

К ВЫЧИСЛЕНИЮ УГЛОВ В ТОЧКАХ НЕГЛАДКОСТИ СОПРЯЖЕННЫХ КОНТУРОВ

М. И. Ковалева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 17.03.2009 г.

Аннотация. В статье описаны элементы алгоритма компьютерной идентификации особенностей в регрессивных точках, возникающих при построении сопряженных контуров, проверки условия трансверсальности к особенностям и вычисления угла в точке негладкости. Обоснование алгоритма использует боардмановскую классификацию идеалов в алгебре ростков гладких функций. Приведены компьютерные изображения точек негладкости и линий регрессивных точек. Приведены формулы для вычисления угла в точке негладкости.

Ключевые слова: бифуркация, регрессивная точка, турбонасос.

Abstract. In this article some elements of the algorithm for computer identification of distinctions in regressive points are described. They occur during the plotting of conjoined outlines, checking the condition of transversal to the distinctions and calculation of the angle at the point of irregularity. The proof of this algorithm uses the Boardman's classification of ideals in germs of smooth functions algebra. Some computer images of irregularity points and lines of regressive points are provided. Some formulas for calculation of the angle at the point of irregularity are provided.

Keywords: bifurcation, regressive point, turbopumps.

1. ВИНТОВЫЕ ПАРЫ

Винтовая пара — важнейший конструктивный элемент турбовинтового насоса. Герметичность насоса, его кинематические свойства и пр. характеристики определяются геометрическими свойствами поперечных сечений винтов [1]—[3]. Минимальность зазоров между винтами и симметричность схемы силовых нагрузок позволяют насосу работать устойчиво в разнообразных режимах. Обеспечение минимальности зазоров между винтами — важнейшая задача в конструировании ТН, известная в литературе, как *задача оптимизации шестеренчатого зацепления пары винтов*.

Поверхность винта представляет собой геометрическое место точек в пространстве, полученных “винтовым вращением” заранее заданного контура — профиля поперечного сечения. То есть профиль винтовой поверхности определяется замкнутым плоским контуром (алгебраическим, гладким, кусочно гладким и т.п.), определяемым, в свою очередь, посредством профильных функций $r = r(s)$, $\varphi = \varphi(s)$ (в полярных координатах), удовлетворяющих условиям $r(s) \equiv r(s + 2\pi)$ и $\varphi(s + 2\pi) \equiv \varphi(s) + 2\pi$. Ниже предполагается, что профиль исходного винта представлен графиком однозначной функции (рассмотрен случай однозначного профи-

ля). Таким образом, можно положить $\varphi = s$. Если количество зубцов профиля равно n , то винтовая пара называется n -заходной.

При построении поверхности, сопряженной¹ с заданной винтовой поверхностью, применяется процедура “прокручивания” замкнутого контура [4], в результате которой поперечное сечение геометрически сопряженной поверхности можно получить в виде части кривой, огибающей однопараметрическое семейство плоских контуров. А именно, придав контуру движение на комплексной плоскости, как плоского твердого тела, жестко скрепленного с кругом радиуса единица, центр которого в начальный момент времени расположен в точке $z = 2$, и который равномерно без скольжения катится по неподвижной окружности (*центроиде*) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, получим область X , “заметаемую” контуром. Часть границы этой области, состоящая из достижимых² из начала координат точек, называется *геометрически сопряженным* контуром.

¹ Если винтовая пара является “максимальной”, т.е. ни один из винтов нельзя “раздуть”, сохранив возможность их совместного равномерного вращения (в противоположных направлениях), то поверхности винтов называются геометрически сопряженными.

² Точка $a \in X$ называется достижимой из начала координат, если в комплексной плоскости существует непрерывная кривая $z = \alpha(s)$, $0 \leq s \leq 1$, такая, что $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = a$ и точка a является единственной общей точкой для данной кривой и множества X .

Если задать подвижный контур в начальный момент времени формулой $w(\varphi) = f(\varphi)e^{i\varphi} + 2$, то движущийся контур будет задан формулой

$$z(\varphi, t) = e^{i(2t+\varphi)} f(\varphi) + 2e^{it}.$$

Таким образом, при изучении пар сопряженных винтовых поверхностей можно использовать классическую теорию огибающих кривых.

