

О ВНЕДРЕНИИ ТЕЛ В ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

Д. В. Давыдов, Ю. М. Мяснянкин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.10.2008 г.

Аннотация. В статье исследуются закономерности проникновения тел в жесткопластическую среду на примере задачи о симметричном перекусывании жесткопластической полосы двумя клинообразными штампами. Показано, что в классе задач о симметричном вдавливании тел с прямолинейными контурами предельное давление может быть определено без численного построения сетки характеристик, а исходя из решения задач в скоростях. Выявлено качественное отличие между сетками характеристик в рассматриваемой задаче и в случае полосы, лежащей на абсолютно твердом идеально гладком основании. В заключении описанный способ решения применен к задаче о двустороннем симметричном давлении плоских штампов на жесткопластическую полосу.

Ключевые слова: внедрение тел, давление тел, жесткопластическая полоса, клинообразный штамп, плоский штамп, решение в скоростях.

Abstract. In paper is investigated regularity of indentation of bodies in rigidly plastic environment on a problem instance about symmetric cutting of rigidly plastic strip by two wedge press tools. It is shown that in the class of problems about symmetric indentation of bodies with rectilinear contours limiting pressure can be defined without numerical construction of a grid of characteristics, and proceeding from a problem solving in speeds. Qualitative difference between grids of characteristics in an observed problem and in case of the strip laying on absolutely firm ideally smooth basis is revealed. In the conclusion the presented way of the solution is applied to a problem about double-end symmetric pressure of flat press tools on a rigidly plastic strip.

Key words: indentation of bodies, pressure of bodies, rigidly plastic strip, wedge press tool, flat press tool, solution in speeds.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о внедрении клинообразных штампов исследовались ранее в [1, 2, 4–6]. Данные задачи являются классическим случаем неустановившегося пластического течения, поддающимся относительно простому анализу. Речь идет о задачах, в которых пластическая область изменяется так, что ее конфигурация все время сохраняет геометрическое подобие некоторому исходному положению. Другими простейшими примерами являются задачи о расширении цилиндрической и сферической полостей в неограниченном пространстве при начальных нулевых размерах отверстий [1]. А в [3] Л. М. Качанов привел решения Прандтля и Хилла задачи о наступлении пластического течения при вдавливании твердого штампа с плоским основанием в полубесконечную жесткопластическую среду.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ
О ПЕРЕКУСЫВАНИИ

Рассмотрим случай, когда жесткопластическая полоса толщиной $2H$ перекусывается с

разных сторон двумя одинаковыми симметричными клиньями, внедряющимися в материал вертикально со скоростью v_0 (рис. 1). Каждый

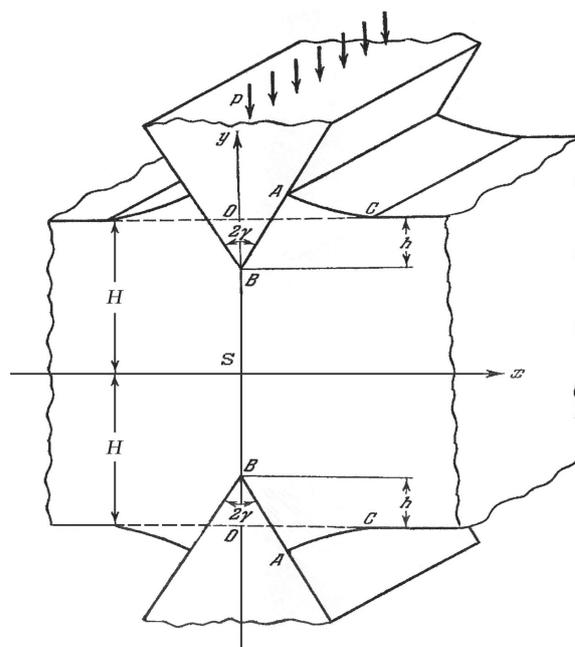


Рис. 1. Перекусывание жесткопластической полосы двумя одинаковыми симметричными гладкими клинообразными штампами

