УДК 517.5; 514.74

4-МЕРНЫЕ МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ И АФФИННАЯ ОДНОРОДНОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^3$ *

В. К. Евченко*, А. В. Лобода**

**Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
***Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 10.03.2009 г.

Аннотация. В связи с задачей описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства в статье изучается вопрос о продолжении матричных алгебр Ли. Доказано, что 4-мерные вещественные алгебры $su(2)+e^{i\theta}$ и $su(1,1)+e^{i\theta}$ не допускают продолжений до 5-мерных алгебр Ли, соответствующих жестким аффинно-однородным СПВ-гиперповерхностям общего положения пространства $\mathbb{C}^3$. Построен пример 4-мерной алгебры, допускающей такое продолжение.

Ключевые слова: комплексное пространство, однородное подмногообразие, векторное поле, алгебра Ли, псевдовыпуклая поверхность, каноническое уравнение

Abstract. In connection with the problem of description for the affinely homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space the question of continuation of matrix Lie algebras is studied in the article. It's proved that 4-dimensional real algebras $su(2)+e^{i\theta}$ and $su(1,1)+e^{i\theta}$ do not allow continuation to the 5-dimensional algebras corresponding to the rigid affinely homogeneous strictly pseudo-convex hypersurfaces of common position in the space $\mathbb{C}^3$. An example of the 4-dimensional algebra is constructed that allows such continuation.

Keywords: complex space, homogeneous submanifold, vector field, Lie algebra, pseudo-convex surface, canonical equation

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются аффинно-однородные вещественные гиперповерхности в трехмерном комплексном пространстве. Напомним, что полное описание голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 2-мерных комплексных пространств было построено Э. Картаном ([1]). Локальная классификация таких многообразий, являющаяся следствием работы Картана, оказывается достаточно простой.

Ситуация с однородностью в 3-мерных пространствах оказывается гораздо более сложной. Например, полная классификация аффинно-однородных гиперповерхностей вещественного 3-мерного пространства была получена лишь недавно (см. [2]). Объемная работа [3], опубликованная в 2008 г., содержит описание только вырожденных голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств. Отметим, кстати, что все такие поверхности являются голоморфными образами аффинно-однородных (вырожденных) поверхностей.

В рамках изучения невырожденных аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^3$ (см. [4]) в работе [5] поставлена задача о продолжении матричных алгебр Ли. Геометрически она формулируется как изучение действия аффинной подгруппы, соответствующей однородной поверхности, в комплексной касательной плоскости к такому многообразию. Как показывают уже опубликованные в связи с этой задачей частичные результаты (см. [6]—[9]), для полного ее решения необходимы значительный объем вычислений и рассмотрение большого количества частных случаев.

В данной работе мы изучаем задачу о продолжении лишь для матричных алгебр Ли, "примыкающих" к двум классическим алгебрам $su(2)$ и $su(1,1)$. Более точно, речь идет о двух семействах 4-мерных алгебр

$$g_+^\theta = su(2)+\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix},$$

$$g_-^\theta = su(1,1)+\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}, \qquad (0.1)$$

$$\theta\in[0,\pi).$$

* Исследование поддержано грантами НШ-3877.2008.1 и РФФИ-08-01-00743-а

Известно (см., например, [10]), что любая 4-мерная вещественная подалгебра Ли алгебры квадратных комплекснозначных матриц 2-го порядка сводится матричным подобием либо к одной из упомянутых алгебр g_+^θ, g_-^θ, либо к некоторой верхнетреугольной матричной алгебре. В этой ситуации, как и во многих других, классические алгебры $su(2)$ и $su(1,1)$ играют важную роль. Поэтому отдельное их изучение в задаче о продолжении матричных алгебр представляется оправданным.

Кроме того, обсуждаемые ниже свойства именно этих алгебр могут оказаться полезными при решении других задач. Рассмотрение в рамках статьи систем нелинейных (квадратичных) уравнений, в которых групповые симметрии играют заметную роль, является примером одной из таких задач.

Как выяснилось (вопреки ожиданиям), изучаемые алгебры g_+^θ и g_-^θ не дают продолжений, связанных с аффинно-однородными строго псевдо-выпуклыми (СПВ) поверхностями общего положения в $\mathbb{C}^3$. В то же время согласно [9] 4-мерная верхнетреугольная алгебра Ли

$$g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 + it_4 & t_2 \\ 0 & t_3 + it_4 \end{pmatrix}, (t_k \in \mathbb{R}) \right\}$$

допускает такие продолжения. В заключительной части нашей работы приводится подробное обсуждение соответствующего примера. Отметим, что g_2 является единственной из большого списка [10] 4-мерных алгебр, обладающей таким свойством продолжения. Аналогично, имеется единственная (с точностью до матричного подобия) 3-мерная подалгебра $M(2,C)$, а именно, алгебра с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

для которой возможны продолжения, отвечающие аффинно-однородным СПВ-поверхностям общего положения (см. [8],[11]).

§1. ПРОДОЛЖЕНИЕ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР

Известно, что со всякой аффинно-однородной вещественной гиперповерхностью комплексного пространства $\mathbb{C}^3$ связана нетривиальная алгебра Ли линейных векторных полей, касательных к этой поверхности.

Зададим изучаемую СПВ-гиперповерхность M пространства $\mathbb{C}^3$ аффинно-каноническим (см. [4]) уравнением

$$\operatorname{Im} z_3 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2) + \overline{(\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2)} + \sum_{k \ge 3} F_k(z, \bar{z}, \operatorname{Re} z_3). \quad (1.1)$$

Здесь z_1, z_2, z_3 — координаты в 3-мерном комплексном пространстве; $z = (z_1, z_2)$; ε_1 и ε_2 — неотрицательные вещественные коэффициенты; индекс k означает (суммарную) степень слагаемого по входящим в него переменным.