Существует трактовка огибающих в виде дискриминантных кривых [5]–[7]. А именно, пусть l — неособая линия нулевого уровня гладкой функции $V(z)$, $z \in \mathbf{C}$. После “прокручивания” l вокруг центроиды (базовой окружности) [4] получим t – семейство кривых в виде нулевых уровней t – семейства функций

$$V(z, t) = V(e^{-2it}z - 2e^{-it}), z \in \mathbf{C}. \quad (1)$$

Дискриминантная кривая z – семейства функций (1) от t (она же и огибающая) представляет собой сопряженный контур (см. ниже раздел 4.).

Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости следующего утверждения: *если гладкая функция $V(z)$, $z \in \mathbf{C}$, обладает поворотной симметрией (инвариантна относительно поворота плоскости $z \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{n}} z$), то соответствующая z – семейству (1) дискриминантная кривая L также обладает поворотной симметрией.*

В данной статье предложен алгоритм компьютерной идентификации особенности в регрессивной точке и проверки условия трансверсальности к особенности “ласточкин хвост”. Обоснование алгоритма опирается на боардмановскую классификацию идеалов в алгебре ростков гладких функций [5]. Для определенности, ниже рассматриваются алгеброидные контуры.

2. Алгеброидные контуры. *Симметричным алгебраическим (или, более общо, алгеброидным) контуром порядка $2n$* называется гладкая регулярная компактная кривая на координатной плоскости, заданная уравнением

$$V(z) = 1, \quad (2)$$

где

$$V(z) := \prod_{k=0}^{n-1} W(\omega^k z),$$

$$W(z) = W_0(e^{i\alpha} z),$$

$$W_0(z) := (1 - \varepsilon)x^2 + (1 + \varepsilon)y^2,$$

α, ε — произвольные константы, $\varepsilon < 1$, $\omega = \exp(i2\pi/n)$ — первообразный корень из единицы степени n . Для определенности, положим $\alpha = 0$.

Перейдя к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, получим вместо (2) уравнение

$$\tilde{V}(r, \varphi) = 1, \quad (3)$$

где

$$\tilde{V}(r, \varphi) := r^{2n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \varepsilon \cos \left(2 \left(\varphi + \frac{\pi k}{n} \right) \right) \right),$$

или, что эквивалентно уравнению

$$r = 1 / \left((1 + \tilde{\varepsilon} \cos(2n\varphi)) \right)^{\frac{1}{2n}}, \quad \tilde{\varepsilon} := \varepsilon^n + o(\varepsilon^n). \quad (4)$$

Это тригонометрическая форма уравнения симметричной алгебраической (алгеброидной) кривой. Знак тильда над ε в дальнейшем опускается.

Симметричным алгеброидным контуром порядка $2n - 1$ будем называть гладкую регулярную компактную кривую на плоскости, заданную уравнением (в полярных координатах)

$$\tilde{V}(r, \varphi) = 1, \quad (5)$$

где

$$\tilde{V}(z) := r^{2n-1} (1 + \varepsilon \cos((2n - 1)\varphi)),$$

или

$$r = 1 / (1 + \varepsilon \cos((2n - 1)\varphi))^{\frac{1}{2n-1}}. \quad (6)$$

3. Дискриминантные кривые и регрессивные точки. Как было отмечено выше, имеется трактовка сопряженных контуров в виде дискриминантных кривых [4].

Пусть исходное семейство кривых задано в виде линий нулевого уровня для функций из гладкого t – параметрического семейства гладких функций $V(x, y, t)$. Условие касания огибающей кривой $z(t) = x(t) + iy(t)$ всех линий заданного семейства приводит к условию ортогональности градиента V и касательного вектора к огибающей:

$$(\text{grad}_z V(x(t), y(t), t), \dot{z}(t)) = 0.$$

Из этого соотношения вытекает, что огибающая задается следующей системой уравнений

$$V(x, y, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, y, t) = 0, \quad (7)$$

которая описывает также те значения x, y , при которых функция $V(x, y, \cdot)$ имеет кратный ко-

рень (по переменной t). Следовательно, проекция

$$(x, y, t)^T \mapsto (x, y)^T$$

переводит множество решений системы уравнений (7) на дискриминантную кривую гладкого (x, y) -семейства гладких функций $V(x, y, t)$ скалярного аргумента t .

