УДК:517.988.6

МНОГОЗНАЧНЫЕ СЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ*

Б. Д. Гельман

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 17.02.2009 г.

Аннотация Настоящая статья посвящена изложению теоремы Надлера (принципа многозначных сжимающих отображений) и некоторых обобщений этой теоремы и применению этих результатов к проблеме разрешимости операторных уравнений с замкнутыми сюръективными операторами. Статья состоит из трех разделов. В первом разделе рассматриваются теоремы о существовании и топологической структуре множества неподвижных точек многозначных сжимающих отображений. Во втором разделе полученные теоремы применяются для изучения разрешимости и изучения свойств множества решений уравнений вида $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{a}$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $\mathbf{f}$ — липшицево отображение. Третий раздел работы посвящен приложению доказанных теорем к изучению следующих двух проблем. Проблеме разрешимости задачи Коши для одного класса вырожденных дифференциальных уравнений, у которых вырождение задается замкнутым линейным сюръективным оператором, и проблеме управляемости конечномерных линейных систем имеющих "малые" нелинейные возмущения. В этих задачах удается не только доказать существование решений, но и получить некоторую информацию о структуре множества решений.

Ключевые слова: Многозначные сжимающие отображения; замкнутый сюръективный оператор; вырожденные дифференциальные уравнения.

Abstract This paper is devoted to description of Nadler theorem (principle of contraction of multivalued maps), to some its generalizations and to application to the problem of solvability of operator equations with closed surjective operators. The paper consists of three sections. In the first one existence theorems and topological structure of fixed point sets of multivalued contracting mappings are proved. In the second section the obtained results are applied to investigation solvability and properties of solution set of equations of $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ type. Here $\mathbf{a}$ is a closed linear surjective operator, $\mathbf{f}$ is Lipschitz continuous. The third section contains applications of above theorems to the following two problems: the one of solvability of Cauchy problem for a certain class of degenerate differential equation, in which the degeneration is given by means of closed linear sujective operator, and controllability problem for finite-dimensional linear systems having "small" nonlinear perturbations. In these problems we have proven existence of solutions and, moreover, have obtained some infirmation on the structure of the solution set.

Key words: Multivalued contracting mappings; closed surjective operator; degenerate differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, какую важную роль в математике играет теорема Банаха (принцип сжимающих отображений). В 1969 году С.Б. Надлером [1] была доказана теорема, являющаяся многозначным вариантом теоремы Банаха. Эта теорема также находит применения при изучении различных проблем: в теории экстремальных задач, при доказательстве теоремы Люстерника [2]; при доказательстве некоторых обобщений теоремы о неявной и обратной функции [3], [4], а также при изучении некоторых других проблем современной математики. Настоящая статья не претендует на полноту, а является обзором работ автора [4], [5], [6], [7] посвященным применению теоремы Надлера и некоторых обобщений этой теоремы к проблеме изучения разрешимости операторных уравнений с замкнутыми сюръективными операторами.

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе рассматриваются теоремы о существовании и топологической структуре множества

* Это исследование поддержано РФФИ: грант № 08-01-00192а

неподвижных точек многозначных сжимающих отображений.

Во втором разделе полученные теоремы применяются для изучения разрешимости и изучения свойств множества решений операторных уравнений вида $a(x) = f(x)$, где a — замкнутый линейный сюръективный оператор, а f — липшицево отображение.

Третий раздел работы посвящен приложению доказанных теорем к изучению следующих проблем: проблеме разрешимости задачи Коши для одного класса вырожденных дифференциальных уравнений, у которых вырождение задается замкнутым линейным сюръективным оператором; проблеме устойчивости глобальной управляемости конечномерных линейных систем относительно "малых" нелинейных возмущений. В этих задачах удается не только доказать существование решений, но и получить некоторую информацию о структуре множества решений.

1. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ МНОГОЗНАЧНЫХ СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. ТЕОРЕМА НАДЛЕРА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Пусть X — метрическое пространство , Y — замкнутое подмножество в X . Обозначим $P(Y)$ — совокупность всех непустых подмножеств Y .

Расстояние от точки x до множества $A \in P(Y)$ есть

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) | y \in A\}.$$

Пусть $A, B \in P(Y)$.

1.1. Определение. *Величину (конечную или бесконечную)*

$$\rho_*(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B)$$

называют полуотклонением множества A от множества B .

1.2. Предложение. *Функция $\rho_* : P(Y) \times P(Y) \to \mathrm{R} \cup \infty$ обладает следующими свойствами:*

1. $\rho_*(A, B) \geq 0$ для любых A, B из $P(Y)$;

2. $\rho_*(A, B) = 0$ влечет $A \subset \overline{B}$;

3. В общем случае $\rho_*(A, B) \neq \rho_*(B, A)$;

4. $\rho_*(A, B) \leq \rho_*(A, C) + \rho_*(B, C)$ для любых A, B, C из $P(Y)$;

5. $\rho_*(A, B) = \inf\{\varepsilon \,|\, A \subset U_\varepsilon(B)\}$ для любых A, B из $P(Y)$.

Доказательство этих свойств содержится, например, в [8].

Пусть $C(X)$ — множество непустых замкнутых подмножеств в X . Рассмотрим функцию $h : C(X) \times C(X) \to \mathrm{R} \cup \infty$,Эта функция является квазиметрикой на множестве $C(X)$. Действительно, для любых $A, B \in C(X)$ выполнено :

6. $h(A, B) \geq 0$.

7. Если $h(A, B) = 0$, то $A = B$.

8. $h(A, B) = h(B, A)$.

9. $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ для любых A, B, C из $C(X)$.

10. Если $A = \{x_0\}$, $B = \{y_0\}$, то $h(A, B) = \rho(x_0, y_0)$.

Доказательства перечисленных свойств вытекает из определения функции $h(A, B)$ и свойств $\rho_*(A, B)$.

1.3. Лемма. *Пусть M_1, M_2 — линейные многообразия в нормированном пространстве E , являющиеся сдвигами одного и того же подпространства $L \subset E$, тогда*

$$h(M_1, M_2) = \rho_*(M_1, M_2) = \rho_*(M_2, M_1) =$$
$$= \inf\{\| x_1 - x_2 \| | x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}.$$

Доказательство этой леммы содержится, например, в [2].

Пусть X — полное метрическое пространство, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар в X с центром в точке x_0 . Пусть $F : B_R[x_0] \to C(X)$ многозначное отображение.

1.4. Определение. *Точку $x_* \in B_R[x_0]$ будем называть неподвижной точкой многозначного отображения F если $x_* \in F(x_*)$.*

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке.

1.5. Теорема. *Пусть X — полное метрическое пространство, $F : B_R[x_0] \to C(X)$ многозначное отображение. Пусть существует число $k \in [0,1)$ такое, что выполнены следующие условия:*

(1) $\rho(x_0, F(x_0)) < R(1 - k),$

(2) *для любой точки $x \in B_R[x_0]$ пересечение $F(x) \cap B_R[x_0] \neq \varnothing,$*

(3) *для любых $x \in B_R[x_0]$ и $y \in (F(x) \cap B_R[x_0])$ справедливо неравенство*

$$\rho_*(F(x) \cap B_R[x_0], F(y)) \leq k\rho(x, y).$$

Тогда для любого положительного числа ε существует неподвижная точка x_* отображения F такая, что

$$\rho(x_0, x_*) \leq \frac{1}{1 - k}(\rho(x_0, F(x_0)) + \varepsilon). \qquad (1.1)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что число $R_1 = \rho(x_0, F(x_0) + \varepsilon <$

$< R(1-k)$. Построим последовательность точек $x_0, x_1, \ldots$ такую, что

$$x_n \in B_R[x_0] \text{ при } n = 0,1,\ldots,$$
$$x_n \in F(x_{n-1}) \text{ при } n = 1,2,\ldots,$$
$$\rho(x_{n+1}, x_n) < k^n R_1 \text{ при } n = 0,1,\ldots.$$

Эту последовательность будем строить индуктивно. Пусть точка x_0 — центр нашего шара, точка x_1 — произвольная точка из пересечения $F(x_0) \cap B_R[x_0]$ такая, что $\rho(x_0, x_1) < R_1$. Допустим, что уже построены $n+1$ точка нашей последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тогда

$$\rho(x_n, F(x_n)) \le \rho_*(F(x_{n-1}) \cap B_R[x_0], F(x_n)) \le$$
$$\le k\rho(x_{n-1}, x_n) < k^n R_1.$$

Следовательно, существует такая точка $x_{n+1} \in F(x_n)$, что

$$\rho(x_n, x_{n+1}) < k^n R_1.$$

Проверим, что точка x_{n+1} принадлежит шару $B_R[x_0]$. Действительно,

$$\rho(x_0, x_{n+1}) \le \sum_{i=0}^{n} \rho(x_i, x_{i+1}) <$$
$$< \sum_{i=0}^{n} k^i R_1 < \frac{R_1}{1-k} < R.$$

Таким образом точка x_{n+1} построена, индукция закончена.