Если считать, что уравнение (1.1) свободно от переменной $\operatorname{Re} z_3$ (поверхность M — *жесткая* или цилиндрическая), то упомянутая алгебра векторных полей на M может быть представлена (см. [4], [5]) как матричная алгебра, состоящая из квадратных матриц 4-ого порядка вида:

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.2)$$

На элементы любой из матриц (1.2) наложены следующие ограничения:

1) $c, q \in R$, а все остальные элементы матрицы, являются, вообще говоря, комплексными числами;

2) в алгебре (1.2) имеется матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

соответствующая векторному полю $\partial / \partial z_3$.

3) вещественная линейная оболочка 2-мерных комплексных векторов $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$, входящих в матрицы обсуждаемой алгебры, совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^2$;

4) элементы a, p и b, s обсуждаемых матриц связаны формулами:

$$\begin{cases} a = 2i\left(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p\right), \\ b = 2i\left(\bar{s} + 2\varepsilon_2 s\right). \end{cases} \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем называть эти формулы L-связкой, имея в виду, что векторы $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ связаны линейным в вещественном смысле соотношением $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$.

В этой статье мы изучаем алгебры, отвечающие поверхностям так называемого общего положения, для которых выполнено условие

$$\varepsilon_1\varepsilon_2(2\varepsilon_1 - 1)(2\varepsilon_2 - 1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \neq 0. \qquad (1.5)$$

Вещественная размерность таких алгебр всегда равна 5 (см. [4]), а векторы $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, так же, как и $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$, оказываются линейно независимыми над $\mathbb{R}$.

Для произвольных же матричных алгебр вида (1.2) верно следующее утверждение.

Предложение 1. Если h — некоторая матричная алгебра, состоящая из матриц вида (1.2), то левые верхние 2×2-блоки этих матриц также образуют алгебру.

Определение 1. Переход от алгебры матриц $g \subset M(2,\mathbb{C})$ к некоторой алгебре h вида (1.2), обладающей перечисленными выше свойствами 1)—4) и имеющей в качестве алгебры 2×2-блоков в точности алгебру g, мы называем *продолжением* алгебры g.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Ни при каких $\theta \in [0, 2\pi)$ 4-мерные вещественные алгебры, подобные алгебрам $su(2) + e^{i\theta}$ и $su(1,1) + e^{i\theta}$, не допускают продолжений до 5-мерных вещественных подалгебр Ли алгебры $M(4,\mathbb{C})$, соответствующих жестким аффинно-однородным СПВ-гиперповерхностям общего положения пространства $\mathbb{C}^3$.*

Доказательство сформулированной теоремы связано с большим количеством обсуждений, приводимых ниже.

Прежде всего, напомним, что необходимым и достаточным условием того, что линейное пространство h, состоящее из квадратных матриц, образует алгебру Ли, является замкнутость этого пространства относительно операции антикоммутативного умножения (скобки)

$$[A, B] = AB - BA$$

(другими словами, скобка любых двух матриц из рассматриваемой алгебры разлагается по базису этой алгебры).

Считая, что некоторая вещественная подалгебра g алгебры Ли $M(2,C)$ продолжается до 5-мерной подалгебры h алгебры $M(4,C)$ с базисом E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, можно утверждать, что каждая из $C_5^2 = 10$ скобок $[E_k, E_l] (1 \le k, l \le 5)$ допускает представление в виде линейной комбинации

$$[E_k, E_l] = t_1E_1 + t_2E_2 + t_3E_3 + t_4E_4 + t_5E_5 \quad (1.6)$$

с некоторыми вещественными коэффициентами $t_j (1 \le j \le 5)$.

При изучении задачи о продолжении можно считать известной лишь продолжаемую алгебру 2×2-матриц. Поэтому рассмотрение 10 скобок сводится к решению системы 10 квадратичных матричных уравнений, содержащей большое число неизвестных элементов базисных матриц.

Общих методов решения нелинейных систем пока не существует. В то же время в задаче о продолжении матричных алгебр удается получать интересные решения.

В силу 4-мерности продолжаемой алгебры g можно считать, что ненулевыми являются левые верхние 2×2-блоки только четырех первых базисных матриц E_1, E_2, E_3, E_4 продолженной 5-мерной алгебры h. В качестве пятой базисной матрицы E_5 можно взять матрицу (1.3), у которой 2×2-блок — нулевой, и вся она имеет очень простой вид.

Тогда условия (1.6) для всех скобок $[E_k, E_5] = q_kE_5$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ автоматически выполняются и никаких ограничений на коэффициенты базисных матриц не содержат.

Нам теперь остается рассмотреть 6 матричных скобок вместо 10. Для удобства введем дополнительные обозначения.

В каждой матрице вида (1.2) ее левый верхний 2×2-блок будем называть e-частью, а еще выделим в ней c-часть, $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$-часть и (a, b)-часть.

В разложениях (1.6) скобок $[E_k, E_l]$ по базису E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 продолженной алгебры h мы будем рассматривать в первую очередь e-части, а затем и остальные выделенные части матриц в указанном выше порядке.

Замечание 1. Помимо выделенных частей в каждой матрице вида (1.2) остается еще элемент, который может быть ненулевым. Это вещественный элемент q третьей строки матрицы. При этом можно считать, что у базисных матриц E_1, E_2, E_3, E_4 обсуждаемых алгебр элемент q равен нулю (за счет добавления к каждой из этих матриц матрицы E_5, умноженной на подходящий числовой множитель). А условие (1.4) обеспечивает вещественность элемента q у скобки любых двух матриц вида (1.2).

Замечание 2. При умножении двух матриц вида (1.2) их е-части перемножаются отдельно, независимо от остальных элементов этих матриц. Поэтому

$$[E_k, E_l]_e = [e_k, e_l]. \qquad (1.7)$$

Замечание 3. Элемент c базисных матриц E_1, E_2, E_3, E_4 обсуждаемых алгебр может быть отличным от нуля. Но у скобки любых двух матриц вида (1.2) этот элемент, как легко убедиться, равен нулю.