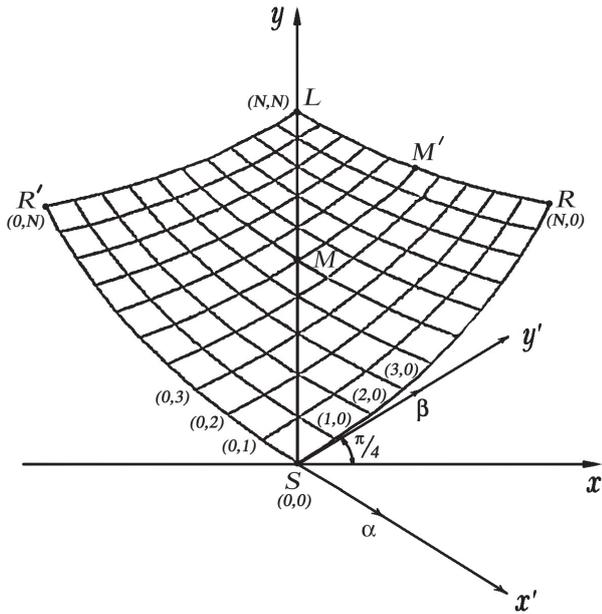


Рис. 3. Область $SRLR'$ с криволинейными характеристиками

следующее суммирование напряжения σ_x по координатам узлов, находящихся на линии LS . Принципиальное же отличие решения, предложенного в данной статье, заключается в том, что величина силы давления на линии LS находится из поля скоростей и не требует построения сетки характеристик.

Введем в области $SRLR'$ криволинейные координаты (α, β) , связанные линиями α и β как криволинейными осями (SR' и SR на рис. 3) [1,6]. Обозначая через u и v компоненты вектора скорости в α - и β -направлениях соответственно, запишем граничные условия для скоростей

$$\begin{aligned} u &= v_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right), \\ v &= v_1 \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \sqrt{2} \right), \\ 0 \leq \beta &\leq \psi \text{ на кривой } SR \\ u &= -v_1 \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \right), \\ v &= -v_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \\ -\psi \leq \alpha &\leq 0 \text{ на кривой } SR'. \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (8) скорость v_1 может быть связана со скоростью v_0 с помощью соотношения, учитывающего несжимаемость материала

$$v_1 = v_0 \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma - \sin(\gamma - \varphi)} \frac{h}{H}. \quad (9)$$

Вводя нумерацию узлов сетки в рассматриваемой области так, как показано на рис. 3, и пользуясь соотношениями Гейрингер в конечно-разностном виде [3], получаем значения для скоростей u и v в каждом из узлов сетки $SRLR'$. Численное отыскание компонентов u и v удобно проводить в безразмерных переменных, в нашем случае — в переменных, отнесенных к характерной длине h , характерному напряжению $2k$ и характерной скорости $w = v_0 h/H$. Для краткости сохраним для безразмерных переменных те же обозначения, что и для размерных.

Редукция отношения глубин в зависимости от угла Ψ представляется следующим образом

$$\frac{H}{h} \Big|_{\Psi} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin \gamma} u_{LS} \Big|_{\Psi}, \quad (10)$$

где u_{LS} — безразмерная скорость u в узле, лежащем на линии LS . При вычислениях угол Ψ меняется в пределах от 0 до значения угла φ . Это лишь предположением о том, что веер ADQ не может раскрыться больше, чем веер ADE , но, как будет показано далее, такое предположение является весьма справедливым.

Вычисление напряжений в узлах рассматриваемой сетки проводится с использованием интегралов Генки, для которых в качестве шаблона берутся точки L, M и M' (рис. 3):

$$\sigma_M = \sigma_L - 2k(\theta_L + \theta_M - 2\theta_{M'}). \quad (11)$$

Учитывая, что σ_L выражается формулой (5), а углы θ в рассматриваемых точках имеют значения

$$\begin{aligned} \theta_L &= -\pi/4, \quad \theta_M = -\pi/4, \\ \theta_{M'} &= -\pi/4 + \psi_{M'}, \end{aligned} \quad (12)$$

получаем с использованием замены Леви искомого компоненту напряжения σ_x в точке M в виде

$$\sigma_{x_M} = k(\pi - 2(\gamma + \varphi) + 4\psi_{M'}). \quad (13)$$

Меняя положение точки M на линии LS , а соответственно и положение точки M' на кривой LR , получим значение σ_x в любом узле на линии LS .