Таким образом, исследование и построение сопряженных контуров можно осуществлять посредством теории дискриминантных кривых.

Матрица Якоби системы уравнений (7) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} & \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ниже предполагается, что в точках контура

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9)$$

Точка a кривой в \mathbb{R}^3 , заданной системой уравнений (7), называется *регрессивной* (см. [6]), если в этой точке

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Из этого определения следует, что регрессивные точки определяются системой уравнений

$$V(x, y, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(x, y, t) = 0.$$

Матрица Якоби такой системы уравнений (в регрессивных точках) имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} & 0 \\ \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} & \frac{\partial^3 V}{\partial y \partial t^2} & \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} \end{pmatrix}.$$

Регрессивная точка a , заданную системой уравнений (7), называется *регулярной*, если в этой точке $\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} \neq 0$. В противном случае регрессивная точка называется *вырожденной* или *особой*. Ясно, что особая регрессивная точка

является вырожденным нулем векторного поля

$$\Phi := \left(V, \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right)^T$$

с одномерной особенностью (коранг матрицы Якоби в этой точке равен единице).

Точка a , регрессивная при $\varepsilon = \varepsilon_0$ (для ε -параметрического семейства контуров, сопряженных к заданному ε -параметрическому семейству алгеброидных контуров), называется *первичной*, если при $\varepsilon < \varepsilon_0$ регрессивные точки отсутствуют. Ясно, что каждая первично регрессивная точка является вырожденной.

4. Боардмановские расширения идеалов в алгебрах ростков гладких функций и типы особенностей отображений. Пусть \mathcal{E} — алгебра ростков в нуле гладких функций на координатной плоскости, \mathfrak{A} — конечнопорожденный идеал в \mathcal{E} с системой образующих V_1, \dots, V_m : $\mathfrak{A} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$. Боардмановским расширением \mathfrak{A} идеала \mathfrak{A} называется идеал, порожденный множествами \mathfrak{A} и $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$, где $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ — множество функций вида

$$[u, v] := \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u, v \in \mathfrak{A}$$

($[u, v]$ — скобка Пуассона функций $u, v \in \mathfrak{A}$).

Рангом $rk(\mathfrak{A})$ идеала \mathfrak{A} называется размерность подпространства

$$L(\mathfrak{A}) := \text{span}(\{\text{grad } V(0, 0) : V \in \mathfrak{A}\})$$

в \mathbb{R}^2 , $crk(\mathfrak{A}) := 2 - rk(\mathfrak{A})$. Для $\mathfrak{A} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$ имеем

$$rk(\mathfrak{A}) = rk(A),$$

где A — матрица Якоби функций V_j в нуле (образованная первыми производными V_j).

Пусть

$$\mathfrak{A}^1 = \tilde{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{A}^2 = \tilde{\mathfrak{A}}^1, \dots, \mathfrak{A}^{k+1} = \tilde{\mathfrak{A}}^k, \dots$$

— последовательность боардмановских расширений. Числа

$$r_1 = crk(\mathfrak{A}), \quad r_2 = crk(\mathfrak{A}^1),$$

$$r_3 = crk(\mathfrak{A}^2), \dots, r_{k+1} = crk(\mathfrak{A}^k), \dots$$

называются боардмановскими характеристиками идеала \mathfrak{A} [5]. Очевидно, что $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{k+1} \geq \dots$. Боардмановские характеристики инвариантны относительно выбора систем координат [5].

Говорят, что отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(0) = 0$, имеет особенность в нуле типа $\Sigma^{1, \dots, 1, 0}$ (в верхнем показателе k единиц), если для иде-

ала, порожденного ростками (в нуле) компонент этого отображения выполнены соотношения

$$r_1 = \dots r_k = 1, r_{k+1} = 0.$$

Например, идеалы $\langle x, y^2 \rangle$, $\langle x, y^3 \rangle$ и $\langle x, y^4 \rangle$ имеют в нуле особенности типов $\Sigma^{1,0}$, $\Sigma^{1,1,0}$ и $\Sigma^{1,1,1,0}$. Эти особенности носят имена “складка”, “сборка” и “ласточкин хвост”.