Нетрудно доказать, что построенная последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Действительно,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \sum_{i=n}^{n+p-1} \rho(x_i, x_{i+1}) <$$
$$< \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i R_1 < \frac{k^n R_1}{1-k},$$

что и доказывает фундаментальность.

Так как пространство X полно, а множество $B_R[x_0]$ замкнуто, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x_* \in B_R[x_0]$. Так как $\rho(x_0, x_{n+1}) < \frac{R_1}{1-k}$, то переходя к пределу в этом неравенстве, получаем, что $\rho(x_0, x_*) \le \frac{R_1}{1-k}$.

Покажем, что точка x_* является неподвижной точкой многозначного отображения F. Действительно,

$$\rho(x_{n+1}, F(x_*)) \le \rho_*(F(x_n) \cap B_R[x_0], F(x_*)) \le$$
$$\le k\rho(x_n, x_*).$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, F(x_*)) = 0$. Так как множество $F(x_*)$ замкнуто, то $x_* \in F(x_*)$, т.е. x_* является неподвижной точкой F.

Так как

$$\rho(x_0, x_*) \le \sum_{n=0}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \sum_{n=0}^{\infty} k^n R_1 = \frac{R_1}{1-k},$$

то неравенство (1.1) доказано. Теорема доказана.

Эта теорема является обобщением одного из утверждений книги [2] (стр. 42) и почти полностью повторяет его доказательство. Также она обобщает одно из утверждений работы [3]. Рассмотрим некоторые следствия из этой теоремы.

Пусть X — метрическое пространство, A — подмножество в X.

1.6. Определение. *Многозначное отображение $F : A \to C(X)$ называется липшицевым, если существует положительное число k такое, что для любых x и y из A выполнено неравенство:*

$$h(F(x), F(y)) \le k\rho(x, y).$$

В этом случае k называется константой Липшица.

Если многозначное отображение F является липшицевым отображением с константой Липшица меньше единицы, то оно называется сжимающим.

Справедливо следующее утверждение (см. [2]).

1.7. Следствие. *Пусть X — полное метрическое пространство, $F : B_R[x_0] \to C(X)$ многозначное сжимающее отображение с константой Липшица $k \in [0,1)$. Пусть выполнено следующие условие:*

$$\rho(x_0, F(x_0) < R(1-k).$$

Тогда, для любого числа R_1, удовлетворяющего неравенству

$$\rho(x_0, F(x_0) < R_1 < R(1-k),$$

существует неподвижная точка x_* отображения F такая, что

$$\rho(x_0, x_*) \le \frac{R_1}{1-k}. \qquad (1.2)$$

Более того среди неподвижных точек отображения F существует точка x_* такая, что

$$\rho(x_0, x_*) \le \frac{2}{1-k} \rho(x_0, F(x_0)). \qquad (1.3)$$

Доказательство. Это утверждение естественно вытекает из теоремы 1.5. Для этого прежде всего проверим, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ пересечение $F(x) \cap B_R[x_0] \ne \varnothing$. Действительно,

$$\rho(x_0, F(x)) \le \rho(x_0, F(x_0)) + \rho_*(F(x_0), F(x)) \le$$
$$\le \rho(x_0, F(x_0)) + h(F(x_0), F(x)) <$$
$$< (1-k)R + kR = R.$$

Заметим также, что

$$\rho_*(F(x) \cap B_R[x_0], F(y)) \le \rho_*(F(x), F(y)) \le$$
$$\le h(F(x), F(y)) \le k\rho(x, y).$$

Неравенства (1.2) и (1.3) очевидным образом вытекают из неравенства (1.1). Это и доказывает следствие.

Из теоремы 1.5 также вытекает следующее утверждение, (см. [1]).

1.8. Следствие. *Пусть X — полное метрическое пространство, $F : X \to C(X)$ многозначное сжимающее отображение с константой Липшица $k \in [0,1)$. Пусть x_0 — некоторая точка из пространства X и $\rho(x_0, F(x_0)) < \delta$. Тогда у отображения F существует неподвижная точка x_* такая, что $\rho(x_0, x_*) < \dfrac{\delta}{1-k}$.*

Доказательство. Пусть положительное число R такое, что справедливо неравенство $\rho(x_0, F(x_0) < \delta < R(1-k)$. Рассмотрим шар $B_R[x_0]$. Очевидно, что сужение отображения F на этот шар будет удовлетворять условиям следствия 1.7, следовательно, отображение F будет иметь неподвижную точку x_* такую, что

$$\rho(x_0, x_*) < \frac{\delta}{1-k}.$$

Следствие доказано.

Очевидно, что многозначные сжимающие отображения, в общем случае, имеют много неподвижных точек. Имеет место следующее утверждение [9].

1.9. Теорема. *Пусть X — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E, $F : X \to C(X)$ — многозначное сжимающее отображение. Пусть x_0 — неподвижная точка F. Если множество $F(x_0) \ne \{x_0\}$, то у F существует по крайней мере еще одна неподвижная точка.*

В качестве приложения рассмотренных теорем докажем теорему, которая является некоторым локальным вариантом теоремы А. В. Арутюнова (см. [10], [11]).

Пусть X, Y — метрические пространства, $B_{r_1}[x] \subset X$, $B_{r_2}[y] \subset Y$ — замкнутые шары в этих пространствах. Пусть A подмножество в X, $g : A \to Y$ — однозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) отображение g имеет замкнутый график;

(2) отображение g является α-накрывающим отображением, т.е. для любой точки $x \in A$ и любого числа $r > 0$ множество $g(B_r[x]) \supset B_{\alpha r}[g(x)]$.

Пусть точка $x_0 \in A$, $f : B_R[x_0] \to Y$ — однозначное липшицево отображение с константой Липшица β.

1.10. Теорема. *Если $\beta < \alpha$ и $\rho(f(x_0), g(x_0)) < (\alpha - \beta)R$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решение в шаре $B_R[x_0]$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое решение этого уравнения x_*, что*

$$\rho(x_0, x_*) \le \frac{\rho(f(x_0), g(x_0)) + \varepsilon}{\alpha - \beta}. \qquad (1.4)$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы рассмотрим многозначное отображение $F(x) = g^{-1}(f(x))$. В силу замкнутости графика отображения g многозначное отображение F имеет замкнутые образы. Проверим, что многозначное отображение F удовлетворяет условиям следствия 1.7. Для этого оценим $h(F(x_1), F(x_2))$, где x_1, x_2 — произвольные точки из $B_R[x_0]$.