Для рассмотрения $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$- и (a,b)-частей скобок (1.6) мы будем использовать два следующих технических факта.

Предложение 2.

$$[E_k, E_l]_{(p,s)} = e_k \begin{pmatrix} p_l \\ s_l \end{pmatrix} - e_l \begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}, \qquad (1.8)$$

$$[E_k, E_l]_{(a,b)} = (e_l - c_l)^T \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} - (e_k - c_k)^T \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

В итоге предлагаемая нами схема изучения задачи о продолжениях матричных алгебр сводится к последовательному рассмотрению (в указанном выше порядке) отдельных частей шести матричных скобок. Несмотря на нелинейный (в целом) характер изучаемой системы уравнений она поддается конструктивному изучению при работе по описанной схеме. Для каждого из выписанных в [10] типов 4-мерных подалгебр алгебры $M(2,\mathbb{C})$ удается (хотя и не без трудностей) решить вопрос о существовании продолжений.

При этом возникают отдельные подсистемы большой системы нелинейных уравнений, отвечающие e-частям, $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$- и (a,b)-частям скобок (1.6).

Подсистема, отвечающая e-части, позволяет получить коэффициенты разложения каждой из шести рассматриваемых скобок по первым 4-м базисным матрицам E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры h.

Подсистемы, связанные с $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$- и (a,b)-частями скобок (1.6), содержат по двенадцать скалярных уравнений относительно неизвестных коэффициентов p_k, s_k ($\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$-часть) и a_k, b_k, c_k ((a,b)-часть) базисных матриц алгебры h. Наиболее сложной частью изучения вопроса о продолжаемости конкретных алгебр является рассмотрение восьми скалярных уравнений, отвечающих L-соотношениям (1.4).

Отметим, что непродолжаемость одного из простейших типов 4-мерных алгебр, а именно, диагонализируемых вещественных подалгебр алгебры $M(2,\mathbb{C})$, была установлена в студенческой научной работе [12].

§ 2. МАТРИЧНЫЕ ПОДОБИЯ И КАНОНИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

Для реализации описанной выше схемы изучения вопроса о продолжаемости конкретных матричных алгебр полезно использовать еще одно соображение.

Вместо рассмотрения исходной матричной алгебры $h \subset M(2,\mathbb{C})$ и алгебры $g \subset M(2,\mathbb{C})$ ее 2×2-блоков удобно перейти к “канонической” форме этих алгебр. При этом каноническим видом 4-мерной алгебры $g \subset M(2,\mathbb{C})$ будем называть алгебру $\hat{g}$ из классификации [10], к которой g сводится матричным подобием.

Например, каноническим видом любой диагонализируемой 4-мерной вещественной подалгебры $g \subset M(2,C)$ является единственная диагональная 4-мерная алгебра с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Пусть для некоторой алгебры $\hat{g}$ из списка [10] и алгебры $g \subset M(2,C)$ 2×2-блоков исходной алгебры h выполняется равенство

$$g = Q\hat{g}Q^{-1}$$

с некоторой невырожденной матрицей $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}$ второго порядка.

Вводя матрицу

$$C = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & 0 & 0 \\ q_3 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

рассмотрим вместо h новую, “каноническую” алгебру $\hat{h} = C^{-1}hC \subset M(4,\mathbb{C})$.

Заметим, что матричные подобия сохраняют коммутационные соотношения в произвольной алгебре, и, в частности, в рассматриваемых подалгебрах $\hat{g}$ и $\hat{h}$.

При этом, как легко проверить, специальный вид (1.2) сохранится и для всех матриц алгебры $\hat{h}$, а левые верхние 2×2-блоки матриц из $\hat{h}$ образуют теперь каноническую алгебру $\hat{g}$.

Новые, "канонические" векторы $\begin{pmatrix}\hat{p}_k\\ \hat{s}_k\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\hat{a}_k\\ \hat{b}_k\end{pmatrix}$ связаны с исходными векторами $\begin{pmatrix}p_k\\ s_k\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}$ формулами $(k = 1,2,3,4)$

$$\begin{pmatrix}\hat{p}_k\\ \hat{s}_k\end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix}p_k\\ s_k\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\hat{a}_k\\ \hat{b}_k\end{pmatrix} = Q^{T}\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

С учетом этих формул соотношение (1.4), т.е. L-связка, примет вид

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_k\\ \hat{b}_k\end{pmatrix} = \hat{L}\begin{pmatrix}\hat{p}_k\\ \hat{s}_k\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где правая часть равна произведению матрицы

$$\hat{L} = 2i\begin{pmatrix} 2(\varepsilon_1 q_1^2 + \varepsilon_2 q_3^2) & 2(\varepsilon_1 q_1 q_2 + \varepsilon_2 q_3 q_4) & (|q_1|^2 + |q_3|^2) & (q_1\overline{q}_2 + q_3\overline{q}_4)\\ 2(\varepsilon_1 q_1 q_2 + \varepsilon_2 q_3 q_4) & 2(\varepsilon_1 q_2^2 + \varepsilon_2 q_4^2) & (\overline{q}_1 q_2 + \overline{q}_3 q_4) & (|q_2|^2 + |q_4|^2)\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

и вектора-столбца $(\hat{p}, \hat{s}, \overline{\hat{p}}, \overline{\hat{s}})^T$.

Теперь мы можем перейти от алгебры h, соответствующей некоторому аффинно-нормальному уравнению однородной поверхности (и простейшей L-связке), к каноническому виду $\hat{h}$ этой алгебры (с более сложной L-связкой (2.2)).

Все последующие технические обсуждения будут связаны с алгеброй $\hat{h}$. Однако, для упрощения записи мы сохраним начальные обозначения для матриц, входящих в эту алгебру и их элементов, называя их соответственно, E_1, E_2 и т.п.