Если условие $r_{k+1} = 0$ отбросить, то используется обозначение особенности $\Sigma^{1, \dots, 1}$.

5. Идентификация особенностей преобразований плоскости. Условия трансверсальности к особенности “ласточкин хвост”. Пусть для отображения $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, выполнено требование

$$\text{grad } f_1(0) \neq 0. \quad (*)$$

В этом случае отображение f имеет в нуле особенность Σ^1 тогда и только тогда, когда в нуле

$$[f_1, f_2] = 0(\Sigma^1) \quad (\Sigma^1)$$

или, что эквивалентно,

$$\text{grad } f_1(0) \parallel \text{grad } f_2(0).$$

Используя последнее соотношение, нетрудно доказать (см. выше определение типов особых точек), что верны следующие утверждения.

Теорема 1 *Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1}$ тогда и только тогда, когда в нуле выполнены равенства*

$$[f_1, f_2] = [f_1, [f_1, f_2]] = 0. \quad (\Sigma^{1,1})$$

Замечание. Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1,0}$, если в нуле

$$[f_1, [f_1, [f_1, f_2]]] \neq 0$$

(при условии $(\Sigma^{1,1})$)

Теорема 2 *Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1,1}$ тогда и только тогда, когда в нуле выполнены равенства*

$$[f_1, f_2] = [f_1, [f_1, f_2]] = [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]] = 0. \quad (\Sigma^{1,1,1})$$

Замечание. Отображение f имеет в нуле особенность $\Sigma^{1,1,1,0}$, если в нуле

$$[f_1, [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]]] \neq 0$$

(при условии $(\Sigma^{1,1,1})$)

Для определенности, здесь рассмотрена нулевая особая точка. Все приведенные выше соотношения и утверждения переносятся на ненулевые особые точки посредством соответствующих переносов начала координат.

Доказательства этих утверждений нетрудно провести посредством редукции Пуанка-

ре—Ляпунова—Шмидта [9] к одномерному отображению

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \beta(s) = f_2(\psi(s)),$$

где $\psi(s)$ — интегральная кривая гамильтоновой системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \end{aligned} \right\}$$

Кривая $x = \psi(s)$ задает параметризацию (вблизи нуля) множества решений уравнения $f_1(x) = 0$. Известно, что редукция сохраняет боардмановские характеристики особенности, то есть для f их можно вычислять посредством отображения β .

Теорема 3 *Имеет место равенство*

$$\frac{d^k \beta}{ds^k} = j^{(k+1)} \forall k \in \mathbb{N},$$

где $j^{(k+1)} = [f_1, j^{(k)}]$.

Доказательство вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(s) &= \frac{d}{ds} (f_2(\psi(s))) = (\text{grad } f_2(\psi(s)), \dot{\psi}(s)) = \\ &= (\text{grad } f_2(\psi(s)), s \text{ grad } f_1(\psi(s))) = [f_1, f_2](\psi(s)) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (j^{(k)}(\psi(s))) &= (\text{grad } j^{(k)}(\psi(s)), \dot{\psi}(s)) = \\ &= (\text{grad } j^{(k)}(\psi(s)), s \text{ grad } f_1(\psi(s))) = \\ &= [f_1, j^{(k)}](\psi(s)) = j^{(k+1)}(\psi(s)). \end{aligned}$$

6. Основное параметрическое уравнение сопряженного контура. Построение кривой регрессивных точек. Пусть исходный контур задан параметрическим уравнением (на координатной плоскости, отождествленной с плоскостью комплексных чисел)

$$z = z(s) := r(s)e^{is}.$$

“Прокручивание” контура задается уравнением

$$z = \mathcal{F}(s, t) := z(s)e^{2it} + 2e^{it}$$

или

$$z = f(s)e^{i(2t+s)} + 2e^{it}.$$

Нетрудно проверить, что якобиан отображения \mathcal{F} имеет следующее представление:

$$j(s, t) = f(s)\dot{f}(s) + \dot{f}(s)\cos(t+s) - f(s)\sin(t+s).$$

Следовательно, уравнение кривой особых точек S выглядит следующим образом

$$j(s, t) = f(s)\dot{f}(s) + \dot{f}(s) \cos(t + s) - f(s) \sin(t + s) = 0 \quad (11)$$