Пусть $r = \rho(f(x_1), f(x_2))$, а $\tilde{x}_1$ — произвольная точка из $g^{-1}(f(x_1))$. Тогда в шаре $B_{\frac{r}{\alpha}}[\tilde{x}_1]$ найдется точка $\tilde{x}_2$ такая, что $g(\tilde{x}_2) = f(x_2)$. Следовательно,

$$\rho_*(F(x_1), F(x_2)) = \sup_{b \in F(x_1)} \inf_{a \in F(x_2)} \rho(a, b) \le$$
$$\le \rho(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \le \frac{1}{\alpha}\rho(f(x_1), f(x_2)) \le \frac{\beta}{\alpha}\rho(x_1, x_2).$$

В силу равноправности точек x_1 и x_2 получаем аналогичное неравенство: $\rho_*(F(x_2), F(x_1)) \le \frac{\beta}{\alpha}\rho(x_1, x_2)$. Следовательно F является многозначным сжимающим отображением и константа Липшица $k = \frac{\beta}{\alpha}$.

Оценим теперь расстояние $\rho(x_0, F(x_0))$. Пусть $\rho(f(x_0), g(x_0)) = r$, тогда в шаре $B_{\frac{r}{\alpha}}[x_0]$ найдется точка x_1 такая, что $g(x_1) = f(x_0)$. Следовательно

$$\rho(x_0, F(x_0)) \le \frac{1}{\alpha}\rho(f(x_0), g(x_0)) < \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)R,$$

т.е. отображение F удовлетворяет условиям следствия 1.7. Тогда отображение F имеет неподвижную точку, которая и является решением уравнения $f(x) = g(x)$.

Проверим теперь справедливость неравенства (1.4). Так как

$$\rho(x_0, F(x_0) \le \frac{1}{\alpha}\rho(f(x_0), g(x_0)) < (1-k)R,$$

то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\rho(x_0, F(x_0) < \frac{\rho(f(x_0), g(x_0)) + \varepsilon}{\alpha} < (1-k)R.$$

Из следствия 1.7 вытекает, что существует неподвижная точка x_* такая, что выполняется неравенство

$$\rho(x_0, x_*) \le \frac{\rho(f(x_0), g(x_0)) + \varepsilon}{\alpha(1-k)}.$$

Так как $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$, то

$$\rho(x_0, x_*) < \frac{\rho(f(x_0), g(x_0)) + \varepsilon}{\alpha - \beta}.$$

Теорема доказана.

1.2. МНОГОЗНАЧНЫЕ СЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Пусть E — банахово пространство, X — замкнутое выпуклое подмножество в E, Y — метрическое пространство.

Рассмотрим многозначное отображение $F : X \times Y \to Cv(X)$ удовлетворяющее следующим условиям:

(1) *существует такое число* $k \in [0,1)$, *что для любых* $x', x'' \in X$ *и любого* $y \in Y$ *справедливо неравенство:*

$$h(F(x', y); F(x'', y) \le k \parallel x' - x'' \parallel;$$

(2) *многозначное отображение* F *— полунепрерывно снизу по совокупности переменных.*

Очевидно, что в силу следствия 1.8, для любого $y \in Y$ многозначное отображение $F_y = F(\cdot, y) : X \to Cv(X)$ имеет неподвижные точки. Обозначим $Fix(y) = \{x \mid x \in F_y(x)\}$. Возникает многозначное отображение $Fix : Y \to C(X)$.

1.11. Теорема. *Пусть выполнены условия (1), (2), пусть* A *— замкнутое подмножество в* Y, $f : A \to X$ *— непрерывное отображение такое, что* $f(y) \in F(f(y), y)$ *для любого* $y \in A$.

Тогда существует непрерывное отображение $g : Y \to X$ *удовлетворяющее условиям:*

а) g *— непрерывное сечение многозначного отображения* Fix, *т.е.* $g(y) \in F(g(y), y)$ *для любого* $y \in Y$;

б) отображение g *является непрерывным продолжением отображения* f, *т.е.* $g\,|_A = f$.

Доказательство. Построим последовательность непрерывных отображений $g_n : Y \to X$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям:

1) $g_n(y) \in F(g_{n-1}(y), y)$ для любого $y \in Y$ и $n = 1, 2, \ldots$,

2) существует такая непрерывная функция $r : Y \to R_+$, что для любого $y \in Y$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство $\|g_{n+1}(y) - g_n(y)\| < k^n r(y)$,

3) $g_n\,|_A = f$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Эту последовательность будем строить индуктивно. Пусть отображение $g_0 : Y \to X$ является произвольным непрерывным продолжением отображения f на все пространство Y. Такое продолжение всегда существует в силу теоремы Дугунжи. Определим многозначное отображение $\Psi_1 : Y \to Cv(E)$ условием, $\Psi_1(y) = F(g_0(y), y)$. Очевидно, что это отображение является полунепрерывным снизу и имеет выпуклые замкнутые образы. Следовательно, в силу теоремы Майкла (см., например, [12]), отображение Ψ_1 имеет непрерывное сечение $q : Y \to E$. Пусть $r(y) = \|g_0(y) - q(y)\| + 1$. Очевидно, что функция $r : Y \to R$ является непрерывной.

Рассмотрим многозначное отображение $Q : Y \to V(E)$, $Q(y) = \{x \in E \mid \|g_0(y) - x\| < r(y)\}$. Нетрудно видеть, что это отображение имеет выпуклые образы и его график открыт в пространстве $Y \times E$, т.е. Q является U-отображением. Заметим также, что $Q(y) \cap \Psi_1(y) \ne \varnothing$ для любого $y \in Y$ и $f(y) \in (Q(y) \cap \Psi_1(y))$ для любого $y \in A$.

Тогда, в силу теоремы о сечении пересечения многозначных отображений (см. [13]) существует непрерывное отображение $g_1 : Y \to E$, которое является непрерывным сечением Ψ_1, совпадает с отображением f на множестве A и $\parallel g_1(y) - g_0(y) \parallel < r(y)$. Очевидно, что построенное отображение удовлетворяет условиям 1—3.

Предположим, что мы построили отображения $g_0, g_1, \ldots, g_n$, удовлетворяющие условиям 1—3. Пусть $\Psi_{i+1}(y) = F(g_i(y), y)$. Тогда для всех $y \in Y$ имеем,

$$\rho(g_n(y), \Psi_{n+1}(y)) \le h(F(g_{n-1}(y), y); F(g_n(y), y)) \le$$
$$\le k\|g_n(y) - g_{n-1}(y)\| < k^n r(y).$$

Тогда у многозначного отображения Ψ_{n+1} существует непрерывное сечение $g_{n+1}(y)$, которое удовлетворяет условиям 1—3. Это и заканчивает построение последовательности $\{g_n\}$.

Покажем теперь, что для любого $y \in Y$ последовательность $x_n = g_n(y)$ является фундаментальной. Действительно,

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leq \| x_{n+1} - x_n \| +$$
$$+ \| x_{n+2} - x_{n+1} \| + ... + \| x_{n+p} - x_{n+p-1} \| <$$
$$< r(y)(k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1}) < \frac{r(y)}{1-k} k^n.$$

Из этого неравенства и вытекает фундаментальность последовательности x_n.

Пусть $g(y) = \lim_{n\to\infty} g_n(y)$, докажем непрерывность этого отображения. Действительно, пусть y_0 — произвольная точка из Y, тогда в некоторой окрестности V этой точки для любого $y \in V$ справедливо неравенство $\| r(y) \| \leq \| r(y_0) \| + 1$. Тогда на множестве V последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится к отображению g, что и гарантирует непрерывность g на этом множестве (следовательно, в точке y_0). Так как точка y_0 выбиралась произвольно, то g является непрерывным отображением.

Переходя к пределу при фиксированном y в условии 1 построенной последовательности, получаем включение $g(y) \in F(g(y), y)$.

Условие $g|_A = f$ вытекает из свойства 3 построенной последовательности. Теорема доказана.

Отметим работы [14], [15] в которой получены близкие утверждения.

В качестве приложения теоремы 1.11, докажем теорему о структуре множества неподвижных точек многозначных сжимающих отображений. Дадим следующее определение.