Например, для канонической алгебры $\hat{h}$ в дословной форме справедливо предложение 2, которое мы будем активно использовать в дальнейшем.

По мере необходимости мы будем уточнять, с какой именно алгеброй (исходной или канонической) мы в данный момент работаем.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ УСЛОВИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ

В §§ 3,4 приводится схема доказательства теоремы 1 для семейства алгебр $su(1,1) + e^{i\theta}$. Рассуждение, доказывающее справедливость утверждения теоремы 1 для семейства $su(2) + e^{i\theta}$, является аналогичным.

Итак, рассмотрим алгебру $su(1,1)$ с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix},$$

Таблица умножения для этой алгебры имеет вид

$$[e_1, e_2] = 2e_3,\ [e_2, e_3] = -2e_1,\ [e_3, e_1] = 2e_2. \tag{3.1}$$

Таблица умножения для алгебры $\hat{g} = su(1,1) + e^{i\theta}$ содержит (при любом $\theta \in [0, 2\pi)$) помимо (3.1) еще три тривиальные строки

$$[e_1, e_4] = 0,\ [e_1, e_4] = 0,\ [e_1, e_4] = 0. \tag{3.2}$$

Здесь через e_4 обозначается четвертая базисная матрица $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$ алгебры $\hat{g}$.

Как отмечалось выше, в любой алгебре $g = Q\hat{g}Q^{-1}$, подобной $\hat{g}$ с матрицей подобия $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2\\ q_3 & q_4\end{pmatrix}$, коммутационные соотношения также задаются формулами (3.1), (3.2). При этом имеется в виду, что

$$e_1 = Q\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}Q^{-1},\ e_2 = Q\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Q^{-1},$$

$$e_3 = Q\begin{pmatrix} 0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}Q^{-1},$$

Четвертая базисная матрица $e_4 = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$ алгебры $\hat{g}$ является скалярной и потому не изменяется при подобиях.

Напомним при этом, что переход от алгебры $\hat{h}$ к исходной алгебре h осуществляется за счет подобия, связанного с некоторой, вообще говоря, неизвестной, матрицей Q второго порядка.

Пусть далее $\hat{h}$ — каноническая 5-мерная вещественная алгебра, базис которой имеет вид $(\xi = e^{i\theta})$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & p_1\\ 0 & -i & 0 & s_1\\ a_1 & b_1 & c_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & p_2\\ 1 & 0 & 0 & s_2\\ a_2 & b_2 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & p_3\\ -i & 0 & 0 & s_3\\ a_3 & b_3 & c_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & p_4\\ 0 & \xi & 0 & s_4\\ a_4 & b_4 & c_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

Согласно описанной выше схеме рассмотрим поочередно e-части, $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$- и (a,b)-части шести скобок (1.6).

Легко видеть, что в e-части мы получим шесть автоматически верных равенств (3.1) и (3.2). Для базисных матриц алгебры $\hat{h}$ они примут вид:

$$
\begin{gathered}
[E_1, E_2] = 2E_3 (\operatorname{mod} E_5), \\
[E_1, E_3] = -2E_2 (\operatorname{mod} E_5), \\
[E_2, E_3] = -2E_1 (\operatorname{mod} E_5), \\
[E_1, E_4] = 0 (\operatorname{mod} E_5), \\
[E_2, E_4] = 0 (\operatorname{mod} E_5),\ [E_3, E_4] = 0 (\operatorname{mod} E_5).
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Тогда в $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$-части имеем в силу (1.8) следующие шесть векторных равенств:

$$
\begin{gathered}
e_1 \begin{pmatrix} p_2 \\ s_2 \end{pmatrix} - e_2 \begin{pmatrix} p_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p_3 \\ s_3 \end{pmatrix}, \\
e_1 \begin{pmatrix} p_3 \\ s_3 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} p_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} p_2 \\ s_2 \end{pmatrix}, \\
e_2 \begin{pmatrix} p_3 \\ s_3 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} p_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} p_1 \\ s_1 \end{pmatrix}, \\
e_1 \begin{pmatrix} p_4 \\ s_4 \end{pmatrix} - e_4 \begin{pmatrix} p_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = 0, \\
e_2 \begin{pmatrix} p_4 \\ s_4 \end{pmatrix} - e_4 \begin{pmatrix} p_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = 0,\ e_3 \begin{pmatrix} p_4 \\ s_4 \end{pmatrix} - e_4 \begin{pmatrix} p_3 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0.
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

В форме одного матричного уравнения система (3.5) имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
0 & -1 & i & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -i & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & -i & 2 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 2 & 0 & -i & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\
0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi & -i & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_1 \\ s_1 \\ p_2 \\ s_2 \\ p_3 \\ s_3 \\ p_4 \\ s_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.6}
$$

Обозначая

$$
P = e^{-i\theta} p_4 = \frac{1}{\xi} p_4,\ S = e^{-i\theta} s_4 = \frac{1}{\xi} s_4,
$$

получаем из шести последних уравнений этой системы формулы для векторов $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ в виде

$$
\begin{gathered}
p_1 = iP,\ p_2 = S,\ p_3 = iS,\ p_4 = \xi P, \\
s_1 = -iS,\ s_2 = P,\ s_3 = -iP,\ s_4 = \xi S.
\end{gathered} \tag{3.7}
$$

При этом первые шесть уравнений системы (3.6) выполняются автоматически.