Окончательно, силу давления под клином дает формула

$$P_{BS} = P_{BL} + P_{LS} = P_{BL} + \int_0^{H-h-l} \sigma_x(0, y) dy, \quad (14)$$

которая с учетом соотношений (6) и (13) в безразмерных переменных принимает вид

$$P_{BS} = \frac{1}{2} \left[(\pi - 2(\gamma + \varphi)) \left(\frac{H}{h} \Big|_{\psi} - 1 \right) + 4 \left(\frac{H}{h} \Big|_{\psi} - \frac{l}{h} - 1 \right) \cdot \psi \right] \quad (15)$$

СООТНОШЕНИЕ УГЛОВ

Для определения конкретного значения угла ψ при каждом значении угла γ стоит воспользоваться предельным условием на разрыв полосы

$$P_{AB_x} = P_{BS} \quad (16)$$

При задании угла γ левая часть равенства (16) известна из выражения (7), а правая на основе (15) представляет собой зависимость от угла ψ . Таким образом, объединяя формулы (1), (2), (7)–(10), (15), (16) в единую вычислительную схему, приравняв силы давления, находим значение угла ψ , отвечающее заданному γ . Результаты такого рода вычислений при $N = 1000$ и погрешности равенства $\varepsilon = 0.001$ с точностью до третьего знака в дробной части приведены в табл. 1, а графически соотношение между углами показано на рис. 4.

Здесь подтверждается предположение о том, что значение угла ψ никогда не превзойдет значения угла φ . Более того, угол ψ существует

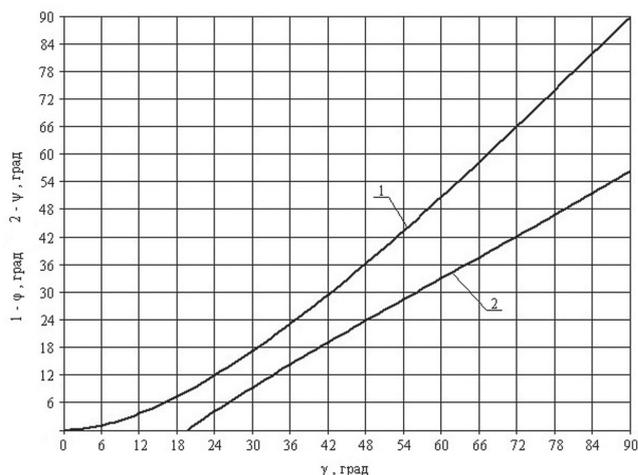


Рис. 4. Графики зависимостей $\varphi(\gamma)$ и $\psi(\gamma)$

только при $\gamma \geq 19.5$ град (в радианной мере — при $\gamma \geq 0.34$).

Учитывая, что рассмотренное решение предполагает наличие угла ψ , вышеприведенное условие налагает ограничение на угол раствора клиньев, потому как, если это условие не выполняется, то сетка линий скольжения принимает более простой вид, показанный на рис. 5. Такая задача решается классическими способами и не требует привлечения численных методов для отыскания интересных величин.

