

# ВЕТВЛЕНИЕ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФАЗ НЕОДНОРОДНОГО КРИСТАЛЛА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ФАЗЫ С ТРЕХМЕРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Б. М. Даринский, И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 25.03.09

**Аннотация.** Дано описание методики отыскания раскладов экстремалей фредгольмовых функционалов, бифурцирующих из точек минимумов с трехмерными вырождениями и особенностями 6-го порядка. Основной иллюстрирующий пример — задача о ветвлении модулированных (несоизмеримых) сегнетоэлектрических фаз неоднородных кристаллов по одному направлению. Использован модифицированный метод Ляпунова—Шмидта (редукция к ключевой функции на конечномерном пространстве), оснащенный элементами теории особенностей гладких функций. Акцент сделан на случай ключевой функции с симметрией куба.

**Ключевые слова:** фредгольмов функционал, функционал энергии кристалла, термодинамический потенциал, экстремаль, бифуркация, метод Ляпунова—Шмидта, тип особенности, симметрия.

**Abstract.** A description of the distribution of extremals of Fredholm functionals bifurcation points of the minima of 3-dimensional features of degeneration and the sixth order. The main illustrating example — the task of branching ferroelectric phase heterogeneous crystals. We use a modified method of Lyapunov—Schmidt, equipped with the elements of the theory of singularities of smooth functions. Emphasis is placed on a key function of the cub symmetry.

**Key words:** Fredgolgolm functional, functional of energy of cristall, extremal, bifurcation, singularity, simmetry, method of Lyapunov—Schmidt.

## ВВЕДЕНИЕ

Широко известно, что в теории Л. Д. Ландау [1], [2] модулированные сегнетоэлектрические фазы неоднородных кристаллов определяются нелинейными дифференциальными уравнениями (уравнениями Эйлера—Лагранжа экстремалей функционалов энергии). Нелинейность уравнений задается термодинамическими потенциалами, алгебраическое строение которых определяется как на основе опытных данных, так и на основе общих теоретических соображений.

Общематематический аспект задачи о фазовых переходах в кристаллах заключен в бифуркационном анализе экстремалей гладкого фредгольмова функционала (с параметрами) вблизи точки минимума с многомерным вырождением [3]. Решение этой задачи можно получить посредством редукции Ляпунова—Шмидта: сведением к анализу ключевых функций, представленных в виде многопараметрических семейств полиномов от нескольких переменных

[3], [4]. Вычисление главной части ключевой функции осуществляется через ритцевскую аппроксимацию (вообще говоря, нелинейную) функционала по конечной совокупности мод бифуркации.

Основной научный результат статьи — изложение подхода к изучению 3-мерных раскладов экстремалей вблизи G-инвариантной min-особенности 6-го порядка, где G — группа симметрий 3-мерного куба.

## 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ КРИСТАЛЛА

В случае трехкомпонентного параметра порядка при описании модулированных (несоизмеримых) по одному направлению сегнетоэлектрических структур кристаллов используется [1] потенциал

$$\begin{aligned} \Pi = & |w|^6 + \beta |w|^4 + \alpha |w|^2 + \\ & + q(w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2) |w|^2 + \\ & + \varkappa(w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2), \\ & w := (w_1, w_2, w_3)^\top, \end{aligned}$$

входящий в лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|^2 - \mu \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 \right) + \Pi(w)$$

функционала энергии

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial w}{\partial z}, w \right) dz.$$

Сегнетоэлектрические фазы, соответствующие экстремалам этого функционала при условии периодичности

$$w(z + 2\pi) = w(z), \quad (1)$$

определяются уравнением

$$f(x) = 0, x \in E, f(x) \in F, \quad (2)$$

где

$$f(x) := \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \text{grad } \Pi(w).$$

Нелинейный оператор  $f$ , действующий из банахова пространства

$$E := \Pi_{2\pi}^4 =$$

$$= \{w \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid w(z + 2\pi) = w(z)\}$$

(пространства четырежды дифференцируемых  $2\pi$ -периодических функций со значениями в  $\mathbb{R}^3$ ) в банахово пространство  $F := \Pi_{2\pi}^0$  (пространство непрерывных периодических функций со значениями в  $\mathbb{R}^3$ ), является фредгольмовым (аналитического) индекса нуль [5]. Исследование уравнения (2) можно провести, перейдя к ключевой функции.