Аналогичным образом, опираясь на формулу (1.9), можно переписать и шесть векторных уравнений, связанных с (a,b)-частями уравнений (1.6). При

$$
R = \xi - c_4 = e^{i\theta} - c_4
$$

имеем здесь в матричной форме

$$
\begin{pmatrix}
-c_2 & 1 & (c_1 - i) & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -c_2 & 0 & (c_1 + i) & 0 & -2 & 0 & 0 \\
-c_3 & -i & 2 & 0 & (c_1 - i) & 0 & 0 & 0 \\
i & -c_3 & 0 & 2 & 0 & (c_1 + i) & 0 & 0 \\
2 & 0 & -c_3 & -i & c_2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & i & -c_3 & -1 & c_2 & 0 & 0 \\
R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_1 - i) & 0 \\
0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_1 + i) \\
0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & c_2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & -1 & c_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & c_3 & i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & -i & c_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.8}
$$

Заметим, что при $R = 0$ седьмое и восьмое уравнения системы (3.8) превращаются в

$$
a_4 = 0,\ b_4 = 0,
$$

что противоречит линейной независимости векторов (a_k, b_k) при $k = 1, 2, 3, 4$.

Следовательно, $R \neq 0$. Тогда, обозначая

$$
A = \frac{a_4}{R},\ B = \frac{b_4}{R},
$$

можно выразить из последних шести уравнений (3.8) все $a_k, b_k (k = \overline{1,3})$ через a_4, b_4, R.

Подставляя эти выражения в первые 6 уравнений системы (3.8) и пользуясь неравенствами $(a_k, b_k) \neq (0,0)$, получаем равенства

$$
c_1 = c_2 = c_3 = 0. \tag{3.9}
$$

Как следствие возникают упрощенные формулы

$$
\begin{gathered}
a_1 = iA,\ a_2 = B,\ a_3 = -iB,\ a_4 = RA, \\
b_1 = -iB,\ b_2 = A,\ b_3 = iA,\ b_4 = RB.
\end{gathered} \tag{3.10}
$$

Теперь остается рассмотреть L-связку векторов $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ и (a_k, b_k).

§4. ОТСУТСТВИЕ ПРОДОЛЖЕНИЙ ДЛЯ АЛГЕБР $su(2)+e^{i\theta}$ И $su(1,1)+e^{i\theta}$

Напомним, что L-связка имеет (в канонической форме) вид

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \hat{L}\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

с матрицей $\hat{L}$ вида (2.3).

Формально говоря, для полного изучения вопроса о продолжаемости алгебр, подобных $g_{\pm}^{\theta}$, мы должны рассмотреть в (4.1) и (2.3) все возможные невырожденные матрицы Q. Однако можно существенно уменьшить количество рассмотрений за счет следующей факторизационной леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ невырожденная матрица, удовлетворяющая условию $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$. Тогда W допускает представление в виде

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ \bar{\zeta} & \bar{\xi} \end{pmatrix}, \qquad (4.2)$$

где $|\xi|^2 - |\zeta|^2 = 1,\ t \in R \setminus \{0\},\ \omega \in C,\ \lambda \in C \setminus \{0\}$.

Эта лемма позволяет рассматривать в качестве матриц Q лишь верхнетреугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & t \end{pmatrix}, \qquad (4.3)$$

т.к. два других сомножителя в разложении (4.2) сохраняют алгебру $su(1,1)+e^{i\theta}$ неизменной.

Предложение 3. Для пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ общего положения не существует решений системы восьми уравнений (4.1) $(k = \overline{1,4})$ с векторами $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ вида (3.7) и (3.9) соответственно и с матрицей Q вида (4.3).

Для доказательства предложения 3 запишем матрицу $\hat{L}$ в следующих кратких обозначениях

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая уравнения (2.2) при $k = \overline{1,3}$, получим систему

$$\begin{cases} iA = M_1(iP) + M_2(-iS) + M_3\overline{(iP)} + M_4\overline{(-iS)}, \\ -iB = N_1(iP) + N_2(-iS) + N_3\overline{(iP)} + N_4\overline{(-iS)}, \\ B = M_1S + M_2P + M_3\bar{S} + M_4\bar{P}, \\ A = N_1S + N_2P + N_3\bar{S} + N_4\bar{P}, \\ -iB = M_1(iS) + M_2(-iP) + M_3\overline{(iS)} + M_4\overline{(-iP)}, \\ iA = N_1(iS) + N_2(-iP) + N_3\overline{(iS)} + N_4\overline{(-iP)}. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Домножая два последних уравнения системы (4.4) на $\pm i$ и складывая их соответственно с третьим и четвертым уравнениями, получим систему более простого вида

$$\begin{cases} A = M_1P - M_2S - M_3\bar{P} + M_4\bar{S}, \\ -B = N_1P - N_2S - N_3\bar{P} + N_4\bar{S}, \\ M_1S + M_4\bar{P} = 0, \\ N_2P + N_3\bar{S} = 0, \\ B = M_2P + M_3\bar{S}, \\ A = N_1S + N_4\bar{P} \end{cases} \qquad (4.5)$$

Выражая из двух последних уравнений этой системы A и B и подставляя полученные выражения в два первых уравнения (4.5), можно уменьшить до 4-х число уравнений в системе. При этом два самых простых уравнения системы (4.5) рассмотрим отдельно как однородную систему

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_4 \\ \overline{N_3} & \overline{N_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S \\ \bar{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.6)$$

Определитель этой системы есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\omega^2) & \omega t \\ \omega t & 2\varepsilon_2 t^2 \end{vmatrix} =$$
$$= t^2(4\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\omega^2) - \omega^2) =$$
$$= t^2(4\varepsilon_1\varepsilon_2 + (4\varepsilon_2^2 - 1)\omega^2).$$

Напомним, что в силу линейной независимости набора векторов $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ $(k = 1,2,3,4)$ обсуждаемый нами вектор $\begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix}$ не может быть нулевым.

Поэтому должен равняться нулю определитель системы (4.6). Это означает, что

$$\varepsilon_1 = \frac{(1 - 4\varepsilon_2^2)\omega^2}{4\varepsilon_2}. \qquad (4.7)$$

Из этой формулы следует, что выражение ω^2 обязано быть вещественным, т.е. параметр ω может быть либо вещественным, либо чисто мнимым.