Пусть X — метрическое пространство, A — подмножество в X.

1.12. Определение. *Будем говорить, что множество A является сильным деформационным ретрактом пространства X, если существует непрерывное отображение $\tau : X \times [0,1] \to X$ такое, что:*

(1) $\tau(x,0) = x$ для любого $x \in X$;

(2) $\tau(x,\lambda) = x$ для любого $x \in A$ и $\lambda \in [0,1]$;

(3) $\tau(x,1) \in A$ для любого $x \in X$.

1.13. Теорема. *Пусть X — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E, $F : X \to Cv(X)$ — многозначное сжимающее отображение. Тогда множество K неподвижных точек этого отображения является сильным деформационным ретрактом пространства X.*

Доказательство. Пусть $Y = X \times [0,1]$. Рассмотрим многозначное отображение $\hat{F} : X \times Y \to Cv(X)$ определенное условием:

$$\hat{F}(x,z,\lambda) = \begin{cases} X, & \text{если } \lambda \neq 1; \\ F(x), & \text{если } \lambda = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1.11, т.е. оно полунепрерывно снизу по совокупности переменных и для любого $y = (z,\lambda)$ и любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$h(\hat{F}(x_1,z,\lambda), \hat{F}(x_2,z,\lambda)) \leq k \| x_1 - x_2 \|.$$

Пусть $A = (X \times \{0\}) \cup (K \times [0,1]) \subset Y$. Очевидно, что это множество замкнуто.

Рассмотрим непрерывное отображение $f : A \to X$ определенное условиями:

$$f(z,0) = z \text{ для любого } z \in X;$$
$$f(z,\lambda) = z \text{ для любого } z \in K, \lambda \in [0,1].$$

Тогда $z = f(z,\lambda) \in \hat{F}(f(z,\lambda), z, \lambda)$ для любых $(z,\lambda) \in A$.

В силу теоремы 1.11, существует непрерывное отображение $g : Y \to X$ удовлетворяющее следующим условиям:

а) $g(z,\lambda) \in X$ для любых $z \in X$ и $\lambda \in [0,1]$;

б) отображение g является непрерывным продолжением отображения f, т.е. для любого $(z,\lambda) \in A$ справедливо равенство $g(z,\lambda) = f(z,\lambda) = z$;

в) $g(z,1) \in \hat{F}(g(z,1), z, 1) = F(g(z,1))$ для любого $z \in X$, т.е. $g(z,1) \in K$.

Таким образом, отображение g является сильной деформационной ретракцией пространства X на множество K. Теорема доказана.

Доказанная теорема дополняет теорему Ричери (см. [16]).

1.14. Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 1.13, тогда множество K неподвижных точек отображения F имеет гомотопический тип точки.*

Доказательство. Так как множество K является сильным деформационным ретрактом выпуклого замкнутого множества X, то они имеют одинаковый гомотопический тип (см., например, [17]). Так как X имеет гомотопический тип точки, то это и доказывает утверждение.

Рассмотрим приложение теоремы 1.11 к проблеме глобальной обратимости многозначных отображений.

1.15. Теорема. *Пусть $F : E \to Cv(E)$ — многозначное сжимающее отображение, отображение $\Phi : E \to Cv(E)$ определено условием $\Phi(x) = x - F(x)$. Пусть A — замкнутое подмножество в E, $g : A \to E$ — однозначное непрерывное отображение такое, что $\Phi(g(y)) \ni y$. Тогда существует непрерывное отображение $\tilde{g} : E \to E$ такое, что:*

1) $\Phi(\tilde{g}(y)) \ni y$ *для любого* $y \in E$ *;*

2) $\tilde{g}\,|_A = g$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $\tilde{F} : E \times E \to Cv(E)$, $\tilde{F}(x, y) = F(x) + y$. Очевидно, что это отображение является сжимающим по x и полунепрерывным снизу по совокупности переменных. В силу условий теоремы, для любой точки $y \in A$ справедливо включение $g(y) \in F(g(y)) + y$, т. е. $g(y) \in \tilde{F}(g(y), y)$. Так как к отображению $\tilde{F}$ применима теорема 1.11, то существует непрерывное отображение $\tilde{g} : E \to E$ такое, что $\tilde{g}(y) \in \tilde{F}(\tilde{g}(y), y)$ и $\tilde{g}$ является непрерывным продолжением отображения g . Очевидно, что это и есть искомое отображение.

2. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ С СЮРЪЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

2.1. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЮРЪЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть E_1, E_2 — два банаховых пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор. Пусть $L = Ker(a)$ — ядро оператора a . Рассмотрим фактор-пространство $E = E_1 / Ker(a)$. Пусть p — проекция пространства E_1 на E . Известно, что норма в пространстве E определяется следующим образом:

если $[x] = x + Ker(a) \in E$, то $\|[x]\| = \inf\limits_{u \in Ker(a)} \|x + u\|$.

Рассмотрим отображение $a_1 : D(a_1) \subset E \to E_2$, где $D(a_1) = p(D(a))$ и $a_1([x]) = a(x)$. Хорошо известно (см., например, [18]), что отображение a_1 является замкнутым, имеет нулевое ядро и сюръективно. Тогда оператор a_1 имеет непрерывный обратный оператор $a_1^{-1} : E_2 \to E$ и

$$\| a_1^{-1} \| = \sup_{y \in E_2} \frac{\| a_1^{-1}(y) \|}{\| y \|} =$$

$$= \sup_{y \in E_2} \left(\frac{\inf\{\| x \| \mid x \in E_1, a(x) = y\}}{\| y \|} \right).$$

Число $\|a_1^{-1}\|$ будем называть нормой многозначного отображения a^{-1} и обозначать $\|a^{-1}\|$.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления нормы многозначных обратных отображений.

2.1. Пример. Пусть $C_{[a,b]}$ — пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве E . Рассмотрим оператор дифференцирования

$$d : D(d) \subset C_{[a,b]} \to C_{[a,b]},$$

где $D(d)$ — множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Очевидно, что оператор d является замкнутым сюръективным оператором.

2.2. Предложение. *Число* $\| d^{-1} \| = \frac{b-a}{2}$.

Доказательство. Пусть $y = y(t) \in C_{[a,b]}$, $\| y \|_C = \max\limits_{s \in [a,b]} \| y(s) \|$.

Рассмотрим

$$d^{-1}(y) = \{x = x(t) \in C_{[a,b]} \mid x(t) =$$

$$= \alpha + \int_a^t y(s)ds, \ \alpha \in E\}.$$

Тогда

$$\inf\{\| x \|_C \mid x \in d^{-1}(y)\} = \inf_{\alpha \in E} \| \alpha + \int_a^t y(s)ds \|_C \leq$$

$$\leq \| \int_a^t y(s)ds - \int_a^{\frac{a+b}{2}} y(s)ds \|_C = \| \int_{\frac{a+b}{2}}^t y(s)ds \|_C \leq$$

$$\leq \max_{a \leq t \leq b} | \int_{\frac{a+b}{2}}^t \| y(s) \| ds | = \frac{b-a}{2} \| y \|_C .$$

Следовательно, $\| d^{-1} \| \leq \frac{b-a}{2}$.