## 2. ГРУППА СИММЕТРИЙ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ И НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ГЛАВНОЙ ЧАСТИ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ

Легко заметить, что группа  $\mathcal{G}$  симметрий исходного уравнения (2) порождена преобразованиями

$$g_1 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, g_2 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

$$g_3 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix},$$

$$g_\omega : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_\omega(1) \\ w_\omega(2) \\ w_\omega(3) \end{pmatrix}, \forall \omega \in S_3,$$

$$g_4 : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1(-z) \\ w_2(-z) \\ w_3(-z) \end{pmatrix},$$

$$J_\varphi : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_1(z + \varphi) \\ w_2(z + \varphi) \\ w_3(z + \varphi) \end{pmatrix}, \forall \varphi \in \mathbb{R},$$

$S_3$  — группа перестановок третьего порядка.

При некоторой локализации параметров получим в нуле 6-мерное вырождение со следующими модами бифуркации:

$$e_1 = \begin{pmatrix} c(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} s(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c(z) \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ s(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c(z) \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s(z) \end{pmatrix},$$

где

$$c(z) = \sqrt{2} \cos(z), s(z) = \sqrt{2} \sin(z).$$

В линейной оболочке  $\mathcal{N} = \text{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ , естественно отождествляемой с  $\mathbb{R}^6$  (пространством ключевых параметров), индуцируется действие группы  $\mathcal{G}$ . Полученный сужением образ этой группы в  $SO(6)$  (в специальной группе ортогональных матриц шестого порядка) также обозначим  $\mathcal{G}$ . Нетрудно убедиться в том, что действие группы  $\mathcal{G}$  в  $\mathbb{R}^6$  порождено матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$U_\omega$  (матрица оператора  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3)^\top \mapsto (\xi_{\omega(1)}, \eta_{\omega(1)}, \xi_{\omega(2)}, \eta_{\omega(2)}, \xi_{\omega(3)}, \eta_{\omega(3)})^\top$ ),

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) - \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) - \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** Ключевая функция

$$W(\xi) := \inf_{x: g(w)=\xi} V(x), \xi \in R^6, \quad (3)$$

где

$$g(w) = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)^\top, g_j(w) := \langle w, e_j \rangle$$

( $\langle w, e_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w e_j dz$ ), наследует симметрию

функционала  $V$ : функция  $W$  инвариантна относительно действия  $\mathcal{G}$  на  $\mathbb{R}^6$ .

Доказательство этой теоремы несложно провести, если воспользоваться общими теоремами о наследовании симметрий ключевыми функциями [3].

Если воспользоваться алгоритмом вычисления тейлоровских разложений ключевых функций [3] и указанной выше симметрией, то можно получить следующее утверждение.

**Теорема 2.** Ключевая функция  $W(\xi)$  имеет (с точностью до масштабирующих преобразований аргумента и общего множителя, зависящего от констант термодинамического потенциала) следующий вид:

$$(I_1 + I_2 + I_3)^3 + \varepsilon(I_1 + I_2 + I_3)^2 + \delta(I_1 + I_2 + I_3) + \gamma_1(I_4^2 + I_5^2 + I_6^2) + \gamma_2(I_7^2 + I_8^2 + I_9^2) + (p_1(I_4^2 + I_5^2 + I_6^2) + p_2(I_7^2 + I_8^2 + I_9^2))(I_1 + I_2 + I_3) + q_1 I_1 I_2 I_3 + q_2 I_4 I_5 I_6 + O(|\xi|^8),$$

где  $I_1, \dots, I_9$  — образующие инварианты действия окружности  $\mathbf{z} \rightarrow \exp(i\varphi)\mathbf{z}$  (вектор  $\xi \in \mathbb{R}^6$  отождествлен с комплексным вектором  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^\top \in \mathbb{C}^3$ ,  $z_1 = \xi_1 + i\xi_2, z_2 = \xi_3 + i\xi_4, z_3 = \xi_5 + i\xi_6$ ):

$$I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2, I_3 = \xi_5^2 + \xi_6^2,$$

$$I_4 = \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4, I_5 = \xi_3 \xi_5 + \xi_4 \xi_6,$$

$$I_6 = \xi_5 \xi_1 + \xi_6 \xi_2, I_7 = -\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3,$$

$$I_8 = -\xi_3 \xi_6 + \xi_4 \xi_5, I_9 = -\xi_5 \xi_2 + \xi_6 \xi_1.$$

Коэффициенты  $\varepsilon, \delta, \gamma_k, q_k$  допускают явные выражения через коэффициенты термодинамического потенциала  $\beta, \alpha, q, \varkappa$ . При этом  $\varepsilon, \delta, \gamma_k = O(\beta, \alpha, \varkappa)$ .

