_H^2 + \nu\left\|v(t)\right\|_V^2 = \langle f, v(t)\rangle, \qquad (11)$$
$$\text{при п.в. } t \in [0,M].$$

Оценим правую часть с помощью неравенства Юнга:

$$\langle f, v(t)\rangle \leqslant \left\|f\right\|_{V^*}\left\|v(t)\right\|_V \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}\left\|f\right\|_{V^*}^2 + \nu\,\|\,v(t)\,\|_V^2\right).$$

Отсюда получаем оценку

$$\frac{d}{dt}\left\|v(t)\right\|_H^2 + \nu\left\|v(t)\right\|_V^2 \leqslant \frac{1}{\nu}\,\|\,f\,\|_{V^*}^2, \qquad (12)$$
$$\text{при п.в. } t \in [0,M].$$

Заменив здесь t на s и проинтегрировав полученное неравенство по s от τ до t, где $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant M$, получаем неравенство

$$\left\|v(t)\right\|_H^2 - \left\|v(\tau)\right\|_H^2 + \nu\int_\tau^t \left\|v(s)\right\|_V^2 ds \leqslant \frac{1}{\nu}\left\|f\right\|_{V^*}^2 (t-\tau). \qquad (13)$$

Пусть λ_1 — наименьшее собственное значение оператора A, тогда имеет место неравенство

$$\left\|v\right\|_V^2 \geqslant \lambda_1\left\|v\right\|_H^2. \qquad (14)$$

Обозначим $\alpha = \nu\lambda_1$, и перепишем неравенство (13) в виде

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 + \alpha\|v(t)\|_V^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}^2 - \nu\left(\|v(t)\|_V^2 - \lambda_1\|v(t)\|_H^2\right).$$

Применив к получившемуся неравенству лемму Гронуолла, получаем неравенство

$$\|v(t)\|_H^2 e^{\alpha t} - \|v(\tau)\|_H^2 e^{\alpha\tau} +$$
$$+\nu\int_\tau^t \left(\|v(s)\|_V^2 - \lambda_1\|v(s)\|_H^2\right)e^{\alpha s}ds \leqslant \qquad (15)$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha\nu}\|f\|_{V^*}^2\left(e^{\alpha t} - e^{\alpha\tau}\right).$$

Сформулируем аналог леммы 1 для аппроксимирующей системы.

Теорема 7. *Пусть* $M \geqslant 2$, $v \in W$ *— решение уравнения (10) на отрезке* $[0,M]$. *Тогда для любого* $t \in [1, M-1]$ *имеет место неравенство*

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v\|_{L_2(t,t+1,V)} +$$
$$+\|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \le C\|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\alpha t} + R_0, \qquad (16)$$

где константы $C > 0$, $R_0 > 0$, $\alpha > 0$ не зависят от t, v, M, ε.

Замечание 5. Так как постоянные C, R_0, α не зависят от ε, то можно считать, что они имеют те же значения, что и в неравенстве (9), что и будем впредь считать выполненным.

Для доказательства этой теоремы оценим каждое из трех слагаемых в левой части неравенства (16)

Лемма 3. *Пусть* $M \geqslant 1$ *и* $v \in W$ *— решение уравнения* (10) *на отрезке* $[0,M]$. *Тогда при всех* $t \in [1,M]$ *имеет место неравенство*

$$\|v\|_{L_\infty(t,T;H)}^2 \leqslant \|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\alpha t} + R_1, \qquad (17)$$

где константа R_1 *не зависит от* t, v, M, ε.

Доказательство. Пусть $t \in [1,M]$. Выберем произвольные числа $\tau \in [0,1]$, $s \in [t,M]$, тогда $\tau \leqslant s$, и, следовательно, выполняется неравенство (15) с t, замененным на s. Отбросив третье слагаемое в левой части (неотрицательное в силу неравенства (14)) и умножив обе части на $e^{-\alpha s}$, получаем

$$\|v(s)\|_H^2 \leqslant \|v(\tau)\|_H^2 e^{-\alpha(s-\tau)} + \frac{1}{\alpha\nu}\|f\|_{V^*}^2.$$

Так как функция $s \mapsto \|v(s)\|_H^2$ непрерывна, то отсюда

$$\|v(s)\|_H^2 \leqslant \|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\alpha(t-\tau)} + \frac{1}{\alpha\nu}\|f\|_{V^*}^2.$$

Устремив в полученном неравенстве $\tau \to 0$, а затем перейдя к максимуму по $s \in [t,M]$, получаем требуемое неравенство с $R_1 = \dfrac{1}{\alpha\nu}\|f\|_{V^*}^2$. ■

Лемма 4. *Пусть* $M \geqslant 2$, $v \in W$ *— решение уравнения (10) на отрезке* $[0,M]$. *Тогда для любого* $t \in [1, M-1]$ *имеет место неравенство*

$$\int_t^{t+1}\|v(s)\|_V^2 ds \leqslant \frac{1+\alpha}{\nu}\|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\alpha t} + R_2 \qquad (18)$$

с константой $R_2 > 0$, не зависящей от t, v, M, ε.