Таблица 1

Значения углов γ и ψ (град)

γ	ψ								
1	—	19	—	37	15.194	55	29.291	73	42.973
2	—	20	0.479	38	16.008	56	30.047	74	43.737
3	—	21	1.425	39	16.820	57	30.833	75	44.515
4	—	22	2.353	40	17.627	58	31.575	76	45.292
5	—	23	3.236	41	18.424	59	32.334	77	46.069
6	—	24	4.151	42	19.210	60	33.095	78	46.845
7	—	25	5.045	43	20.015	61	33.841	79	47.625
8	—	26	5.931	44	20.792	62	34.607	80	48.408
9	—	27	6.806	45	21.579	63	35.375	81	49.193
10	—	28	7.673	46	22.376	64	36.121	82	49.977
11	—	29	8.534	47	23.156	65	36.876	83	50.773
12	—	30	9.398	48	23.914	66	37.632	84	51.568
13	—	31	10.239	49	24.693	67	38.405	85	52.363
14	—	32	11.084	50	25.464	68	39.161	86	53.172
15	—	33	11.928	51	26.240	69	39.913	87	53.984
16	—	34	12.745	52	27.005	70	40.674	88	54.787
17	—	35	13.570	53	27.775	71	41.439	89	55.607
18	—	36	14.401	54	28.531	72	42.205	90	56.400

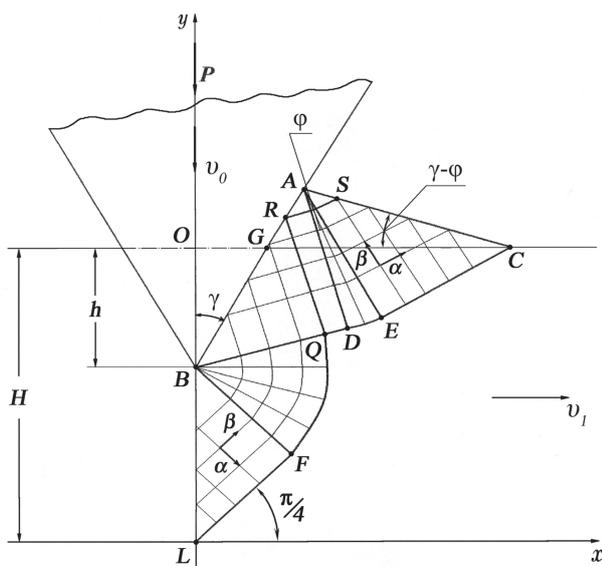


Рис. 5. Сетка линий скольжения, отвечающая предельной нагрузке на клин, при $\gamma \leq 19.5$ град (в радианной мере — при $\gamma \leq 0.34$)

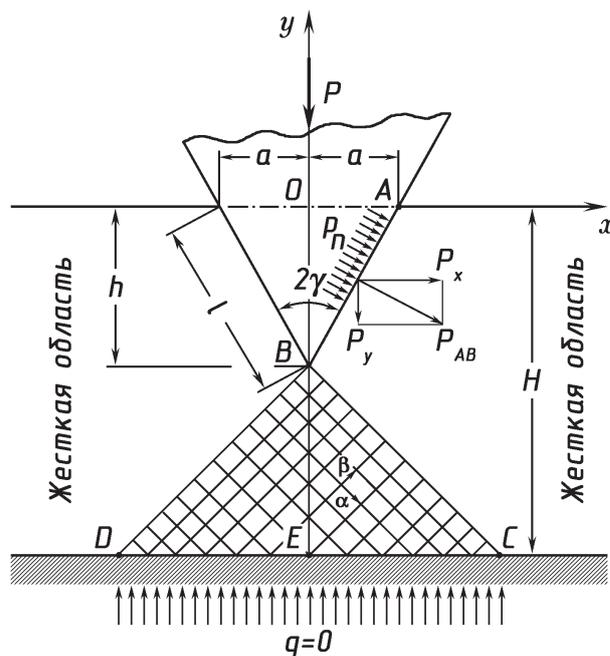


Рис. 6. Первый вид сетки характеристик

СРАВНЕНИЕ СЕТОК ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим более углубленно вопрос о выборе поля скольжения в задачах о внедрении клинообразных штампов в жесткопластическую полосу. Будем рассматривать не предельные случаи, т.е. давление p_n клина на полосу еще не достигло своего предельного значения. Дабы пренебречь выдавливанием пластической массы будем считать, что клин внедряется не в первоначально цельную полосу, а вставляется в выточку глубиной h , которая предварительно сделана в полосе в форме клина.