Образующей системой инвариантов действия группы  $\mathcal{G}$  (используемой в формулировке теоремы) является следующий набор многочленов:

$$J_1 = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$J_2 = I_4^2 + I_5^2 + I_6^2,$$

$$J_3 = I_7^2 + I_8^2 + I_9^2,$$

$$J_4 = I_1 I_2 I_3, J_5 = I_4 I_5 I_6.$$

После введения полярных координат  $z_1 = r_1 \exp(i\psi_1), z_2 = r_2 \exp(i\psi_2), z_3 = r_3 \exp(i\psi_3)$  получим функцию в форме

$$U = J_1^3 + \varepsilon J_1^2 + \delta J_1 + \gamma_1 J_2 + \gamma_2 J_3 + (p_1 J_2 + p_2 J_3) J_1 + q_1 J_4 + q_2 J_5 + O(|\xi|^8) = \sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + \gamma_1 \times (r_1^2 r_2^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_2) + r_2^2 r_3^2 \cos^2(\psi_2 - \psi_3) + r_3^2 r_1^2 \cos^2(\psi_3 - \psi_1)) + \gamma_2 (r_1^2 r_2^2 \sin^2(\psi_1 - \psi_2) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_2 - \psi_3) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_3 - \psi_1)) + (p_1 (r_1^2 r_2^2 \cos^2(\psi_1 - \psi_2) + r_2^2 r_3^2 \cos^2(\psi_2 - \psi_3) + r_1^2 r_3^2 \cos^2(\psi_3 - \psi_1)) + p_2 (r_1^2 r_2^2 \sin^2(\psi_1 - \psi_2) + r_1^2 r_3^2 \sin^2(\psi_2 - \psi_3) + r_3^2 r_1^2 \sin^2(\psi_3 - \psi_1))) \sigma_1 + q_1 \sigma_3 + q_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \cos(\psi_2 - \psi_3) \times \cos(\psi_3 - \psi_1) \sigma_3 + O(|r|^8).$$

Здесь и ниже

$$\sigma_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2,$$

$$\sigma_2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2,$$

$$\sigma_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2.$$

Точки, стационарные по  $\psi_j$ , находятся из уравнения  $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \psi_j} = 0$ . Ясно, что эти точки определяются нулями функций  $\cos(\psi_j - \psi_k), \sin(\psi_j - \psi_k)$ . Нетрудно заметить, что, например, следующие подмножества являются квазиинвариантными подмножествами [6] для этой функции:

$$\mathcal{M}_0 := \{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3\},$$

$$\mathcal{M}_1 := \{\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_1 = \pi / 2\}.$$

Сузив  $\tilde{U}$  на  $\mathcal{M}_0$  или  $\mathcal{M}_1$ , получим (редуцированную) функцию вида

$$W = \sigma_1^3 + \varepsilon\sigma_1^2 + \delta\sigma_1 + p\sigma_1\sigma_2 + \gamma\sigma_2 + q\sigma_3, \quad (4)$$

анализ которой можно осуществить посредством вторичных редукций [7].

### 3. НЕКОТОРЫЕ ЗАПРЕТЫ ДЛЯ *bif*-РАСКЛАДОВ

Пусть  $W$  — функция вида (4) с условием конечной кратности (автоматически кратности 125) в нуле старшей однородной части (порядка 6). Это предположение означает, что  $q \neq 0$ . Через  $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2, l_3)$  обозначим *bif*-расклад (количества минимумов, седел индекса (Морса) 1, седел индекса 2 и количество максимумов). Из формулы Эйлера следует, что для максимального расклада (из 125 критических точек)

$$l_1 + l_3 = 62, l_0 + l_2 = 63.$$

**Теорема 3.** Бифурцирующие (из нуля) критические точки функции (4) могут располагаться лишь на координатных осях  $r_j = r_k = 0$ , на диагональных осях  $r_1 = \pm r_2 = \pm r_3$  и на диагональных плоскостях  $r_j = \pm r_k$ .

**Доказательство.** Так как

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r},$$

$$\det_{\Pi} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) = 8r_1 r_2 r_3 (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = (3\sigma_1^2 + 2\varepsilon\sigma_1 + \delta + p\sigma_2, p\sigma_1 + \gamma, q) \neq 0,$$

то критические точки могут появляться лишь при условии

$$r_1 r_2 r_3 (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2) = 0,$$

эквивалентном утверждению теоремы.