Доказательство. Выполнены условия леммы 3. Из оценки (17) следует, что при $s \in [t, t+1]$ имеет место неравенство

$$\|v(s)\|_H^2 \leqslant \|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\alpha t} + R_1.$$

Умножив обе его части на $\alpha e^{\alpha s}$ и проинтегрировав по s от t до $t+1$, получаем

$$\alpha\int_t^{t+1}\|v(s)\|_H^2 e^{\alpha s}ds \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 \int_t^{t+1} e^{-\alpha(t-s)}ds + R_1(e^\alpha - 1)e^{\alpha t};$$

$$\alpha\int_t^{t+1}\|v(s)\|_H^2 e^{\alpha s}ds \leqslant \alpha\|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 + R_1(e^\alpha - 1)e^{\alpha t}. \quad (19)$$

Из неравенства (15) получаем

$$\nu\int_t^{t+1}\|v(s)\|_V^2 e^{\alpha s}ds \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\int_t^{t+1}\|v(s)\|_H^2 e^{\alpha s}ds + \|v(t)\|_H^2 e^{\alpha t} + R_1\left(e^{\alpha(t+1)} - e^{\alpha t}\right).$$

Оценив первый интеграл в правой части с помощью неравенства (19), приходим к неравенству

$$\nu\int_t^{t+1}\|v(s)\|_V^2 e^{\alpha s}ds \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha+1)\|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 + R_1 e^{\alpha t}(2e^\alpha - 1).$$

Отсюда

$$\int_t^{t+1}\|v(s)\|_V^2 ds \leqslant e^{-\alpha e}\int_t^{t+1}\|v(s)\|_V^2 e^{\alpha s}ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+\alpha}{\nu}\|v\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 e^{-\alpha t} + R_1\cdot\frac{2e^\alpha - 1}{\nu}.$$

Обозначив $R_2 = R_1\cdot\dfrac{2e^\alpha - 1}{\nu}$, получаем требуемое неравенство. ■

Лемма 5. *Пусть $M \geqslant 1$, $v \in W$ — решение уравнения (10) на отрезке $[0, M]$. Тогда для любого $t \in [0, M-1]$ имеет место неравенство*

$$\|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leqslant C_1 \|v\|^2_{L_\infty(0,1;H)} e^{-\alpha t} + R_3 \quad (20)$$

с константами $C_1 > 0$, $R_3 > 0$, не зависящими от t, v, T.

Доказательство. Воспользуемся известным неравенством

$$\|K(u)\|_{V^*} \leqslant c\|u\|_H^{1/2} \|u\|_V^{3/2} \quad \forall u \in V.$$

(см. [2]). Очевидно, что $\|K_\varepsilon(u)\|_{V^*} \leqslant \|K(u)\|_{V^*}$, поэтому с помощью неравенств (17), (18) получаем

$$\left(\int_t^{t+1} \|K_\varepsilon(v(s))\|_{V^*}^{4/3} ds\right)^{3/4} \leqslant c\left(\int_t^{t+1} \|v(s)\|_H^{2/3} \|v(s)\|_V^2 ds\right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\max_{s\in[t,t+1]} \|v(s)\|_H^2\right)^{1/4} \left(\int_t^{t+1} \|v(s)\|_V^2 ds\right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\|v\|^2_{L_\infty(0,1;H)} e^{-\alpha t} + R_1\right)^{1/4} \left(\frac{1+\alpha}{\nu} \|v\|^2_{L_\infty(0,1;H)} e^{-\alpha t} + R_2\right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant C' \|v\|^2_{L_\infty(0,1;H)} e^{-\alpha t} + R'.$$

С помощью этой оценки получаем:

$$\|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leqslant \nu\left(\int_t^{t+1} \|Av(s)\|_{V^*}^{4/3} ds\right)^{3/4} +$$

$$+\left(\int_t^{t+1} \|K_\varepsilon v(s)\|_{V^*}^{4/3} ds\right)^{3/4} + \left(\int_t^{t+1} \|f\|_{V^*}^{4/3} ds\right)^{3/4} \leqslant$$

$$\leqslant \nu\left(\int_t^{t+1} \|v(s)\|_V^2 ds\right)^{1/2} + \left(\int_t^{t+1} \|K_\varepsilon v(s)\|_{V^*}^{4/3} ds\right)^{3/4} +$$

$$+\left(\int_t^{t+1} \|f\|_{V^*}^{4/3} ds\right)^{3/4} \leqslant \nu\left(\frac{1+\alpha}{\nu} \|v\|^2_{L_\infty()0,1;H} e^{-\alpha t} + R_2\right)^{1/2} +$$

$$+C' \|v\|^2_{L_\infty()0,1;H} e^{-\alpha t} + R' + \|f\|_{V^*}.$$

Отсюда следует требуемая оценка. ■

Замечание 6. Аналогичное неравенство можно было бы получить и для нормы производной в пространстве $L_2(0,T;V^*)$, но такая оценка нам не понадобится.