Отметим, что сравниваемые задачи различны по постановке. Первая из них, схематично изображенная на рис. 6, относится к полосе, лежащей на абсолютно твердой идеально гладкой поверхности, тогда как вторая (рис. 7) описывает симметричное перекусывание полосы двумя клиньями.

Вопрос сравнения состоит в том, какая из сеток наиболее близка к истинному решению и какие параметры задач являются критерием этого выбора.

Геометрические параметры обеих задач одинаковы, однако следует заметить, что вторая сетка характеристик требует выполнения условия

$$H = h + l, \quad l = h / \cos \gamma, \quad (17)$$

что заставляет считать толщину полосы в первой задаче равной именно этому выражению. Силы давления на клинья определяются из решения

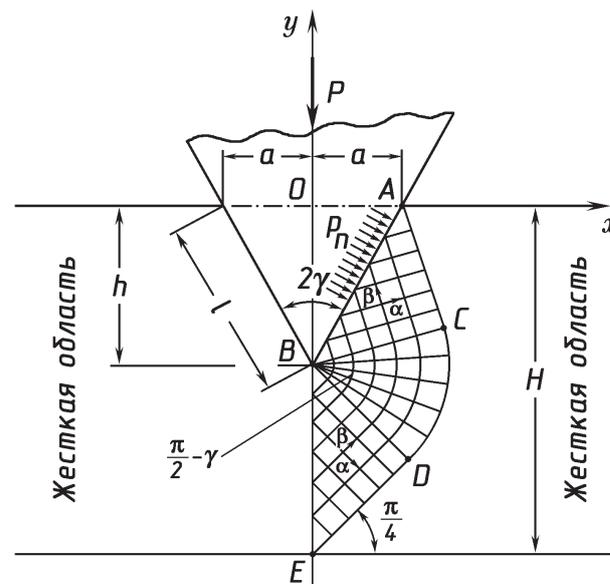


Рис. 7. Второй вид сетки характеристик

данных задач следующим образом

$$P_1 = 4kh \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \gamma}, \quad (18)$$

$$P_2 = 4kh \left(\frac{\pi}{2} - \gamma + 1 \right) \frac{\operatorname{tg} \gamma}{1 + \cos \gamma}. \quad (19)$$

В безразмерном виде графики данных нагрузок представлены на рис. 8 кривыми 1 и 2 соответственно.

В соответствии со второй теоремой предельного равновесия, можно утверждать, что угол $\gamma^* = 0.457 = 26.164$ град, соответствующий точке

A , является переходным углом раствора клина. До достижения значения γ^* меньшей является нагрузка P_1 , значит, наиболее предпочтительна первая сетка характеристик (рис. 6). При переходе же через этот угол P_1 начинает превышать P_2 , и наиболее близкой к истинной становится сетка второго вида (рис. 7). Таким образом, выбор предполагаемой сетки характеристик в задачах о внедрении клинообразных штампов должен основываться на значениях углов раствора этих штампов.

Полученный результат никоим образом не учитывает поддавливание q на полосу со стороны идеально гладкого основания (рис. 6), считая это усилие малым вследствие его распределения по бесконечной длине полосы. Учет же равномерного поддавливания приводит к следующему выражения для силы давления

$$P = 2(2k - q)h \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \gamma}. \quad (20)$$

График нагрузки (20) в безразмерном виде, например, при $q = 0.25$ изображен на рис. 8 штриховой кривой 3. В этом случае значение переходного угла повышается до $\gamma^* = 0.773 = 44.291$ град. Таким образом, наличие поддавливания снижает нагрузку на клин, тем самым увеличивая значение переходного угла.