Покажем, что $\| d^{-1} \| = \frac{b-a}{2}$. Для этого рассмотрим вектор-функцию $y_0(t) = e$ для любого $t \in [a, b]$, где e — произвольный ненулевой вектор из E . Тогда

$$d^{-1}(y_0) = \{x = x(t) \in C_{[a,b]} \mid x(t) =$$

$$= \alpha + te, \alpha \in E\}.$$

Следовательно,

$$\inf\{\| x \| \mid x \in d^{-1}(y_0)\} = \inf_{\alpha \in E} \max_{a \leq t \leq b} \| \alpha + te \| =$$

$$= \inf_{\alpha \in E} \max\{\| be + \alpha \|, \| ae + \alpha \|\}$$

Покажем, что это число равно $\frac{b-a}{2} \| e \|$. Очевидно, что если рассмотреть $\alpha_0 = -\frac{b+a}{2} e$, то

$$\max\{\| be + \alpha_0 \|, \| ae + \alpha_0 \|\} = \frac{b-a}{2} \| e \|,$$

т.е.

$$\inf\{\| x \| \mid x \in d^{-1}(y_0)\} \leq \frac{b-a}{2} \| e \| .$$

Предположим, что

$$\inf_{\alpha \in E} \max\{\| be + \alpha \|, \| ae + \alpha \|\} < \frac{b-a}{2} \| e \|,$$

тогда существует такой вектор $\alpha_1 \in E$, что

$$\max\{\| be + \alpha_1 \|, \| ae + \alpha_1 \|\} < \frac{b-a}{2} \| e \| .$$

В этом случае,

$$\| be+\alpha_1 \| + \| ae+\alpha_1 \| < \| be-ae \|,$$

а это противоречит неравенству треугольника.

Так как $\| y_0 \| = \| e \|$, то $\| d^{-1} \| \geq \frac{b-a}{2}$, что и доказывает утверждение.

2.3. Пример. Пусть $L^1_{[a,b]}$ — пространство суммируемых вектор-функций, определенных на отрезке $[a,b]$ со значениями в банаховом пространстве E. Рассмотрим оператор дифференцирования $d: D(d) \subset C_{[a,b]} \to L^1_{[a,b]}$, где $D(d)$ — множество абсолютно непрерывных вектор-функций. Очевидно, что оператор d является замкнутым сюръективным оператором. Вычислим для него число $\| d^{-1} \|$. Аналогично предложению 2.2. можно доказать следующее утверждение.

2.4. Предложение. *Число* $\| d^{-1} \| = \frac{1}{2}$.

2.5. Пример. Хорошо известно, что если $a: D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, то в множестве $D(a)$ можно рассмотреть норму графика $\| x \|_{1,2} = \| x \|_1 + \| a(x) \|_2$. Множество $D(a)$ снабженное нормой $\| x \|_{1,2}$ является банаховым пространством. Обозначим его E. Тогда определен непрерывный линейный оператор $\tilde{a}: E \to E_2$, $\tilde{a}(x) = a(x)$. Нетрудно видеть, что в силу определения нормы многозначного обратного оператора числа $\| a^{-1} \|$ и $\| \tilde{a}^{-1} \|$ связаны следующим соотношением: $\| \tilde{a}^{-1} \| = \| a^{-1} \| + 1$.

Нетрудно также проверить, что норма многозначного обратного отображения обладает следующими свойствами:

2.6. Предложение. *1) Пусть $b: E_2 \to E_1$ — линейный непрерывный оператор правый обратный к оператору a, т.е. $a(b(y)) = y$ для любого $y \in E_2$, тогда $\| a^{-1} \| \leq \| b \|$.*
2) Пусть $M \subset E_2$ — замкнутое подпространство, $L = a^{-1}(M)$, $T \subset E_1$ — замкнутое подпространство, содержащее L, $\tilde{a}: L \subset T \to M$ — сужение оператора a на линейное многообразие L. Тогда $\tilde{a}$ является замкнутым линейным сюръективным оператором и $\| a^{-1} \| \leq \| \tilde{a}^{-1} \|$.

Изучим многозначное отображение $a^{-1}: E_2 \to Cv(E_1)$, где

$$a^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid a(x) = y\}.$$

2.7. Лемма. *Отображение a^{-1} является липшицевым многозначным отображением с константой липшица $\| a^{-1} \|$, т.е.*

$$h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2)) \leq \| a^{-1} \| \| x_1 - x_2 \|.$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in E_2$, вычислим $h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2))$. В силу леммы 1.1 имеем:

$$h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2)) =$$
$$= \inf\{\|z_1 - z_2\| \mid z_1 \in a^{-1}(x_1), z_2 \in a^{-1}(x_2)\} =$$
$$= \inf\{\|z_1 - z_2\| \mid z_1 - z_2 \in a^{-1}(x_1 - x_2)\} \leq$$
$$\leq \|a^{-1}\| \|x_1 - x_2\|.$$

Если подпространство $Ker(a)$ не является дополняемым в пространстве E_1, то не существует линейного непрерывного оператора правого обратного к оператору a, однако имеет место следующее утверждение.

2.8. Лемма. *(i) Пусть y_0 — произвольная точка из пространства E_2, x_0 — произвольная точка из множества $a^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа k, $\| a^{-1} \| < k$, существует непрерывное отображение $q: E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*
1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $\| x_0 - q(y) \| \leq k \| y_0 - y \|$ для любого $y \in E_2$.

(ii) Для любого числа k, $\| a^{-1} \| < k$, существует нечетное непрерывное отображение $\tilde{q}: E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:
1) $a(\tilde{q}(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $\| \tilde{q}(y) \| \leq k \| y \|$ для любого $y \in E_2$.

Доказательство. (i) Пусть $a^{-1}: E_2 \to E_1$ — отображение обратное к a. Очевидно, что оно имеет выпуклые замкнутые образы. Так как оно липшицево, то оно является полунепрерывным снизу многозначным отображением. Пусть k — произвольное число, большее $\| a^{-1} \|$. Рассмотрим другое многозначное отображение $\mathbf{\Phi}: E_2 \setminus y_0 \to Cv(E_1)$,

$$\mathbf{\Phi}(y) = \{x \in E_1 \mid \| x - x_0 \| < k \| y - y_0 \|.$$

Покажем, что для любого $y \in (E_2 \setminus y_0)$ пересечение

$$F(y) = a^{-1}(y) \cap \mathbf{\Phi}(y) \neq \varnothing.$$

Действительно, так как

$$h(a^{-1}(y_0), a^{-1}(y)) \leq \| a^{-1} \| \| y - y_0 \| < k \| y - y_0 \|,$$

то существует точка $x \in a^{-1}(y)$ такая, что $\| x - x_0 \| < k \| y - y_0 \|$. Это и доказывает непустоту $F(y)$.

Так как $\mathbf{\Phi}$ является многозначным U-отображением, то по теореме по теореме о пересечении многозначных отображений (см. [13]) у отображения F существует непрерывное сечение $g: E_2 \setminus y_0 \to E_1$, т.е. $g(y) \in F(y)$ для любого $y \in (E_2 \setminus y_0)$. Рассмотрим отображение $q: E_2 \to E_1$,

$$q(y) = \begin{cases} g(y), & \text{если } y \neq y_0; \\ x_0, & \text{если } y = y_0. \end{cases}$$

Так как $\| g(y) - x_0 \| \le k \| y - y_0 \|$ для любого $y \in E_2 \setminus 0$, то отображение q является непрерывным. Это и доказывает (i).

(ii) Так как $0 \in a^{-1}(0)$, то в силу доказанного, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$ удовлетворяющее условиям:

(1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\| q(y) \| \le k \| y \|$ для любого $y \in E_2$.

Рассмотрим отображение $\tilde{q} : E_2 \to E_1$, $\tilde{q}(x) = \frac{1}{2}(q(x) - q(-x))$. Нетрудно проверить, что это отображение и будет искомым. Лемма доказана.

Если $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор, то естественно определяется отображение $\hat{a} : D(\hat{a}) \subset C_{([a,b],E_1)} \to C_{([a,b],E_2)}$ по следующему правилу:

$$\hat{a}(x)(t) = a(x(t)),$$

где $D(\hat{a}) = C_{([a,b],D(a))} \bigcap \hat{a}^{-1}(C_{([a,b],E_2)})$. Очевидно, что множество $D(\hat{a}) \neq \varnothing$. Изучим свойства отображения $\hat{a}$.

2.9. Предложение. *(i) Отображение $\hat{a}$ линейно и замкнуто.*
(ii) Отображение $\hat{a}$ сюръективно.
(iii) $\| \hat{a}^{-1} \| = \| a^{-1} \|$.