Теорема 7 следует из лемм 3, 4, 5.

Сформулируем еще одну лемму.

Лемма 6. *Пусть $M \geqslant 1$, и $P \subset W$ — семейство решений уравнения (10) для разных, вообще говоря, значений параметра ε. Тогда множества $\{\|v(0)\|_H : v \in\in P\}$ и $\{\|v\|_{L_\infty(0,1;H)} : v \in P\}$ ограничены одновременно.*

Доказательство. Так как решения уравнения (10) принадлежат пространству $C([0, M]; H)$, то очевидно, что из ограниченности множества $\{\|v\|_{L_\infty(0,1;H)} : v \in P\}$ следует ограниченность множества $\{\|v(0)\|_H : v \in P\}$. Из неравенства (13) при $\tau = 0$ следует, что

$$\|v(t)\|_H^2 \leqslant \|v(0)\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}^2 t.$$

Это неравенство показывает, что ограниченность множества $\{\|v(0)\|_H : v \in P\}$ влечет ограниченность множества $\{\|v\|_{L_\infty(0,1;H)} : v \in P\}$.

5. ТРАЕКТОРНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОРЫ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Определение 6. *Пространство траекторий* $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ уравнения (10) состоит из функций $u \in C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, таких что при любом $M > 0$ функция $\Pi_M u$ является решением уравнения (10) на отрезке $[0, M]$.

Для траекторий из теоремы 7 получаем следствие:

Следствие 2. *Для любой функции $v \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ при любом $t \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\|T(t)v\|_{L_\infty(0,1;H)} + \|T(t)v\|_{L_2(0,1),V} + \|T(t)v'\|_{L_{4/3}(0,1;V^*)} \leqslant \\ \leqslant C\|v\|^2_{L_\infty(0,1;H)} e^{-\alpha t} + R_0, \quad (21)$$

Замечание 7. Включение $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \subset C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ имеет место. Действительно, функции из W непрерывны со значениями в H, поэтому включение $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \subset C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$ очевидно; включение $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \subset L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ следует из леммы 25 и оценки (21).

Замечание 8. Так как рассматривается автономное уравнение, то ясно, что пространство траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ трансляционно инвариантно.

Далее нам будет нужна одна лемма о компактности.

Пусть E, Y — банаховы пространства, $E \subset Y$. Для $M > 0$ и $p > 1$ рассмотрим пространство $W_{\infty,p}(0, M, E, Y)$, состоящее из функций $\psi \in L_\infty(0, M; E)$, таких что $\psi' \in L_p(0, M; Y)$ (производная понимается в смысле распределений из пространства $D'(0, M; Y)$); норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|\psi\|_{W_{\infty,p}} = \operatorname{ess\,sup}\{\|\psi\|_E : s \in [0, M]\} + \left(\int_0^M \|\psi'(s)\|_Y^p ds\right)^{1/p}.$$

Лемма 7. *Предположим, что* $E \Subset E_0 \subset Y$. *Тогда следующее вложение компактно:*

$$W_{\infty,p}(0,M,E,Y) \Subset C([0,M];E_0).$$

Замечание 9. Легко видеть, что множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+;E_0)$ тогда и только тогда, когда множество $\Pi_M P$ компактно в $C([0,M];E_0)$ при каждом $M>0$. Это позволяет пользоваться леммой 7 для доказательста компактности множество в пространстве $C(\mathbb{R}_+;E_0)$.

Для дальнейшего исследования пространства траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ нам потребуется следующая лемма технического характера.

Лемма 8. *Пусть* $\{v_n\} \subset L_1(0,M;V^*)$, $v \in L_1(0,M;V^*)$, *и пусть*

$v_n(t,x) \to v(t,x)$ *при почти всех* $(x,t) \in \Omega \times [0,M]$.

Тогда

$$K_\varepsilon(v_{n_k}) \to K_\varepsilon(v) \text{ в } L_1(0,M;V^*).$$

Доказательство. Для произвольного $u \in V$ имеем

$$|\langle K_\varepsilon(v_n(t)),u\rangle - \langle K_\varepsilon(v(t)),u\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{v_i^{(n)}(t)(x) v_j^{(n)}(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v^{(n)}(t)(x)\,|^2} - \frac{v_i(t)(x) v_j(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v(t)(x)\,|^2} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{i,j=1}^3 \left(\int_\Omega \left| \frac{v_i^{(n)}(t)(x) v_j^{(n)}(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v^{(n)}(t)(x)\,|^2} - \frac{v_i(t)(x) v_j(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v(t)(x)\,|^2} \right| dx \right) \|u\|_V,$$