или

$$\frac{\dot{f}(s)}{f(s)} = \frac{\sin(t + s)}{f(s) + \cos(t + s)}. \quad (12)$$

Из (11) следует, что

$$t + s = \theta_1(s) := \arcsin\left(\frac{\dot{f}(s)}{\sqrt{\dot{f}^2(s) + f^2(s)}}\right) + \arcsin\left(\frac{\dot{f}(s)f(s)}{\sqrt{\dot{f}^2(s) + f^2(s)}}\right),$$

либо

$$t + s = \theta_2(s) := \pi + \arcsin\left(\frac{\dot{f}(s)}{\sqrt{\dot{f}^2(s) + f^2(s)}}\right) - \arcsin\left(\frac{\dot{f}(s)f(s)}{\sqrt{\dot{f}^2(s) + f^2(s)}}\right).$$

Параметрическое уравнение сопряженного контура примет следующий вид:

$$z = z^*(s) := \mathcal{F}(s, -s + \theta_k(s)) = r(s)e^{i(-s+2\theta_k(s))} + 2e^{i(-s+\theta_k(s))}.$$

Компьютерные графические изображения контуров и сопряженных поверхностей, представленные в начале статьи, получены на основе этого уравнения.

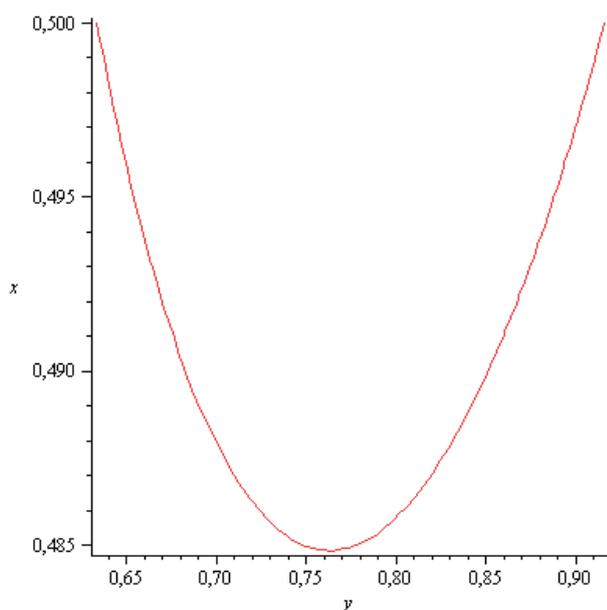


Рис. 1. График кривой регрессивных точек для 1-заходного контура.

Подставив явную формулу линии особых точек в уравнения регрессивных точек (см. теорему 2), можно получить формулы для графического изображения линии регрессивных точек. На рис. 1, 2, 3 изображены линии регрессивных точек \mathcal{L}_j для 3-заходных контуров, полученные применением основной формулы и уравнений $(\Sigma^{1,1,1})$. Нижние точки линий \mathcal{L}_j изображают вырожденные регрессивные точки (в плоскости параметров s, ε).