**Теорема 4.** Если старшая часть функции (4) принимает в нуле строго минимальное значение, то  $p > -4$  и  $27 + 9p + q > 0$ .

**Доказательство.** Для старшей части  $W_0$  имеем

$$W_0 = \sigma_1^3 + p\sigma_1\sigma_2 + q\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 + p\sigma_2) + q\sigma_3.$$

Так как  $\sigma_1 \geq 0$ , то проверка первого утверждения теоремы сводится к проверке положительности сужения  $W_0$  на координатную плоскость  $r_3 = 0$ , то есть положительности определенности кватерничной формы

$$\sigma_1^2 + p\sigma_2 = r_1^4 + r_2^4 + ar_1^2 + r_2^2, a = 2 + p,$$

которая положительна, как известно [3], тогда и только тогда, когда  $a > -2$ .

Второе утверждение получается посредством проверки положительной определенности сужения  $W_0$  на диагональ  $r_1 = r_2 = r_3$ .

**Теорема 5.** Если  $\mathcal{L}$  — максимальный *bif*-расклад для *min*-особенности шестого порядка, то для соответствующей возмущенной функции  $W$  начало координат является точкой локального минимума.

**Доказательство** проводится через рассмотрение сужений  $W|_{r_k=0}$ . В случае максимального расклада соответствующие расклады критических точек для  $W|_{r_k=0}$  также будут максимальными. Следовательно,  $\frac{\partial^2 W}{\partial r_k^2}(0) > 0 \forall k$  (для функции с симметрией квадрата  $\frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2}(0) = 0$ ).

**Теорема 6.** Если  $\mathcal{L}$  — *bif*-расклад для *min*-особенности шестого порядка на  $\mathbb{R}^3$ , то на каждой из полуосей координат и на диагональных полуосях существует не более двух ненулевых критических точек.

Если на одной из таких полуосей имеется пара ненулевых критических точек, то эти точки разнотипны (с различными значениями индекса Морса).

**Доказательство.** Первое утверждение непосредственно проверяется через рассмотрение сужений  $W|_{r_k=0}$ . Невозможность существования на каждой оси пары минимумов или максимумов также проверяется через рассмотрение сужений  $W|_{r_k=0}$ . Менее тривиален случай пары седел. Предположим противное: пусть на положительной полуоси  $r_2 = r_3 = 0, r_1 \geq 0$  имеется пара ненулевых седел (или, что эквивалентно, имеется четыре седла на всей оси  $r_2 = r_3 = 0$ ). В случаях остальных осей рассуждения аналогичны. Для критической точки на данной оси координат выполняется соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial r_1}(r_1, 0, 0) = 2r_1(3r_1^4 + 2\varepsilon r_1^2 + \delta) = 0. \quad (5)$$

Следовательно,

$$r_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}, \varepsilon < 0, \delta < \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

В случае левого корня ( $r_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}$ ) имеем (в силу предположения противного)  $\frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r_3^2} > 0$ , а в случае правого ( $r_1^2 = -\frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}$ ) выполнено неравенство  $\frac{\partial^2 W}{\partial r_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r_3^2} < 0$ .  
Так как

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_k^2}(r_1, 0) = 2((3+p)r_1^4 + (\varepsilon + \gamma)r_1^2 + \delta), k > 1,$$

то, в силу (5), для одной из осей получим  $pr_1^2 + \gamma - \varepsilon > 0$  для левого корня и  $pr_1^2 + \gamma - \varepsilon < 0$  — для правого. Или, соответственно,

$$\frac{p}{3}(-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \varepsilon > 0$$

и

$$\frac{p}{3}(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta}) + \gamma - \varepsilon < 0.$$

После вычитания неравенств получим при  $p > 0$  (случай  $p < 0$  сводится к  $p > 0$  поворотом осей) противоречивое неравенство  $p\sqrt{\varepsilon^2 - 3\delta} < 0$ .

**Теорема 7.** Если через  $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2)$  обозначить *bif*-расклад (количества минимумов, седел индекса (Морса) 1 и седел индекса 2) ограничения  $W|_{\xi_3=0}$ , то получим следующий список допустимых *bif*-раскладов критических точек (в плоскости  $\xi_3 = 0$ ):

$$(9, 12, 4), (5, 12, 8), (5, 8, 4), (8, 8, 1), \\ (4, 4, 1), (1, 4, 4), (5, 4, 0), (1, 0, 0).$$

Им соответствуют (с точностью до поворота на угол  $\pi/4$ ) следующие графы (клеточные комплексы Морса [8], [3]) (рис.).