где c — постоянная, не зависящая только от области; отсюда

$$\|K_\varepsilon(v_n(t)) - K_\varepsilon(v(t))\|_{V^*} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{i,j=1}^3 \left(\int_\Omega \left| \frac{v_i^{(n)}(t)(x) v_j^{(n)}(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v^{(n)}(t)(x)\,|^2} - \frac{v_i(t)(x) v_j(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v(t)(x)\,|^2} \right| dx \right).$$

Далее,

$$\|K_\varepsilon(v_n) - K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,M;V^*)} =$$

$$= \int_0^M \|K_\varepsilon(v_n(t)) - K_\varepsilon(v(t))\|_{V^*}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^3 \int_0^M \int_\Omega \left| \frac{v_i^{(n)}(t)(x) v_j^{(n)}(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v^{(n)}(t)(x)\,|^2} - \frac{v_i(t)(x) v_j(t)(x)}{1+\varepsilon\,|\,v(t)(x)\,|^2} \right| dxdt$$

Очевидно, что подынтегральная функция ограничена и сходится к 0 при почти всех $(x,t) \in \Omega \times [0,M]$, поэтому по теореме Лебега

$$\|K_\varepsilon(v_n) - K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,M;V^*)} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

что и требовалось. ■

Замечание 10. Для любой функции $v_0 \in H$ существует траектория $v \in \mathcal{H}^+$, такая что $v(0)=v_0$. Действительно, пусть u_n — решение уравнения (10) на отрезке $[0,n]$ с начальным условием $u_n(0)=v_0$ ($n=1,2,\dots$), и пусть

$$\tilde{u}_n(t) = \begin{cases} u_n(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant n, \\ u_n(k) & \text{при } t \geqslant n. \end{cases}$$

Очевидно, члены последовательности $\{\tilde{u}_n\}$ принадлежат $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$, а из из леммы 6 следует, что эта последовательность $\|\tilde{u}^n\|_{L_\infty(0,1;V^*)}$ ограничена.

Заметим, что последовательность $\{\tilde{u}_n\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$. Действительно, из способа построения ее членов и оценки (16) следует, что для любого $M \geqslant 2$ последовательности $\{\|\tilde{u}_n\|_{L_\infty(0,M;H)}\}$ и $\{\|\tilde{u}'_n\|_{L_{4/3}(0,M;V^*)}\}$ ограничены, а тогда с помощью леммы 7 получаем, что последовательность $\{\Pi_M \tilde{u}_n\}$ относительно компактна в $C([0,M];H^{-\delta})$. В силу произвольности M отсюда следует относительная компактность последовательности $\{\tilde{u}_n\}$, которую поэтому без ограничения общности считаем сходящейся (в $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$) к некоторой функции v.

Пусть $M \geqslant 2$. Из оценки (16) следует, что без ограничения общности можно считать, что

$$\Pi_M \tilde{u}_n \to \Pi_M v \text{ слабо в } L_2(0,M;V);$$

$$\Pi_M \tilde{u}_n \to \Pi_M v \text{ сильно в } (L_2(\Omega \times [0,M]))^3;$$

$$\tilde{u}_n(s)(x) \to v(s)(x) \text{ при почти всех } (x,s) \in \Omega \times [0,M];$$

$$\Pi_M \tilde{u}'_n \to \Pi_M v' \text{ в смысле распределений.}$$

Из леммы 8 следует, что при сделанных предположениях

$$K_\varepsilon(\tilde{u}_n) \to K_\varepsilon(v) \text{ в } L_1(0,M;V^*).$$

и, следовательно, в смысле распределений. Линейный оператор A слабо непрерывен, поэтому также без ограничения общности считаем, что $A\Pi_M \tilde{u}_n \to A\Pi_M v$ слабо в $L_2(0,M;V)$ а, следовательно, и в смысле распределений. Переходя к пределу в смысле распределений в равенстве

$$\Pi_M \tilde{u}'_n + \nu A \Pi_M \tilde{u}_n - K_\varepsilon(\Pi_M \tilde{u}_n) = f,$$

убеждаемся, что $\Pi_M v$ — решение уравнения (10) на отрезке $[0,M]$. В силу произвольности M отсюда следует, что $v \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$.

При $t=0$ получаем сходимость $\tilde{u}_n(0) \to v(0)$ в $H^{-\delta}$. Но при всех n имеем $\tilde{u}_n(0)=u(0)=v_0$, поэтому $v(0)=v_0$. Таким образом, v — искомая траектория.

Докажем важное утверждение о замкнутости пространства траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$.

Лемма 9. *Пусть дана последовательность* $\{u_n\} \subset \mathcal{H}_\varepsilon^+$, *ограниченная в* $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$. *Пред-*

положим, что для некоторой функции $u^* \in C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$ имеет место предельное соотношение

$$u_n \to u^* \quad (n \to \infty) \text{ в } C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}).$$

Тогда $u^* \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$.