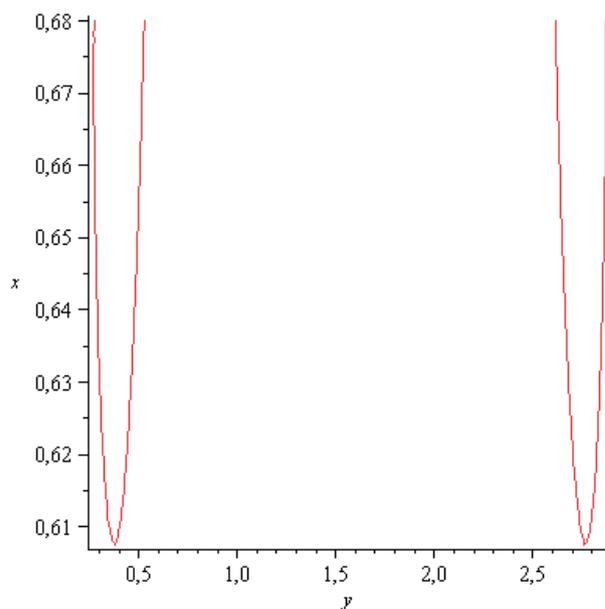


Рис. 2. График кривой регрессивных точек для 2-заходного контура

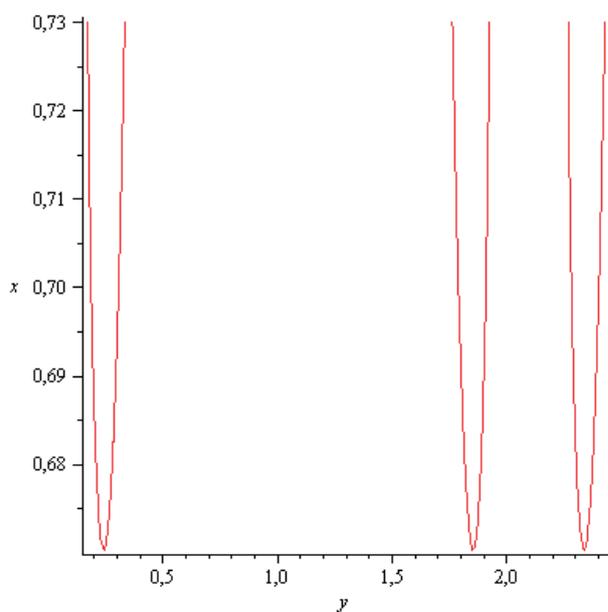


Рис. 3. График кривой регрессивных точек для 3-заходного контура

7. Нелокальное использование уравнения регрессивных точек. При нелокальном рассмотрении линии \mathcal{L} регрессивных точек условие (*) может нарушаться и поэтому построение \mathcal{L} должно опираться на систему двух уравнений

$$[x_1, j] = [x_2, j] = 0.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$([x_1, j]) = -(\dot{f}(s) \sin(\theta_k) + f(s) \cos(\theta_k)) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где компоненты a и b равны, соответственно,

$$\dot{f}(s) \cos(-s + 2\theta_k) - f(s) \sin(-s + 2\theta_k) - 2(\dot{\theta}_k - 1)(f(s) \sin(-s + 2\theta_k) + \sin(-s + \theta_k))$$

и

$$\dot{f}(s) \sin(-s + 2\theta_k) + f(s) \cos(-s + 2\theta_k) + 2(\dot{\theta}_k - 1)(f(s) \cos(-s + 2\theta_k) + \cos(-s + \theta_k)).$$

После умножения левой и правой частей системы уравнений (13) на матрицу A^{-1} , где

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-s + \theta_k) & -\sin(-s + \theta_k) \\ \sin(-s + \theta_k) & \cos(-s + \theta_k) \end{pmatrix},$$

получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{f}(s) + 2(\dot{\theta}_k - 1) \sin(\theta_k) &= \\ = f(s) + 2(\dot{\theta}_k - 1)(f(s) + \cos(\theta_k)) &= 0. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений отличается от второго лишь множителем \dot{f}/f (см. формулу (12)).

Графики кривых регрессивных точек для 1—3-заходных контуров, изображенные на рис. 1, 2, 3, получены на основе последнего уравнения.

8. Построение первично регрессивной точки и точки негладкости в случае симметрично-го зубца. Пусть задан аналитически сопряженный однозаходный контур

$$z(s) = f(s)e^{i(-s+2\theta(s))} + 2e^{i(-s+\theta(s))} \quad (14)$$

с симметричным зубцом. Ограничимся рассмотрением однозаходного контура. Из условия симметрии зубца следует, что первично регрессивная точка появляется при $s = \pi$, а бифурцирующие регрессивные точки симметричны относительно оси $s = \pi$. Таким образом, эти точки соответствуют значениям $s = \pi \pm \delta$ (при параметризации (14)), при этом $\varepsilon = O(\delta^2)$. Так как $\dot{f}(\pi) = 0$, то $\theta(\pi) = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{z}(\pi) &= \dot{f}(\pi)e^{i(-\pi+2\theta(\pi))} + f(\pi)e^{i(-\pi+2\theta(\pi))} \times \\ &\times i(2\dot{\theta}(\pi) - 1) + 2e^{i(-\pi+\theta(\pi))} i(\dot{\theta}(\pi) - 1) = \\ &= -f(\pi)e^{i2\theta(\pi)} i(2\dot{\theta}(\pi) - 1) - 2e^{i\theta(\pi)} i(\dot{\theta}(\pi) - 1) = \\ &= -f(\pi)(2\dot{\theta}(\pi) - 1) - 2i(\dot{\theta}(\pi) - 1). \end{aligned}$$