Доказательство. (i) Линейность отображения $\hat{a}$ очевидна. Проверим замкнутость. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset D(\hat{a})$ и $\{x_n\} \to x_*$. Пусть последовательность $\{y_n\} \to y_*$, где $y_n = \hat{a}(x_n)$. Тогда для любого $t \in [a,b]$ имеем, $x_n(t) \to x_*(t)$ и $a(x_n(t)) = y_n(t) \to y_*(t)$. Следовательно, в силу замкнутости оператора a получаем, $x_*(t) \in D(a)$ и $a(x_*(t)) = y_*(t)$. Таким образом, $x_* \in D(\hat{a})$ и $\hat{a}(x_*) = y_*$, т.е. $\hat{a}$ является замкнутым оператором.

(ii) Докажем сюръективность оператора $\hat{a}$. Пусть $y \in C_{([a,b],E_2)}$ — произвольная функция. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — произвольное непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям леммы 2.8. Пусть функция $x(t) = q(y(t))$. Нетрудно проверить тогда, что $x \in D(\hat{a})$ и $\hat{a}(x) = y$.

(iii) Пусть k — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $k > \| a^{-1} \|$. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — произвольное непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям леммы 2.8. Тогда для любой функции $y \in C_{([a,b],E_2)}$ существует функция $x(t) = q(y(t))$ такая, что $a(x) = y$ и $\| x \| \le k \| y \|$. Следовательно, $\| \hat{a}^{-1} \| \le k$. Так как число k бралось произвольно, то $\| \hat{a}^{-1} \| \le \| a^{-1} \|$.

Докажем теперь неравенство в обратную сторону. Пусть $k > \| \hat{a}^{-1} \|$, рассмотрим произвольную точку $y_0 \in E_2$ и функцию $\breve{y}$, $\breve{y}(t) = y_0$ для любого $t \in [a,b]$. Тогда существует функция $x \in \hat{a}^{-1}(\breve{y})$ такая, что $\| x \| \le k \| \breve{y} \|$. Следовательно, $\| x(t) \| \le k \| y_0 \|$ для любого $t \in [a,b]$. Пусть $x_0 = x(t_0) \in E_1$, где t_0 некоторая точка из $[a,b]$. Тогда, $a(x_0) = y_0$ и $\| x_0 \| \le k \| y_0 \|$. Теперь требуемое неравенство вытекает из произвольность числа k.

2.2. РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИПШИЦЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Пусть E_1, E_2 — два банаховых пространства, $a : D(a) \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : X \subset E_1 \to E_2$ — липшицево отображение, т.е. существует константа $c > 0$, такая, что для любых $x_1, x_2 \in E_1$ выполнено неравенство: $\| f(x_1) - f(x_2) \| \le c \| x_1 - x_2 \|$.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$a(x) = f(x). \tag{2.1}$$

Обозначим $N(a,f)$ множество решений этого уравнения, т.е.

$$N(a,f) = \{x \in X \mid \ a(x) = f(x)\}.$$

Уравнения такого вида изучались в работах [16], [6], [19], [20] и др. Имеет место следующая теорема.

2.10. Теорема. *Пусть $f : E_1 \to E_2$ — липшецево отображение с константой липшица c.*
(1) Если $c < \dfrac{1}{\| a^{-1} \|}$, то множество решений $N(a,f)$ непусто и является сильным деформационным ретрактом пространства E_1.
(2) Если кроме этого $Ker(a) \neq \{0\}$, то множество $N(a,f)$ состоит из бесконечного множества точек и имеет гомотопический тип точки.

Доказательство. Очевидно, что уравнение (2.1) эквивалентно включению $x \in F(x)$, где $F(x) = a^{-1}(f(x))$. Покажем, многозначное отображение F имеет неподвижные точки. Для этого заметим, что оно является сжимающим. Действительно,

$$h(F(x);F(y)) = \rho_*(F(x),F(y)) = \rho_*(F(y),F(x)) =$$
$$= \inf\{\| z_1 - z_2 \| \mid z_1 \in F(x), z_2 \in F(y)\} =$$
$$= \inf\{\| z_1 - z_2 \| \mid a(z_1 - z_2) = f(x) - f(y)\} \le$$
$$\le \| a^{-1} \| \| f(x) - f(y) \| \le \| a^{-1} \| c \| x - y \|.$$

Так как по условию теоремы $\| a^{-1} \| c < 1$, то многозначное отображение F является сжимающим. Теперь справедливость теоремы вытекает из следствия 1.8 и теоремы 1.13.

Справедливость (2) вытекает из теоремы 1.9.

Рассмотрим теперь разрешимость уравнения (2.1) в шаре банахова пространства E_1.

Пусть $x_0 \in E_1$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0, $f : B_R[x_0] \to E_2$ — липшицево отображение с константой Липшица c.

2.11. Теорема. *Пусть отображения a и f удовлетворяют следующим условиям:*

1) $c < \dfrac{1}{\| a^{-1} \|}$;

2) существует такая точка $y_0 \in D(a)$, что $a(y_0) = f(x_0)$ и

$$\| x_0 - y_0 \| < (1 - c \| a^{-1} \|)R.$$

Тогда уравнение (2.1) имеет решение в шаре $B_R[x_0]$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $F(x) = a^{-1}(f(x))$. Как и в теореме 2.10 можно показать, что это отображение является сжимающим с константой Липшица $k = c \| a^{-1} \|$. Оценим расстояние $\rho(x_0, F(x_0))$. Имеем,

$$\rho(x_0, F(x_0)) = \inf_{y \in F(x_0)} \rho(x_0, y) =$$

$$= \inf\{\|x_0 - y\| \mid a(y) = f(x_0)\} \le \|x_0 - y_0\| < (1-k)R.$$

Таким образом, мы находимся в условиях следствия 1.7, откуда и вытекает утверждение теоремы.

3. О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

3.1. О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИПШИЦЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Вырожденные дифференциальные уравнения имеют много конкретных интерпретаций (см., например, монографии [21], [22] и библиографию в них). Одним из первых задачу Коши для уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производных, изучал С. Л. Соболев [23]. С тех пор уравнения такого вида принято называть уравнениями соболевского типа. Абстрактные дифференциальные уравнения соболевского типа изучались в работах [24], [25], [26] и многих других. В настоящем разделе будет доказана теорема о существовании локального решения задачи Коши у одного класса вырожденных дифференциальных уравнений, у которых вырождение задается замкнутым сюръективным оператором. Основные результаты этого раздела опубликованы в работе автора [7].

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $b : D(b) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный оператор, подчиненный оператору a, т.е. $D(a) \subset D(b)$. Пусть $x_0 \in D(a)$, $B_R[x_0] \subset E_1$, $f : [0,T] \times B_R[x_0] \to E_2$ — непрерывное отображениее, липшицево по второму аргументу с константой Липшица c.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(ax)' = b(x) + f(t,x), \tag{3.1}$$

$$a(x(0)) = a(x_0). \tag{3.2}$$

Решением задачи (3.1), (3.2) на промежутке $[0,h]$, $0 < h \le T$, называется непрерывная функция $x_* : [0,h] \to D(a)$ такая, что $(ax_*(t))' = b(x_*(t)) + f(t, x_*(t))$ для любого $t \in [0,h]$ и $a(x_*(0)) = a(x_0)$. Пусть $\Sigma(x_0, [0,h])$ — множество решений задачи (3.1), (3.2) на промежутке $[0,h]$.

3.1. Теорема. *При сделанных предположениях существует такое $h_0 > 0$, что $\Sigma(x_0, [0,h_0]) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть E это множество $D(a)$ снабженное нормой графика, $\tilde{a}, \tilde{b} : E \to E_2$ — линейные непрерывные операторы, порожденные a и b. Пусть $B_R[x_0] \subset E$ — замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0 пространства E. Если $j : E \to D(a) \subset E_1$ — отображение вложения, то $j(B) \subset B_R[x_0]$. Определим отображение $\tilde{f} : [0,T] \times B_R[0] \to E_2$ по правилу $\tilde{f}(t,x) = f(t,x)$. Очевидно, что $\tilde{f}$ является липшицевым по второму аргументу отображением с константой Липшица c.