Доказательство. Зафиксируем число $M \geqslant 2$. Из оценки (16) следует, что без ограничения общности можно считать, что

$$u_n \to u^* \text{ слабо в } L_2(0, M; V);$$
$$u_n \to u^* \text{ сильно в } (L_2(\Omega \times [0, M]))^3;$$
$$u_n(s)(x) \to u^*(s)(x) \text{ при почти всех } (x, s) \in \Omega \times [0, M];$$
$$u_n' \to u^{*\prime} \text{ в смысле распределений.}$$

Из леммы 8 следует

$$K_\varepsilon(u_n) \to K_\varepsilon(u^*) \text{ в } L_1(0, M; V^*).$$

и, следовательно, в смысле распределений. В силу слабой непрерывности линейного оператора A без ограничения общности считаем, что $Au_n \to Au^*$ слабо в $L_2(0, M; V)$ а, следовательно, и в смысле распределений. Переходя к пределу в смысле распределений в равенстве

$$u_n' + \nu A u_n - K_\varepsilon(u_n) = f,$$

убеждаемся, что u^* — решение уравнения (10) на отрезке $[0, M]$. В силу произвольности M отсюда следует, что $u^* \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$. ■

Теперь можно перейти к доказательству существования аттрактора уравнения (10). Рассмотрим множество

$$P_0 = \{u \in C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H) :$$
$$\operatorname*{ess\,sup}_{h \geqslant 0} \{\|u\|_{L_\infty(h, h+1; H)} + \|u'\|_{L_{4/3}(h, h+1; V^*)}\} \leqslant 2R_0\}$$

Очевидно, что множество P_0 ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Также оно относительно компакнто в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$. Это вытекает из того, что при любом $M > 0$ множество $\Pi_M P_0$ относительно компактно в $C([0, M]; H^{-\delta})$ (что следует из леммы 7).

Обозначим $\overline{P}_0$ замыкание множества P в пространстве $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$, тогда множество $\overline{P}_0$ компактно в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Действительно, если $u \in \overline{P}_0$, то для некоторой последовательности $\{u_n\} \subset P_0$ имеем $u_n \to u$ в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$. Последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, поэтому без ограничения общности $u_n \to u$ $*$-слабо в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Отсюда

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|u_n\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} \leqslant 2R_0.$$

Теорема 8. *При любом $\varepsilon > 0$ уравнение (10) имеет траекторный аттрактор $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{H}_\varepsilon^+$. При этом*

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}(\mathcal{H}_\varepsilon^+).$$

Множество $\mathcal{U}_\varepsilon$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ и компактно в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$, а множество $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\varepsilon^+)$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}; H)$ и компактно в $C(\mathbb{R}; H^{-\delta})$.

Доказательство. Покажем, что множество $P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$ компактно в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$, ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ и является притягивающим для пространства $\mathcal{H}_\varepsilon^+$, тогда доказываемое утверждение непосредственно следует из теорем 1, 2.

Будучи подмножеством P_0, множество $P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Чтобы доказать его компактность, нужно убедиться в его замкнутости. Пусть $\{u_n\} \subset P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$ и $u_n \to u^*$ в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$. Из леммы **34** следует, что $u^* \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$. Покажем, что $u^* \in P_0$.

Зафиксируем $h > 0$. Последовательность $\{u_n\}$ ограничена в в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, поэтому благодаря оценке (21) без ограничения общности можно считать, что

$$u_n \to u^* \text{ $*$-слабо в } L_\infty(h, h+1; H),$$
$$u_n' \to (u^*)' \text{ в смысле распределений,}$$
$$u_n' \to (u^*)' \text{ слабо в } L_{4/3}(h, h+1; V^*).$$

Отсюда следует неравенство

$$\|u^*\|_{L_\infty(h, h+1; H)} + \|(u^*)'\|_{L_{4/3}(h, h+1; V^*)} \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|u_n\|_{L_\infty(h, h+1; H)} + \varliminf_{n \to \infty} \|u_n'\|_{L_{4/3}(h, h+1; V^*)} \leqslant 2R_0$$

для почти всех $h > 0$. Таким образом, при почти всех $h > 0$ имеем

$$\|u^*\|_{L_\infty(h, h+1; H)} + \|(u^*)'\|_{L_{4/3}(h, h+1; V^*)} \leqslant 2R_0$$

откуда вытекает вытекает принадлежность функции u^* множеству P_0. Компактность множества $P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$ доказана.

Легко видеть, что множество $P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$ является поглощающим для $\mathcal{H}_\varepsilon^+$. Действительно, пусть множество $B \subset \mathcal{H}_\varepsilon^+$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, то есть $\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} \leqslant R$ для некоторого $R > 0$ и всех $u \in B$. Выберем число t_1 так, что $RCe^{-\gamma t_1} + R_0 \leqslant 2R_0$, тогда при любом $t \geqslant t_1$ в силу оценки (21) получаем неравенство

$$\|T(t)u\|_{L_\infty(0,1; H)} + \|T(t)u'\|_{L_{4/3}(0,1; V^*)} \leqslant 2R_0.$$

Следовательно, $T(t)u \in P_0$, то есть $T(t)B \subset P_0$ при $t \geqslant t_1$. В силу же инвариантности траекторного пространства имеем $T(t)B \subset \mathcal{H}_\varepsilon^+$ при всех $t \geqslant 0$. Таким образом, множество $P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$ действительно является поглощающим.