Кроме того, второе уравнение (4.6) можно переписать в виде

$$\bar{P} = -\frac{\omega}{2\varepsilon_2 t} S, \qquad (4.8)$$

что позволяет освободиться в уравнениях изучаемой системы от P и $\bar{P}$.

Используя полученные формулы (4.7) и (4.8), можно записать оставшуюся часть системы (4.4) в виде следующего матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} -2\varepsilon_2(8t^2\varepsilon_2^2 - 1 - t^2 - |\omega|^2) & 4t^2\varepsilon_2^2 - |\omega|^2) \\ |\omega|^2 - 4t^2\varepsilon_2^2 & 2\varepsilon_2(1 + t^2 - |\omega|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Наличие у системы (4.9) с матрицей Ω в левой части нетривиального решения S означает, как легко видеть, выполнение двух необходимых условий:

$$\det(\Omega) = 0, \ \Omega_{21}^2 = \Omega_{22}^2. \quad (4.10)$$

Остается заметить, что система нелинейных уравнений (4.10) равносильна более простой совокупности условий

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + t^2 - |\,\omega\,|^2 = 0, \\ 4t^2\varepsilon_2^2 - 1 - t^2 = 0. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

В случае вещественного ω $(\omega^2 = |\,\omega\,|^2)$ значение параметра ε_1, определяемое по формуле (4.7) с учетом (4.11), оказывается отрицательным.

А в случае чисто мнимого ω $(\omega^2 = -|\,\omega\,|^2)$ для параметров ε_1 и ε_2 выполняются тождественно совпадающие формулы

$$\varepsilon_1 = \frac{(4\varepsilon_2^2 - 1)\,|\,\omega\,|^2}{4\varepsilon_2}, \ \ \varepsilon_2 = \frac{(4\varepsilon_2^2 - 1)\,|\,\omega\,|^2}{4\varepsilon_2}.$$

Тем самым, даже шесть уравнений из восьми, входящих в L-связку, не могут выполняться при рассматриваемых нами ограничениях на параметры ε_1 и ε_2. Предложение 3 доказано.

Замечание 1. Случай $|\,a\,|^2 - |\,b\,|^2 = 0$, потенциально возможный для невырожденной матрицы $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, рассматривается отдельно. Решение системы (2.2) в этом случае также оказывается невозможным для пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ общего положения.

Тем самым, утверждение о непродолжаемости алгебр $g_-^\theta = su(1,1) + e^{i\theta}$ считаем доказанным.

Замечание 2. В случае семейства алгебр $g_+^\theta = su(2) + e^{i\theta}$ справедливо утверждение о факторизации, аналогичное лемме 1, причем даже в более простой формулировке, не требующей исключений. Матричное уравнение, аналогичное (4.9), имеет здесь вид

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_2(1 - 8t^2\varepsilon_2^2 - t^2 + |\omega|^2) & 4t^2\varepsilon_2^2 - |\omega|^2) \\ |\omega|^2 - 4t^2\varepsilon_2^2 & 2\varepsilon_2(t^2 - 1 - 3|\omega|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Одним из необходимых условий выполнения такого уравнения при каком-либо комплексном $S \neq 0$ является равенство нулю следа матрицы Ω из левой части (4.12). В данном случае

$$tr(\Omega) = 2\varepsilon_2(1 - 8t^2\varepsilon_2^2 - t^2 + |\,\omega\,|^2) +$$
$$+ 2\varepsilon_2(t^2 - 1 - 3\,|\,\omega\,|^2) = -4\varepsilon_2(4t^2\varepsilon_2^2 + |\,\omega\,|^2)$$

не может равняться нулю. Из этой выкладки следует справедливость теоремы 1 в части, связанной с алгеброй $su(2)$.

§ 5. ПРИМЕР ПРОДОЛЖЕНИЯ 4-МЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

В этом параграфе мы покажем, что в отличие от алгебр, подобных $su(2) + e^{i\theta}$ и $su(1,1) + e^{i\theta}$ и не допускающих продолжений, имеются и другие, “позитивные”, примеры 4-мерных алгебр.

Рассмотрим алгебру, обозначенную в классификации [10] через $g^{(2)}$ и имеющую базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

На основе техники продолжения, описанной в § 1, естественно вводятся матрицы E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, претендующие на роль базисных матриц продолженной алгебры.

Последовательное рассмотрение $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$- и $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$-частей скобок $[E_k, E_l]$ $(1 \le k, l \le 4)$ приводит тогда к завершающей системе $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \hat{L}\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ $(1 \le k \le 4)$ из восьми уравнений.

Заметим, что получение этой системы на основе описаний § 1 требует лишь аккуратности в вычислениях. Сама же система является достаточно громоздкой, и потому мы ее здесь не приводим. Вместо этого укажем, что семейство ее решений является не менее чем 2-параметрическим, и приведем здесь одно из таких решений.

В матричной форме оно представляет собой базис алгебры, являющейся продолжением алгебры $g^{(2)}$. Этот базис имеет (в каноническом изображении) вид:

$$E_1=\begin{pmatrix}0&1&0&3\\0&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}1&0&0&-i\\0&-1&0&-3\\4&-12i&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0&-i\\0&1&0&3\\-20&20i&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad (5.2)$$

$$E_4=\begin{pmatrix}i&0&0&1\\0&i&0&3i\\-4i&-4&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, E_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Отметим, что переход от алгебры (5.2) к алгебре, отвечающей каноническому аффинному уравнению однородной поверхности и удовлетворяющей, например, условиям (1.4), осуществляется подобием с матрицей

$$C=\begin{pmatrix}i&1&0&0\\i&-1/3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \qquad (5.3)$$

При этом параметрами в системе (1.4) являются $\varepsilon_1 = 3/4, \varepsilon_2 = 1/4$.

Обсуждаемую алгебру (5.2) можно проинтегрировать и получить соответствующую ей однородную поверхность. Для этого воспользуемся способом, описанным в [4], и решим связанную с алгеброй систему уравнений в частных производных.