Пусть $h \in (0,T]$ произвольное число. Рассмотрим линейный оператор

$$\hat{a} : C_{([0,h],E)} \to C_{([0,h],E_2)},$$

$$\hat{a}(x)(t) = \tilde{a}(x(t)),$$

построенный по оператору $\tilde{a}$. Этот оператор является непрерывным и сюръективным (см. предложение 2.9).

Пусть вектор-функция $\overline{x}_0 \in C_{([0,h],E)}$ определена условием: $\overline{x}_0(t) = x_0$ для любого $t \in [0,h]$. Пусть $T_R[\overline{x}_0] \subset C_{([0,h],E)}$ — замкнутый шар радиуса R с центром в $\overline{x}_0$. Рассмотрим отображение $g : T_R[\overline{x}_0] \to C_{([0,h],E_2)}$ определенное условием,

$$g(x)(t) = \int_0^t b(x(s))\,ds + \int_0^t f(s, x(s))\,ds + a(x_0).$$

Это отображение является липшицевым и константа Липшица $c_1 = h(\| \tilde{b} \| + c)$. Рассмотрим уравнение $\hat{a}(x) = g(x)$, т.е.

$$\tilde{a}(x(t)) = \int_0^t b(x(s))\,ds + \int_0^t f(s, x(s))\,ds + a(x_0) \quad (3.3)$$

для любого $t \in [0, h]$. Нетрудно видеть, что любое решение этого операторного уравнения является решением задачи (3.1), (3.2).

Для доказательства существования решения уравнения (3.3) воспользуемся теоремой 2.11. Пусть положительное число h_1 удовлетворяет неравенству

$$h_1 < \frac{1}{(\| \tilde{b} \| + c) \| \hat{a}^{-1} \|},$$

тогда выполнено неравенство $c_1 < \frac{1}{\|\hat{a}^{-1}\|}$.

Пусть $z_0(t) = \int_0^t b(x_0)\,ds + \int_0^t f(s, x_0)\,ds + a(x_0)$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : [0, h] \to Cv(E)$, $\Phi(t) = \tilde{a}^{-1}(z_0(t))$. Нетрудно доказать, что существует непрерывная функция $y_0 : [0, h] \to E$, удовлетворяющая условиям:

1) $y_0(t) \in \tilde{a}^{-1}(z_0(t))$ для любого $t \in [0, h]$;
2) $y_0(0) = x_0$.

Пусть h_2 такое число, что

$$\| y_0(t) - x_0 \|_{1,2} < (1 - c_1 \| \hat{a}^{-1} \|) R$$

для любого $t \in [0, h_2]$. Такое число существует в силу непрерывности функции y_0. Пусть $h_0 = \min\{h_1, h_2\}$, тогда отображения $\hat{a}$ и g на шаре $T_R[\overline{x}_0] \subset C_{([0,h_0],E)}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.11, что и доказывает утверждение.

В случае если правая часть дифференциального уравнения (3.1) определена на $[0, T] \times E_1$, то можно больше сказать о свойствах множества решений задачи (3.1), (3.2).

3.2. Теорема. *Пусть b — замкнутый линейный оператор, подчиненный оператору a, $f : [0, T] \times E_1 \to E_2$ — непрерывное отображениее, липшицево по второму аргументу с константой Липшица c. Тогда:*

(1) существует такое $h_0 > 0$, что задача (3.1), (3.2) имеет решение на промежутке $[0, h_0]$ и множество решений $\Sigma(x_0, [0, h_0])$ имеет гомотопический тип точки в метрике, порожденной нормой графика;

(2) если $Ker(a) \neq \{0\}$, то задача (3.1), (3.2) имеет бесконечное число решений.

Доказательство этой теоремы вытекает из следствия 1.14.

3.2. О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЯЕМОСТИ

В этом разделе теоремы о разрешимости операторных уравнений $a(x) = f(x)$ будут применены к проблеме управляемости нелинейными системами вида

$$x' = Ax + Bu + f(t, x, u),$$

где A и B — линейные операторы, f — нелинейное возмущение. Ранее, подобная задача изучалась в работах [27], [28], [29] и многих других. Отметим работу [30], в которой для решения подобной задачи применялись топологические методы.

Будет показано, что если линейная система является управляемой, то при малых (в некотором смысле) возмущениях полученная система также будет управляемой. Предлагается новый подход к решению этой задачи, который не только позволяет доказать управляемость возмущенной системы, но и получить информацию о свойствах множества решений соответствующих краевых задач.

Пусть $AC_{([0,1],R^n)} \subset C_{([a,b],R^n)}$ — подмножество абсолютно непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,1]$, со значениями в R^n, $L^{\infty}_{([0,1],R^m)}$ — пространство измеримых почти всюду ограниченных функций, определенных на отрезке $[0,1]$, со значениями в R^m, $L^1_{([0,1],R^n)}$ — пространство суммируемых функций, определенных на отрезке $[0,1]$, со значениями в R^n. Обозначим $L(R^n, R^n)$, $L(R^n, R^m)$ — пространства непрерывных линейных операторов.

Рассматрим управляемую систему:

$$x' - A(t)x - B(t)u = 0, \quad (3.3)$$

$$x(0) = x_0, \ \ x(1) = x_1, \quad (3.4)$$

где $A : [0,1] \to L(R^n, R^n)$, $B : [0,1] \to L(R^m, R^n)$ — суммируемые отображения.

Решением этой задачи будем называть такую пару $(x = x(t), u = u(t))$, $x \in AC_{([0,1],R^n)}$, управление $u \in L^{\infty}_{([0,1],R^m)}$, которые удовлетворяют уравнению (3.3) для почти всех $t \in [0,1]$ и краевым условиям (3.4).

3.3. Определение. *Будем говорить что система (3.3) вполне управляема, если задача (3.3), (3.4) разрешима для любых $x_0, x_1 \in R^n$.*

Рассмотрим множество

$$D(a) = AC_{([0,1],R^n)} \times L^{\infty}_{([0,1],R^m)} \subset C_{([a,b],R^n)} \times L^{\infty}_{([0,1],R^m)}.$$

Пусть линейный оператор $a : D(a) \to L^1_{([0,1],R^n)} \times R^n \times R^n$ определен условием,

$$a(x,u)(t) = (x'(t) - A(t)x(t) - B(t)u(t), x(0), x(1)).$$

Нетрудно проверить, что a является замкнутым линейным оператором.

3.4. Лемма. *Система (3.3) вполне управляема, тогда и только тогда, когда оператор a является сюрьективным.*

Доказательство. Достаточность очевидна.

Покажем необходимость. Рассмотрим произвольную точку

$$(h, z_0, z_1) \in L^1_{([0,1],R^n)} \times R^n \times R^n$$

и покажем, что эта точка принадлежит области значений оператора a. Пусть $v(t)$ произвольная функция из $L^\infty_{([0,1],R^m)}$ Рассмотрим уравнение

$$x'(t) - A(t)x(t) - B(t)v(t) = h(t).$$

Пусть $y(t)$ — произвольное решение этого уравнения. Обозначим $x_0 = z_0 - y(0)$, $x_1 = z_1 - y(1)$. В силу того, что система (3.3) является вполне управляемой, существует решение (x,u) этой системы такое, что $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Тогда

$$a((y,v) + (x,u)) = (h, z_0, z_1),$$

что и требовалось доказать.

Некоторые критерии управляемости линейных систем содержатся в [31].