Мы установили, что $P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$ — поглощающее (притягивающее) множество, компактное в $C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, а этого достаточно для доказательства теоремы. ■

Следствие 3. *Множество*

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{U}_\varepsilon(0) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_\varepsilon^+)(0)$$

*является глобальным аттрактором уравнения (*10*) в пространстве* $H^{-\delta}$.

Замечание 11. Из доказательства теоремы и теоремы 5 следует включение $\mathcal{U}_\varepsilon \subset P_0 \cap \mathcal{H}_\varepsilon^+$. В частности, отсюда вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ траекторный аттрактор $\mathcal{U}_\varepsilon$ содержится в множестве P_0 и тем более в множестве $\overline{P}_0$, которое будет играть роль в дальнейшем. Дословное повторение доказательства теоремы для системы Навье—Стокса приводит к тому, что ее траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ также содержится в множестве P_0 и, следовательно, в множестве $\overline{P}_0$.

6. СХОДИМОСТЬ АТТРАКТОРОВ

В настоящем пункте устанавливается, что траекторные и глобальные аттракторы аппроксимирующей системы в определенном смысле сходятся к аттрактору системы Навье—Стокса при $\varepsilon \to 0$.

Сначала докажем лемму о сходимости решений аппроксимирующей системы к решению системы Навье—Стокса.

Лемма 10. *Пусть* $M \geqslant 2$, $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, *функция* v_n *— решение уравнения (10) на отрезке* $[0, M]$ *при* $\varepsilon = \varepsilon_n$*; пусть последовательность* $\{v_n\}$ *ограничена в* $L_\infty(0, M; H)$ *и*

$$v_n \to v \text{ в } C([0, M]; H^{-\delta}).$$

Тогда v *— слабое решение системы Навье—Стокса на отрезке* $[0, M]$, *и* v *удовлетворяет неравенству (8).*

Доказательство. Покажем, что v — слабое решение системы Навье—Стокса. В силу оценки (16) последовательность $\{v_n\}$ ограничена в $L_2(0, M; V)$, поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$v_n \to v \text{ слабо в } L_2(0, M; V);$$
$$v_n \to v \text{ *-слабо в } L_\infty(0, M; H);$$
$$v_n \to v \text{ сильно в } (L_2(\Omega \times [0, M]))^3;$$
$$v_n(s)(x) \to v \text{ почти при всех } (x, s) \in \Omega \times [0, M];$$
$$v_n' \to v' \text{ в смысле распределений.}$$

В [3] показано, что при сделанных предположениях

$$K_{\varepsilon_n}(v_n) \to K(v) \text{ в смысле распределений.}$$

Так как линейный оператор слабо непрерывен, то также без ограничения общности считаем, что $Av_n \to Av$ слабо в $L_2(0, M; V)$ а, следовательно, и в смысле распределений. Переходя к пределу в смысле распределений в равенстве

$$v_n' + \nu A v_n - K_{\varepsilon_n}(v_n) = f,$$

убеждаемся, что v — решение уравнения (7).

Докажем выполнение оценки (8). Рассмотрим произвольную функцию $\psi \in C^\infty[0, M]$, носитель которой содержится в интервале $(0, M)$, и которая принимает только неотрицательные значения.

Каждая из функций v_n удовлетворяет тождеству (11), то есть

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v_n(s)\|_H^2 + \nu\|v_n(s)\|_V^2 = \langle f, v_n(s)\rangle \qquad (22)$$

при почти всех $s \in [0, M]$. Умножив обе части равенства (22) скалярно в $L_2(0, M)$ на ψ и проинтегрировав по частям первое слагаемое в левой части, получаем

$$-\frac{1}{2}\int_0^M \|v_n(s)\|_H^2\, \psi'(s) ds + \nu \int_0^M \|v_n(s)\|_V^2\, \psi(s) ds = \int_0^M \langle f, v_n(s)\rangle \psi(s) ds. \qquad (23)$$

Из неравенства

$$\int_0^M (\|v_n(s)\|_H - \|v(s)\|_H)^2 ds \leqslant \int_0^M \|v_n(s) - v(s)\|_H^2\, ds$$

следует, что $\|v_n\|_H \to \|v\|_H$ сильно в $L_2(0, M)$, и, без ограничения общности, $\|v_n(s)\|_H \to \|v(s)\|_H$ при почти всех $s \in [0, M]$. Проинтегрировав (22), получаем

$$\frac{1}{2}\|v_n(t)\|_H^2 + \nu\int_0^t \|v_n(s)\|_V^2\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_n(0)\|_H^2 + \int_0^t |\langle f, v_n(s)\rangle|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_n\|_{L_\infty(0,M;H)}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}^2 + \nu \| v(s) \|_V^2\right) ds,$$