Система содержит 4 уравнения (по числу нетривиальных базисных матриц в наборе (5.2)), а каждое из этих уравнений имеет вид

$$\operatorname{Re}\left(E_k(\Phi)\right)_{|M} \equiv 0. \qquad (5.4)$$

Здесь $\Phi = -v + F(z,\overline{z})$ — определяющая функция искомой поверхности M, а $F(z,\overline{z})$ — неизвестная (пока) вещественнозначная аналитическая функция переменных $z=(z_1,z_2)$ и $\overline{z}=(\overline{z}_1,\overline{z}_2)$.

Через E_k здесь обозначено линейное векторное поле, связанное с соответствующей базисной матрицей $E_k=\begin{pmatrix}A_1^{(k)}&A_2^{(k)}&0&p_k\\B_1^{(k)}&B_2^{(k)}&0&s_k\\a_k&b_k&c_k&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ формулой

$$E_k=\left(A_1^{(k)}z_1+A_2^{(k)}z_2+p_k\right)\frac{\partial}{\partial z_1}+ \\ +\left(B_1^{(k)}z_1+B_2^{(k)}z_2+s_k\right)\frac{\partial}{\partial z_2}+ \qquad (5.5) \\ +\left(a_kz_1+b_kz_2+c_kw\right)\frac{\partial}{\partial w}$$

(мы используем одно и то же обозначение для матриц и векторных полей).

Замечание. Для базисной матрицы E_5 из (5.2) и соответствующего векторного поля условие (5.4) на любой жесткой поверхности $v=F(z,\overline{z})$ выполняется автоматически. По этой причине обсуждаемая нами система содержит лишь 4, а не 5 уравнений.

Матрицам $E_1 - E_4$ из (5.2) соответствуют следующие векторные поля:

$$E_1=(z_2+3)\frac{\partial}{\partial z_1}-4z_2\frac{\partial}{\partial w},$$
$$E_2=(z_1-i)\frac{\partial}{\partial z_1}-(z_2+3)\frac{\partial}{\partial z_2}+ \\ +(4z_1-12iz_2+2w)\frac{\partial}{\partial w},$$
$$E_3=(z_1-i)\frac{\partial}{\partial z_1}+(z_2+3)\frac{\partial}{\partial z_2}+ \qquad (5.6) \\ +(-20z_1+20iz_2-4w)\frac{\partial}{\partial w},$$
$$E_4=i(z_1-i)\frac{\partial}{\partial z_1}+i(z_2+3)\frac{\partial}{\partial z_2}+ \\ +(-4iz_1-4z_2)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Сдвигая координаты преобразованием

$$z_1^*=z_1-i,\ z_2^*=z_2+3, \qquad (5.7)$$

учитывая равенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial w}=i/2$$

и опуская для простоты звездочки, получим следующую систему уравнений

$$\operatorname{Re}\left(z_2\frac{\partial F}{\partial z_1}-2iz_2\right)=0,$$
$$\operatorname{Re}\left(z_1\frac{\partial F}{\partial z_1}-z_2\frac{\partial F}{\partial z_2}+(2iz_1+6z_2-20-F)\right)=0,$$
$$\operatorname{Re}\left(z_1\frac{\partial F}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial F}{\partial z_2}+(-10iz_1-10z_2+40+2F)\right)=0, \qquad (5.8)$$
$$\operatorname{Re}\left(iz_1\frac{\partial F}{\partial z_1}+iz_2\frac{\partial F}{\partial z_2}+(2z_1-2iz_2)\right)=0.$$

Освободим третье уравнение системы (5.8) от явного вхождения в него функции F и запишем далее уравнения системы в вещественной форме. Для этого мы полагаем здесь и везде ниже, что $z_k = x_k + iy_k$ при $k = 1,2$; $w = u + iv$, т. что x_1, y_1, x_2, y_2, u, v — шестерка вещественных координат в пространстве $\mathbb{C}^3$.

С учетом введенных обозначений получаем систему

$$\begin{gathered} x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} = -4y_2, \\ x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = \\ = 40 + 2F + 4y_1 - 12x_2, \\ 3x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + 3y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = \\ = -12y_1 - 4x_2, \\ -y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} = \\ = -4x_1 - 4y_2. \end{gathered} \quad (5.9)$$

Мы будем решать ее уравнения поочередно, постепенно уменьшая количество уравнений и число переменных в системе.

Так, на первом шаге мы найдем общее решение первого уравнения системы (5.9). Заменяя (см., например, [13]) квазилинейное уравнение 1-го порядка системой ОДУ и вычисляя ее интегралы, мы получаем здесь

$$F = -4y_1 + G(x_1 y_2 - x_2 y_1, x_2, y_2), \quad (5.10)$$

где G — произвольная аналитическая функция 3-х переменных.

Вводя формулами

$$t_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1, t_2 = x_2, t_3 = y_2, t_4 = y_1 \quad (5.11)$$

новые переменные, можно переписать оставшиеся уравнения системы (5.9) в виде

$$\begin{gathered} t_2 \frac{\partial G}{\partial t_2} + t_3 \frac{\partial g}{\partial t_3} = 12t_2 - 40 - 2G, \\ 2t_1 \frac{\partial G}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial G}{\partial t_2} - t_3 \frac{\partial G}{\partial t_3} = -4t_2, \\ t_3 \frac{\partial G}{\partial t_2} - t_2 \frac{\partial G}{\partial t_3} = -4t_3. \end{gathered} \quad (5.12)$$

Последнее уравнение новой системы имеет решение

$$G = G(t_1, t_2, t_3) = 4t_2 + H(t_1, t_2^2 + t_3^2) \quad (5.13)$$

с произвольной аналитической функцией H от двух переменных.