Рассмотрим теперь нелинейные системы. Пусть $f:[0,1]\times R^n \times R^m \to R^n$ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

I_1) для любых $x \in R^n, u \in R^m$ отображение $f_{x,u} = f(\cdot, x, u):[0,1] \to R^n$ является сумируемым;

I_2) для почти всех $t \in [0,1]$ отображение $f_t = f(t,\cdot,\cdot): R^n \times R^m \to R^n$ является непрерывным;

I_3) существует такое число $c > 0$, что для любых $x, y \in R^n$, $u, v \in R^m$ и почти всех $t \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$\| f(t,x,u) - f(t,y,v) \| \le c(\| x - y \| + \| u - v \|).$$

Очевидно, что это отображение порождает оператор суперпозиции $\hat{f}: C_{([0,1],R^n)} \times L^\infty_{([0,1],R^m)} \to L^1_{([0,1],R^n)}$, по правилу, $\hat{f}(x,u)(t) = f(t, x(t), u(t))$.

Рассматрим следующую задачу:

$$x' - A(t)x - B(t)u = f(t,x,u), \qquad (3.5)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \qquad (3.6)$$

где $A:[0,1] \to L(R^n, R^n)$, $B:[0,1] \to L(R^m, R^n)$ — суммируемые отображения.

Будем говорить что система (3.5) вполне управляема, если задача (3.5), (3.6) разрешима для любых $x_0, x_1 \in R^n$.

Пусть отображение $g: C_{([0,1],R^n)} \times L^\infty_{([0,1],R^m)} \to$ $\to L^1_{([0,1],R^n)} \times R^n \times R^n$ определено условием:

$$g(x,u) = (\hat{f}(x,u), x_0, x_1).$$

Очевидно, что система (3.5) является вполне управляемой, тогда и только тогда, когда для любых $x_0, x_1 \in R^n$ имеет решение операторное уравнение

$$a(x,u) = g(x,u). \qquad (3.7)$$

Применим к изучению уравнения (3.7) результаты, полученные ранее.

3.5. Теорема. *Пусть система $x' - A(t)x - B(t)u = 0$ вполне управляема. Пусть отображение f удовлетворяет условиям I_1, I_2 и I_3. Если число c из условия I_3 меньше $\frac{1}{\|a^{-1}\|}$, то система (3.5) является вполне управляемой, причем, для любых $x_0, x_1 \in R^n$, множество решений задачи (3.5), (3.6) является сильным деформационным ретрактом пространства $C_{([0,1],R^n)} \times L^\infty_{([0,1],R^m)}$.*

Доказательство. Определим норму в прямом произведении пространств как сумму норм сомножителей. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in AC_{[0,1]}$, $u_1, u_2 \in L^\infty_{([0,1],R^m)}$, $x_0, x_1 \in R^n$. Тогда

$$\| g(x,u_1) - g(y,u_2) \| = \| \hat{f}(x,u_1) - \hat{f}(y,u_2) \| =$$

$$= \int_0^1 \| f(t,x(t),u_1(t)) - f(t,y(t),u_2(t)) \| \, dt =$$

$$= c\int_0^1 (\| x(t) - y(t) \| + \| u_1(t) - u_2(t) \|)dt \le$$

$$\le c(\| x - y \| + \| u_1 - u_2 \|),$$

т.е. g является липшицевым отображением с константой c.

Так как оператор a является сюрьективным, то, в силу теоремы 2.10, уравнение (3.7) имеет решение для любых $x_0, x_1 \in R^n$ и множество решений является сильным деформационным ретрактом пространства $C_{([0,1],R^n)} \times L^\infty_{([0,1],R^m)}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nadler S.B.* Multi-valued contraction mappings // Pasif. J. Math. — 1969, Vol. 30, № 2. — P. 475—488.

2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач / М: Наука. — 1974.

3. *Dontchev A.L., Hager W.W.* An inverse mapping theorem for set-valued maps // Proc. Amer. Math. Soc. — Vol. 121, № 2, 1994. — P. 481—490.

5. *Гельман Б.Д.* Обобщенная теорема о неявном отображении// Функциональный анализ и его приложения. — 2001, Т. 35, вып. 3. — С. 183—188.

6. *Гельман Б.Д.* Многозначные сжимающие отображения и уравнения с сюръективными операторами // Труды мат. факультета. — Воронеж: Научная книга. — 2006. — Вып. 10. — С. 49—56.

7. *Гельман Б.Д.* Об одном классе операторных уравнений // Матем. заметки. — 2001, Т. 70, Вып. 4. — С. 544—552.

8. *Гельман Б.Д.* О задаче Коши для одного класса вырожденных дифференциальных уравнений с липшицевой правой частью // Функциональный анализ и его приложения. — 2008, Т. 42, № 3. — С. 78—81.

9. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / М: КомКнига (УРСС). — 2005.

10. *Saint Raymond J.* Points fixes des contractions multivoques // Fixed Point Theory and Appl. — Pitman Rescarch Notes in Math. Ser. Vol. 252. — P. 359—375.

11. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения метрических пространств и неподвижные точки // Доклады РАН. — 2007, 76, № 2, С. 665—668.

12. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // Journal of Fixed Point Theory and its Applications. — 2009 (в печати).

13. *Michael E.* Continuous selections, 1 // Ann. of Math. — 1956, Vol.63, № 2. — P. 361—382.

14. *Гельман Б.Д.* Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки // Матем. заметки. — 2005, Т. 78, вып. 2. — С. 212—222.

15. *Ricceri O.N.* A-Fixed Points of Multi-valued Contraction // Gournal of Math. Anal.and Applic. — 1988. — Vol. 135, № 1. — P. 406—418.

16. *Rybiński L.E.* An application of the continuous selection theorem to the study of the fixed points of multivalued mappings // Journal of Math. Anal. and Appl. — 1990, vol. 153. — P. 391—396.

17. *Ricceri B.* Une propriété topologique de l'ensemble des points fixes d'une contraction multivoque á valeurs convexes // Atti Accad. Nas. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. — 1987, vol. 81. — P. 283—286.

18. *Борсук К.* Теория ретрактов / М: Мир. — 1971.

19. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве / М: Наука. — 1971.

20. *Гельман Б.Д.* Бесконечномерная версия теоремы Борсука—Улама // Функциональный анализ и его приложения. — 2004, т. 38, № 4. — С. 1—5.

21. *Гельман Б.Д.* Об операторных включениях с сюръективными операторами // Вестник ВГУ, серия физика, математика. — 2005, вып. 2. — С. 115—123.

22. *Свиридюк Г.А., Федоров В.Е.* Линейные уравнения соболевского типа. Учеб. пособие / Челяб. гос. ун-т. Челябинск. — 2003.

23. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / N.Y.: Marcel Dekker. — 1999.

24. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954, т. 18. — С. 3—50.

25. *Вишик М.И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Математ. сборник. — 1956, т. 39, № 1. — С. 51—148.

26. *Зубова С.П., Чернышов К.И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. — 1976. Т. 14. — С. 21—39.

27. *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Математ. сборник. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3—42.

28. *Dauer J.P.* Nonlinear Perturbations of Quasilinear Control Systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1976, vol. 54. — P. 717—725.

29. *Lukes D.L.* Global Controllability of Nonlinear Systems // SIAM Journal on Control. — 1972, vol. 11. — P. 112—126.

30. *Mirza K.B., Womack B.F.* On the Controllability of a Class of Nonlinear Systems // Transactions on Automatic Control. — 1972, vol. AC-17. — P. 531—535.

31. *Furi M., Nistri P., Pera M.P., Zezza P.L.* Topological Methods for the Global Controllability of Nonlinear Systems // Journal of optimization and applications. — 1985, vol. 45, № 2. — P. 231—256.

32. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления / М: Наука. — 1972.

Гельман Борис Данилович — доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и геометрии Воронежского государственного университета, тел. 235-692, e-mail: gelman@math.vsu.ru

Gel'man Boris Danilovich — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Docent of the Department of Theory of Functions and Geometry, Voronezh State University, Phone: 235-692, e-mail: gelman@math.vsu.ru