откуда

$$\|v_n(t)\|_H^2 \leqslant \|v_n\|_{L_\infty(0,M;H)}^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|_{V^*}^2\, M,$$

Из этого неравенства и ограниченности последовательности $\{\|v_n\|_{L_\infty(0,M;H)}\}$ следует, что последовательность $\{\|v_n(s)\|_H^2\, \psi'(s)\}$ равномерно ограничена на отрезке $[0, M]$, поэтому по теореме Лебега

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^M \|v_n(s)\|_H^2\,\psi'(s)ds = \int_0^M \|v(s)\|_H^2\,\psi'(s)ds. \quad (24)$$

Далее, заметим, что $v_n\sqrt{\psi} \to v\sqrt{\psi}$ ($n\to\infty$) слабо в $L_2(0,M;V)$, поэтому

$$\int_0^M \|v_n(s)\|_V^2\,\psi(s)ds \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_0^M \|v_n(s)\|_V^2\,\psi(s)ds \quad (25)$$

В силу слабой сходимости последовательности v_n в $L_2(0,M;V)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^M \langle f, v_n(s)\rangle \psi(s)ds = \int_0^M \langle f, v_n(s)\rangle \psi(s)ds. \quad (26)$$

Перейдя в (23) к пределу при $n\to\infty$ с учетом (24), (25), (26) получаем

$$-\frac{1}{2}\int_0^M \|v(s)\|_H^2\,\psi'(s)ds + \nu\int_0^M \|v(s)\|_V^2\,\psi(s)ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^M \langle f, v(s)\rangle\psi(s)ds,$$

то есть требуемую оценку.

Следствие 4. *Пусть* $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, $v_n \in \mathcal{H}^+_{\varepsilon_n}$; *пусть последовательность* $\{v_n\}$ *ограничена в* $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ *и*

$$v_n \to v \text{ в } C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta}).$$

Тогда $v\in\mathcal{H}^+$.

Замечание 12. Доказанная лемма устанавливает существование слабых решений системы Навье—Стокса, удовлетворяющих оценке (8), аппроксимационно-топологическим методом (так как этим методом в [3] доказывается разрешимость аппроксимационных уравнений), то есть фактически дублируется соответствующий результат работы [1], полученный методом Галеркина. Условие $M\geqslant 2$ не является существенным: модифицировав оценку (16) лемму можно доказать для любого $M>0$. С помощью доказанной леммы и ее следствия нетрудно установить (без использования метода Галеркина) и существование в пространстве $\mathcal{H}^+$ траектории, выходящей из любой точки $v_0\in H$.

Рассмотрим вопрос о приближении к аттрактору системы Навье—Стокса аттракторов аппроксимирующих уравнений. Напомним, что если A, B — некоторые множества в метрическом пространстве (X,ρ), то *полуотклонением* A *от* B называется число

$$h(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho(a,b).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Имеет место предельное соотношение*

$$h_{C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})}(\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{U}) \to 0 \quad (\varepsilon\to 0),$$

где $h_{C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})}$ — полуотклонение в пространстве $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$.

Доказательство. Предположим, что доказываемое соотношение неверно. Тогда найдутся число $\varkappa>0$ и последовательность $\varepsilon_n\to 0$, такие что

$$h_{C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})}(\mathcal{U}_{\varepsilon_n},\mathcal{U}) > \varkappa.$$

Из последнего неравенства в свою очередь следует, что найдутся $u_n\in\mathcal{U}_{\varepsilon_n}$, такие что

$$\operatorname{dist}_{C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})}(u_n,\mathcal{U}) \geqslant \varkappa \quad (27)$$

(здесь $\operatorname{dist}_{C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})}$ обозначает расстояние от точки до множества в пространстве $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$).

Так как $\mathcal{U}_{\varepsilon_n} = \Pi_+\mathcal{K}(\mathcal{H}^+_{\varepsilon_n})$, то найдутся функции $\tilde u_n\in\mathcal{K}(\mathcal{H}^+_{\varepsilon_n})$, такие что $u_n = \Pi_+\tilde u_n$.

Все функции вида $\{\Pi_+T(t)\tilde u\}$ ($t\in\mathbb{R}$, $\tilde u\in\mathcal{K}(\mathcal{H}^+_\varepsilon)$) принадлежат соответствующим траекторным аттракторам и, следовательно, содержатся в компактном (в $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$) множестве $\overline{P}_0$, рассмотренном в п. 5 (см. замечание 11). Поэтому можно построить последовательности $\{\tilde u_n^{(k)}\}$ ($k=-1,0,1,2,\ldots$) следующим образом: положим $\tilde u_n^{(-1)} = \tilde u_n$ и по индукции в качестве $\{\tilde u_n^{(k)}\}$ выберем такую подпоследовательность последовательности $\{\tilde u_n^{(k-1)}\}$, что

$$\Pi_+T(-k)\tilde u_n^{(k)} \to v_k \text{ в } C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})\ (k=0,1,2,\ldots)$$

Все рассматриваемые последовательности содержатся в множестве $\overline{P}_0$, ограниченном в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ и компактном в $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$, поэтому по следствию 4 имеем $v_k\in\mathcal{U}$.