Пренебрегать поддавливанием на жесткопластическую полосу корректно, но в случае

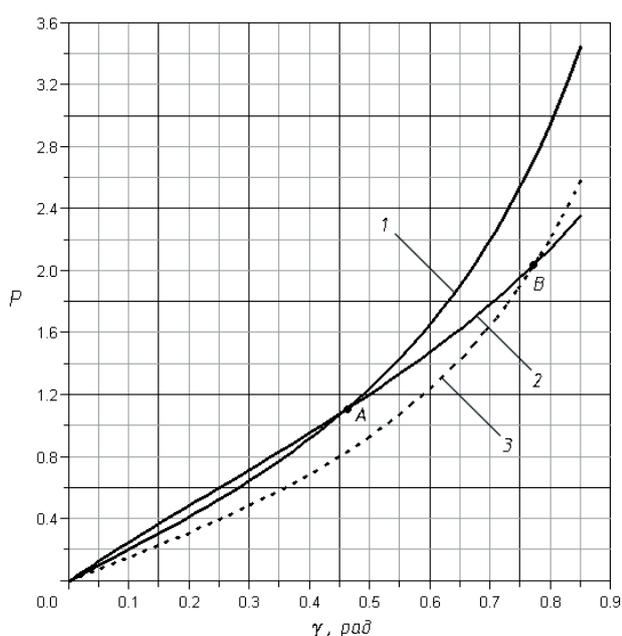


Рис. 8. Графики нагрузок на клин в зависимости от угла γ

упруго-пластической модели вопрос с поддавливанием приобретает определяющее значение. Упруго-пластическая полоса при внедрении клина изгибается и отрывается на своих концах от основания, а на оставшуюся часть действует давление, которое считать бесконечно малым было бы неправильно.

Очевидно, что в предельном состоянии при $\gamma = \pi/2$ оба случая сводятся к задаче о давлении плоского штампа на полубесконечную массу жесткопластического материала. При этом первая сетка (рис. 6) соответствует решению Хилла, а вторая (рис. 7) — решению Прандтля, которые приводят к одинаковой предельной нагрузке.

ДАВЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ШТАМПОВ

Рассмотрим задачу о наступлении пластического течения в жесткопластической полосе при вдавливании в нее с двух сторон штампов с плоскими основаниями (рис. 9). Каждый из штампов имеет ширину $2a$, является симметричным, абсолютно твердым и идеально гладким. В предельном состоянии штампы движутся навстречу друг другу вертикально со скоростью v_0 . Жесткопластическая полоса, имеющая толщину H , испытывает малые деформации, так

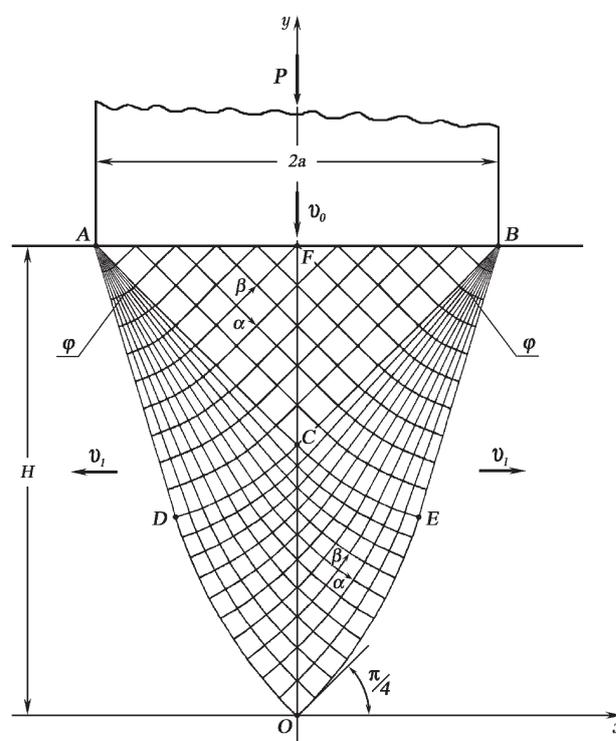


Рис. 9. Сетка линий скольжения, отвечающая предельной нагрузке на штамп, при двустороннем давлении на жесткопластическую полосу

что изменениями очертания свободной от нагрузки поверхности можно пренебречь. Оседающий под действием штампов материал стремится выпучиться вдоль свободных участков границы с некоторой скоростью v_1 .