Обозначая здесь

$$r_1 = t_1, r_2 = t_2^2 + t_3^2, \quad (5.14)$$

два оставшихся уравнения системы (5.12) можно записать в виде

$$r_2 \frac{\partial H}{\partial r_2} = -20 - H, \; r_1 \frac{\partial H}{\partial r_1} - r_2 \frac{\partial H}{\partial r_2} = 0. \quad (5.15)$$

Последняя система, как легко видеть, имеет общим решением функцию

$$H(r_1, r_2) = \frac{D}{r_1 r_2} - 20, \quad (5.16)$$

где D — произвольная константа.

Возвращаясь к функции $F(z, \bar{z}) = F(x_1, x_2, y_1, y_2)$, получаем (с точностью до аффинных преобразований) уравнение искомой поверхности в виде

$$v = F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{(x_1 y_2 - x_2 y_1)(x_2^2 + y_2^2)}. \quad (5.17)$$

В комплексной форме это же уравнение можно переписать иначе:

$$v = \frac{1}{\mathrm{Im}(z_1 z_2) \mid z_2 \mid^2}. \quad (5.18)$$

А в координатах

$$z_1^* = iz_1 + z_2, z_2^* = -iz_1 + z_2$$

уравнение (5.18) примет вид

$$v = (\mid z_1 \mid^2 - \mid z_2 \mid^2)^{-1} \cdot \mid z_1 + z_2 \mid^{-2}. \quad (5.19)$$

Это и есть искомая однородная поверхность. Соответствующая ей алгебра линейных векторных полей получена продолжением 4-мерной алгебры, подобной $g^{(2)}$. Несложно проверить строгую псевдовыпуклость (в любой точке) этой поверхности. Коэффициенты ε_1 и ε_2 ее аффинного канонического уравнения оказываются равными $3/4$ и $1/4$, что соответствует значениям формальных параметров ε_1 и ε_2 алгебры (5.2). Этот факт, впрочем, устанавливается несколько сложнее, чем строгая псевдовыпуклость поверхности (5.19).

Замечание 1. На существование большого семейства аффинно однородных поверхностей, задаваемых уравнениями

$$v = (\mid z_1 \mid^2 - \mid z_2 \mid^2)^{\mu} \cdot \mid z_1 + z_2 \mid^{\nu}. \quad (5.20)$$

было обращено внимание еще в [4]. Отметим, однако, что часть поверхностей из этого семейства имеет знаконеопределенную форму Леви. Мы же изучаем в этой статье лишь СПВ-случай.

Замечание 2. Вопрос о существовании для матричных алгебр Ли, подобных алгебре $g^{(2)}$, продолжений, не сводящихся к поверхностям из семейства (5.20), до конца пока не исследован.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cartan E.* Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — (4) 11 (1932). — P. 17—90 (Oeuvres II, 2, 1231—1304).

2. *Doubrov B.M.* Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry / B. M. Doubrov, B. P. Komrakov , M. Rabinovich // Geometry and Topology of Submanifolds. — VIII, World Scientific. — 1996. — P. 168—178.

3. *Fels G.* Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — Vol. 210(2008). — P. 1—82.

4. *Лобода А.В.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия ВУЗов. Сер. Математика. — 2003. — № 10. — С. 38—50.

5. *Лобода А.В.* Об одном семействе алгебр Ли, связанных с однородными поверхностями / А. В. Лобода // Труды МИАН. — 2006. — Т. 253. — С. 111—126.

6. *Болдырева О.А.* Об одном семействе непродолжаемых матричных алгебр Ли / О. А. Болдырева, А. В. Лобода // Черноземный альманах научных исследований. — Воронеж, 2007. — № 1(5). — С. 89—102.

7. *Данилов М.С.* О продолжении 4-мерных матричных алгебр Ли / М. С. Данилов, В. К. Евченко, А. В. Лобода // Воронежская зимняя матем. школа. Тез. докл. — Воронеж, 2008. — С. 47—48.

8. *Демин А.М.* Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ / А. М. Демин, А. В. Лобода // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84. — № 5. — С. 791—794.

9. *Евченко В.К.* О продолжении матричных алгебр Ли, связанных с однородными поверхностями / В. К. Евченко, А. В. Лобода // Международная школа-семинар по геометрии и анализу. Тез. докл. — Абрау-Дюрсо, 2008. — С. 31—33.

10. *Белых Ф.А.* Вещественные подалгебры малых размерностей матричной алгебры Ли $M(2,C)$ / Ф. А. Белых, А. Ю. Борзаков, А. В. Лобода // Известия ВУЗов. Сер. Математика. — 2007. — № 5. — С. 13—24.

11. *Лобода А.В.* Действие аффинной подгруппы в комплексной касательной плоскости к однородной поверхности / А. В. Лобода // Воронежская зимняя матем. школа. Тез. докл. — Воронеж, 2009. — С. 106—107.

12. *Просветов С.В.* Матричные подобия и нелинейные системы уравнений / С. В. Просветов, И. И. Шевченко // Вестн. Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Сер. “Студент и наука”. — 2008. — Вып. 4. — С. 8—10.

13. *Тихонов А.Н.* Дифференциальные уравнения. / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. — М.: Наука, 1985. — 231 с.

Евченко Валерия Константиновна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета (ВГАСУ). тел. 71-53-62 (ВГАСУ), e-mail: lera_evk@mail.ru

Лобода Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ВГАСУ, профессор кафедры математического моделирования ВГУ. тел. 71-53-62 (ВГАСУ), 208-364 (ВГУ), e-mail: lobvgasu@yandex.ru

Evchenko Valerija Konstantinovna — candidate of physico-mathematical sciences, senjor teacher, chaire of higher mathematics of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering; tel.: 71-53-62 (work), e-mail: lera_evk@mail.ru

Loboda Alexander Vasil’evich — doctor of of physico-mathematical sciences, professor, chaire of higher mathematics of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, professor, chaire of mathematical modeling of Voronezh State University. tel.: 71-53-62 (VGASU), 208-364(VSU), e-mail: lobvgasu@yandex.ru