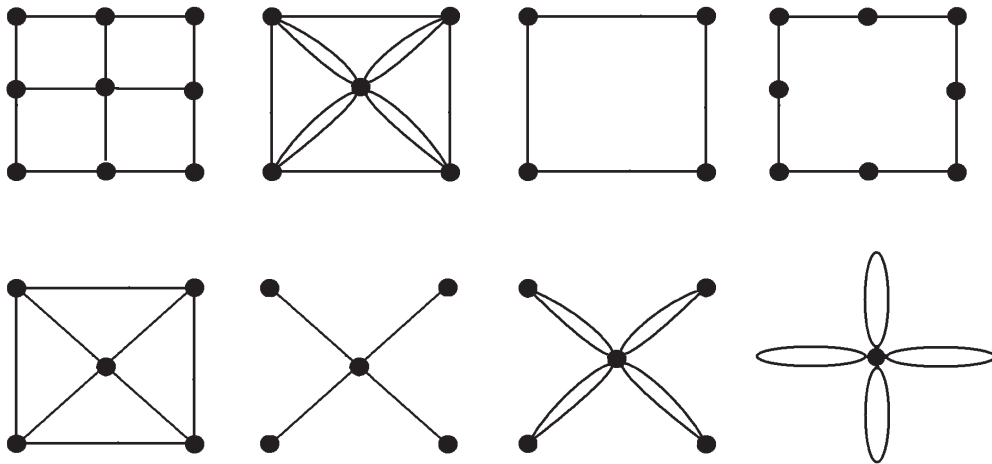


Рис. Клеточные комплексы Морса

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ *bif*-РАСКЛАДОВ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ГЛАВНОЙ ЧАСТИ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ

Ниже будет приведена процедура вычисления возможных раскладов. Как было установлено выше, главная часть  $\tilde{U}$  ключевой функции после вторичной редукции принимает следующий вид:

$$\sigma_1^3 + \varepsilon\sigma_1^2 + \delta\sigma_1 + p\sigma_1\sigma_2 + \gamma\sigma_2 + q\sigma_3, \\ \sigma_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \sigma_2 = r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2, \\ \sigma_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2.$$

В полярных координатах  $r_1 = r \cos(\varphi_1)$ ,  $r_2 = r \cos(\varphi_2)$ ,  $r_3 = r \cos(\varphi_3)$  получим  $\sigma_1 = r^2$ ,

$$\sigma_2 = r^4(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)),$$

$$\sigma_3 = r^6(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2))).$$

Множество критических точек функции  $W$  является (при фиксированных значениях параметров) пересечением поверхностей  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$ , определяемых уравнениями  $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$  (поверхность радиально стационарных точек) и  $\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = 0$  (поверхности стационарных точек по тангенциальным переменным  $\varphi_1, \varphi_2$ ).

Из (4) следует, что  $M_0$  задается уравнением

$$6r^5 + 4\varepsilon r^3 + 2\delta r + 2r^3((3pr^2 + \gamma)(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) - \cos^4(\varphi_1) - \cos^4(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)) + 6qr^5(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2) - \cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)(\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2))) = 0.$$

Поверхность задается уравнением



$$(p r^2 + \gamma) \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi_k} + q \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varphi_k} = 0.$$

Множество всех критических точек совпадает с пересечением  $M_0 \cap M_1 \cap M_2$ . Пересечение  $M_1 \cap M_2$  определяется уравнением

$$(p r^2 + \gamma) \operatorname{grad}_\varphi \sigma_2 + q \operatorname{grad}_\varphi \sigma_3 = 0.$$

Часть этого множества определяется соотношениями

$$(p r^2 + \gamma) = 0, \operatorname{grad}_\varphi \sigma_3 = 0. \quad (6)$$

Остальные точки данного множества определяются (при различных значениях параметров) уравнением

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 0, \quad (7)$$

где  $[\sigma_2, \sigma_3]$  — якобиан (скобка Пуассона) функций  $\sigma_2, \sigma_3$  (по  $\varphi_1, \varphi_2$ ).

**Замечание 1.** Множество  $\mathbb{O}$  точек, определяемых уравнением (6), представляет собой объединение трех экваториальных окружностей (“тройной обруч”), полученных пересечением сферы  $p r^2 + \gamma = 0$  с координатными плоскостями  $r_k = 0$ .