Положим $\hat u_n = \tilde u_n^{(n)}$ ($n=0,1,2,\ldots$), тогда, очевидно,

$$\Pi_+T(-k)\hat u_n \to v_k\ 2\, C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})\ (k=0,1,2,\ldots) \quad (28)$$

Заметим, что

$$T(1)v_k = v_{k-1} \quad (k=1,2,\ldots) \quad (29)$$

Действительно, при фиксированном $k=1,2,\ldots$ для произвольного $t\geqslant 0$ имеем

$$(\Pi_+T(-(k-1))\hat u_n)(t) = (T(-(k-1))\hat u_n)(t) =$$
$$= \hat u_n(t-k+1),$$

$$(T(1)\Pi_+T(-k)\hat u_n)(t) = (\Pi_+T(-k)\hat u_n)(t+1) =$$
$$= (T(-k)\hat u_n)(t+1) = \hat u_n(t-k+1);$$

таким образом,

$$T(1)\Pi_+T(-k)\hat u_n = \Pi_+T(-(k-1))\hat u_n,$$

однако согласно (28) при $n \to \infty$ правая часть этого равенства имеет пределом v_{k-1}, а левая в силу непрерывности оператора $T(1)$ стремится к $T(1)v_k$, что и доказывает равенство (29).

Определим функцию v следующим образом:

$$v = \begin{cases} v_0(t), & t \geqslant 0, \\ v_k(t+k), & -k \leqslant t < -k+1, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Покажем, что для любого $k = 0,1,2,\ldots$ при всех $t \geqslant -k$ имеет место равенство

$$v(t) = T(k)v_k(t) \text{ при всех } t \geqslant -k. \qquad (30)$$

Действительно, для $k = 0$ это очевидно. Предположим теперь, что при некотором $k \geqslant 1$ имеем

$$v(t) = T(k-1)v_{k-1}(t) \text{ при всех } t \geqslant -k+1.$$

Для любого $t \geqslant -k+1$ с помощью (29) имеем

$$v(t) = T(k-1)v_{k-1}(t) = \\ = T(k-1)T(1)v_k(t) = T(k)v_k(t),$$

то есть для таких t равенство (30) доказано. Если же $-k \leqslant t < -k+1$, то равенство (30) следует непосредственно из определения функции v.

Из (29) следует, что функция v принадлежит $C([-k,+\infty);H^{-\delta})$ для любого $k = 0,1,2,\ldots$, и, следовательно, $v \in C(\mathbb{R};H^{-\delta})$. Так как все функции $\{v_n\}$ принадлежат множеству $\overline{P}_0$, ограниченному в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$, то из (29) следует также, что $v \in L_\infty(\mathbb{R};H)$. Наконец, функция v принадлежит ядру $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что при любом $h \in \mathbb{R}$ функция $\Pi_+T(h)v$ принадлежит пространству траекторий $\mathcal{H}^+$. Для $h = -k$ ($k = 0,1,2,\ldots$) при всех $t \geqslant 0$ из (29) получаем

$$T(-k)v(t) = v(t-k) = T(k)v_k(t-k) = \\ = T(k)T(-k)v_k(t) = v_k(t),$$

то есть $T(-k)v = v_k \in \mathcal{H}^+$; для остальных значений h включение $\Pi_+T(h)v \in \mathcal{H}^+$ следует из трансляционной инвариантности пространства $\mathcal{H}^+$.

Так как $v \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$, то $v_0 = \Pi_+ v \in \Pi_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}^+) = \mathcal{U}$. Тогда из (28) следует, что $\Pi_+\hat{u}_n \to v_0 \in \mathcal{U}$. Но это противоречит тому, что все функции $\Pi_+\hat{u}_n$ являются членами последовательности $\{u_n\}$, для которых выполнено неравенство (27). Полученное противоречие доказывает теорему.

Переходя к сечениям траекторных аттракторов, получаем следствие для глобальных аттракторов:

Следствие 5. *Имеет место предельное соотношение*

$$h_{E_0}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0),$$

где h_{E_0} *— полуотклонение в пространстве* E_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. P. 913—964.

2. *Вишик М. И., Чепыжов В. В.* Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье—Стокса // Матем. заметки 2002. т. 71, вып. 2, с. 194 — 213.

3. *Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье—Стокса. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 112 с.

Кондратьев Станислав Константинович, аспирант Воронежского государственного университета. Телефон: 8-9036524904. E-mail: kondratjevsk@gmail.com

Kondratyev Stanislav K., Voronezh State University, post-graduate student. Phone: 8-9036524904. E-mail: kondratjevsk@gmail.com