Будем рассматривать поля напряжений и скоростей в пластической области, считая, что вдоль всего контактного контура штампа с полкой действует равномерно распределенное нормальное давление p . Тогда непосредственно под штампом возникнет треугольная область ABC равномерного напряженного состояния, по обеим сторонам этого треугольника расположатся центрированные поля ACD и BCE с одинаковыми углами раствора, равными φ , и, наконец, область $CDOE$, в которой оба семейства характеристик представляются кривыми.

В связи с тем, что в треугольнике ABC реализуется равномерное напряженное состояние, а на границе AB $\sigma_n = -p$ и $\tau_n = 0$, нетрудно показать, что во всей области

$$\sigma_{ABC} = k - p, \quad \theta_{ABC} = -\pi/4. \quad (21)$$

Воспользовавшись заменой Леви, можно определить выражения для компонентов тензора напряжений в области ABC в виде

$$\sigma_{x_{ABC}} = 2k - p, \quad \sigma_{y_{ABC}} = -p, \quad \tau_{xy_{ABC}} = 0. \quad (22)$$

В каждой из областей ACD и BCE мы имеем веер характеристик, однако угол раствора φ этих вееров нам не известен, и граничных условий в напряжениях недостаточно для его однозначного определения. Поэтому задача в глобальном смысле является статически неопределимой. Обычным методом определения данного угла является его подбор из условия охвата пластической областью всей толщины полосы [2]. Но угол φ можно определить и из решения задачи в скоростях, где граничных условий избыток, обратив внимание на то, что области $CDOE$ (рис. 9) и $SRLR'$ (рис. 3) обладают одинаковыми свойствами и очертаниями. Поэтому решение поставленной задачи в скоростях можно провести по той же схеме, которая была подробно описана выше.

Давыдов Дмитрий Владиславович — студент 5 курса факультета ПММ кафедры теоретической и прикладной механики; тел.: +7 (4732) 735312, e-mail: d-d-a-v@yandex.ru

Мяснянкин Юрий Михайлович — д.ф.-м.н., профессор факультета ПММ кафедры теоретической и прикладной механики, Университетская пл., 1, ауд. 215, тел.: +7 (4732) 208763, e-mail: pmmtamc@main.vsu.ru.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рассмотренном классе задач определение основных неизвестных величин может быть проведено и без численного построения сетки линий скольжения. Вполне достаточно лишь исследовать поле скоростей в области с криволинейными характеристиками, примыкающей к осям симметрии. Описанный метод решения можно применять только при выполнении двух условий: 1) внедряемое тело должно иметь прямолинейные контуры; 2) в задаче должна присутствовать ось симметрии для сетки линий скольжения. Невыполнение первого условия (например, внедрение криволинейного штампа [2]) приведет к качественному отличию всего вида сетки характеристик, а наличие несимметричности трудно согласуется с распределением скоростей.

Анализ полученных данных позволил выявить допустимые значения параметров, при которых предложенное решение может иметь место, а также высказать некоторые соображения о подходе к выбору сетки характеристик в рассматриваемых задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 407 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. — М.: Высш. школа, 1969. — 608 с.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
4. Ивлев Д.Д. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 10. С. 89—93.
5. Ивлев Д.Д., Максимова Л.А. О вдавлении индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2000. № 3. С. 131—136.
6. Hill R., Lee E.H., Tupper S.J. The theory of wedge indentation of ductile materials // Proc. Roy. Soc. L., 1947. Ser. A. Vol. 188. — 273 p.

Davydov Dmitriy V. — the 5th-year student of AMM faculty, chair of theoretical and applied mechanics; tel.: +7 (4732) 735312, e-mail: d-d-a-v@yandex.ru

Myasnyankin Yuriy M. — doctor of physico-mathematical sciences, professor of AMM faculty, chair of theoretical and applied mechanics; ; tel.: +7 (4732) 208763, e-mail: pmmtamc@main.vsu.ru