При отыскании решений уравнения (7) полезны следующие утверждения.

**Лемма 1.** Для любых дифференцируемых функций  $u, v, w$  имеют место следующие соотношения:

$$[u, uv] = u[u, v], [uv, uv] = u^2[v, w] + uv[u, w] + uw[v, u], [u^2, v] = 2u[u, v].$$

**Доказательство** леммы проводится непосредственной проверкой.

**Лемма 2.** Пусть  $u = \cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2), v = \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2)$ . Тогда

$$[\sigma_2, \sigma_3] = (1 - 3u + 2u^2 + v)[u, v].$$

**Доказательство** проводится непосредственной проверкой с использованием первой леммы. При этом следует учесть, что  $\sigma_2 = u - u^2 + v, \sigma_3 = v - uv$ .

**Лемма 3.** Если  $u = \cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2), v = \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2)$ , то

$$[u, v] = (1 - \cos^2(\varphi_3)) \sin(2\varphi_1) \sin(2\varphi_2).$$

**Доказательство** проводится на основе предыдущих лемм.

Из последних двух лемм непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Теорема 8..** Имеет место представление

$$[\sigma_2, \sigma_3] = (1 - 3u + 2u^2 + v) \times (1 - \cos^2(\varphi_3)) \sin(2\varphi_1) \sin(2\varphi_2),$$

в котором

$$u = 1 - \cos^2(\varphi_3), v = \cos^2(\varphi_1) \cos^2(\varphi_2).$$

На основе этого утверждения можно находить расклады бифурцирующих критических точек и определять их взаимные примыкания.

Количество клеточных комплексов, изображающих *bif*-расклады критических точек (в случае трех мод), весьма обширно и в полном объеме пока не известно. В настоящее время найдено десять максимальных (состоящих из 125 элементов) комплексов. Часть из них получена при условии непустоты пересечения внешней компоненты подмногообразия  $M_0$  с  $\mathbb{O}$ , остальные получены в случае подмногообразия  $M_0$  с более сложным топологическим строением. Этим комплексам соответствуют следующие расклады критических точек:

$$(27, 54, 36, 8), (27, 56, 36, 6),$$

$$(7, 42, 56, 20), (19, 50, 48, 12), (19, 54, 44, 8),$$

$$(15, 50, 48, 12), (7, 42, 56, 20), (15, 48, 48, 14),$$

$$(27, 56, 36, 6), (27, 54, 36, 8).$$

Более подробному описанию максимальных комплексов будет посвящена отдельная статья.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. — М., Наука. 1984. — 247 с.
2. Широков В.Б., Юзюк Ю.И., Dkhil B., Леманов В.В. Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В. Н. ВаТiO<sub>3</sub> // Физика твердого тела. Т. 50, вып. 5 (2008), С. 889—892.
3. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т. 12. 2004. С. 3—140.
4. Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамедиев Э.М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 3. — С. 530—533.
5. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера // Успехи матем. наук. 1977. Т. 32, вып. 4. С. 3—54.
6. Сапронова Т.Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж, ВГУ. 2000. — С. 107—124.
7. Белых Ф.А., Сапронов Ю.И. Вторичные редукции для случая 4-мерного вырождения краевой за-

дачи в геликоидальной модели кристалла // Математические модели и операторные уравнения. Т. 4. Воронеж: ВГУ, 2007. — С. 5—14.

8. *Постников М.М.* Введение в теорию Морса. — М.: Наука. 1971. — 568 с.

---

**Даринский Б.М.** — д-р ф.-м. наук, профессор ВорГУ; тел. (4732) 77-27-27, e-mail: darinskii@mathd.vsu.ru

**Колесникова И.В.** — аспирант ВорГУ; тел. 903-8576425, e-mail: kolinna@mail.ru

**Сапронов Ю.И.** — д-р ф.-м. наук, профессор ВорГУ; тел. (4732) 22-12-86, e-mail: yusapr@mail.ru

**Darinskii B.M.** — prof. Voronezh SU; tel. (4732) 77-27-27, e-mail: darinskii@mathd.vsu.ru

**Kolesnikova I.V.** — aspirant Voronezh SU; tel. 903-8576425, e-mail: kolinna@mail.ru

**Sapronov Yu.I.** — prof. Voronezh SU; tel. (4732) 22-12-86, e-mail: yusapr@mail.ru