Приравняв это выражение нулю, получим уравнение (от ε)

$$f(\pi) = -\frac{2(\dot{\theta}(\pi) - 1)}{\dot{\theta}(2\pi) - 1}, \quad (15)$$

определяющее момент и место рождения регрессивной точки.

Условие симметрии зубца приводит к выводу о том, что значения $s = s_1, s_2$, при которых происходит самопересечение аналитически сопряженного контура (14), связаны соотношениями

$$s_1 = \pi - \delta, \quad s_2 = \pi + \delta, \quad \delta = O(\varepsilon^2).$$

Зависимость ε от δ определяется соотношением

$$\begin{aligned} f(\pi + \delta)e^{i(-\pi-\delta+2\theta(\pi+\delta))} + 2e^{i(-\pi-\delta+\theta(\pi+\delta))} &= \\ = f(\pi - \delta)e^{i(-\pi+\delta+2\theta(\pi-\delta))} + 2e^{i(-\pi+\delta+\theta(\pi-\delta))}. \end{aligned}$$

Так как, по симметрии,

$$\begin{aligned} f(\pi + \delta) &= f(\pi - \delta) = \theta, \\ \theta(\pi + \delta) &= -\theta(\pi - \delta) (= \theta), \end{aligned}$$

то получим уравнение

$$\begin{aligned} f(\pi - \delta)e^{-i(-\delta+2\theta)} + 2e^{-i(-\delta+\theta)} &= \\ = f(\pi + \delta)e^{i(-\delta+2\theta)} + 2e^{i(-\delta+\theta)}, \end{aligned}$$

определяющее расположение точки самопересечения, или, в силу равенства $f(\pi - \delta) = f(\pi + \delta)$, уравнение

$$\begin{aligned} f(\pi + \delta) &= -2 \frac{e^{i(-\delta+\theta)} - e^{-i(-\delta+\theta)}}{e^{i(-\delta+2\theta)} - e^{-i(-\delta+2\theta)}} = \\ &= -2 \frac{\sin(\theta - \delta)}{\sin(2\theta - \delta)}, \end{aligned} \quad (16)$$

из которого нетрудно получить зависимость ε от δ и асимптотическую формулу для значения угла в вершине зубца сопряженного контура.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пыж О.А., Харитонов Е.С., Егорова П.Б. Судовые винтовые насосы. — Л.: Судостроение, 1969. — 196 с.
2. Балденко Д.Ф., Бидман М.Г., Калишевский В.Л. Винтовые насосы. — М.: Машиностроение, 1982. — 228 с.

3. *Женовак Н.Г.* Судовые винтовые негерметичные насосы. — Л.: Судостроение, 1972. — 144 с.

4. *Валюхов С. Г., Костин В. А., Сапронов Ю. И., Семенов С. М.* Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей. — Воронеж: ВорГУ. 2005. — 177 с.

5. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука. 1982. — 304 с.

6. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 262 с.

7. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. — М.: Мир, 1980. — 608 с.

8. *Винберг Э.Б.* Симметрия многочленов. М.: МЦНМО, 2001. — 24с.

9. *Зачена В.Р., Сапронов Ю.И.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений // Воронеж, ВГУ. 2002. — 185 с.

Ковалева Марина Игоревна — аспирант кафедры математического моделирования математического факультета ВГУ. Тел. 8-908-139-76-77; e-mail:marinkov@mail.ru

Kovaleva Marina I. — postgraduate student, chair of the mathematical modeling of the Voronezh State University; Tel.:8-908-139-76-77, e-mail: marinkov@mail.ru