

К УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНОЙ ОДНОРОДНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ПЛОСКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ

Н. Д. Вerveйко, В. И. Просветов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.03.2009

Аннотация. В работе рассмотрена математическая модель плоского нестационарного течения вязкого газа с учетом его микроструктуры, построена явная однородная схема данной задачи. Особое внимание уделено влиянию параметра микроструктуры на устойчивость построенной схемы. Получены оценки устойчивости для геометрических и временных шагов сетки с учетом дополнительных диссипативных членов в случае отсутствия кинематической вязкости.

Ключевые слова: вязкость, газовая динамика, устойчивость конечно-разностных схем.

Abstract. This paper considers mathematical model of two-dimensional non-steady flow of compressible viscid gas with microstructure, its homogeneous explicit finite-difference scheme. Especially it was studied stability of finite-difference scheme subject to microstructure. It is obtained stability rating of geometric interval and time step under the condition, that dissipative term is added, when kinematic viscosity misses.

Keywords: viscosity, gas dynamics, stability of difference schemes.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка явных неоднородных конечно-разностных схем решения нестационарных задач газовой динамики представляет большой интерес, обусловленный простотой алгоритмов, большой скоростью проведения операций и их применимостью в задачах до- и сверхзвукового течения, а также вблизи и на фронтах ударных волн. Большой опыт проведения практических газодинамических расчетов привел к разработке, так называемой, квазигазодинамической модели течения и квазигазодинамическим уравнениям (КГУ) [1]. Основные добавки в классические уравнения газовой динамики введены за счет: кинематической вязкости, теплопроводности газа или искусственной вязкости и других эффектов.

Ниже предложено рассматривать реальный газ как материальную среду с учетом ее микроструктуры и тем самым при построении классических дифференциальных уравнений газовой динамики учитывать характерный линейный размер h представительного элемента (представительного материального объ-

ема) газа [2]. При рассмотрении кинематики движения элемента газа это приводит к уточнению такой характеристики как скорость объемного расширения ε . Рассмотрение скорости относительного удлинения отрезка газа длиной $2h$ (рис. 1) приводит к следующему выражению:

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \left((x_k + hn_i + v_i(x_k + hn_k) - (x_k - hn_i) - v_i(x_k - hn_k))^2 \right)} - 2h}{2h\Delta t}, \quad (1)$$

где n_i — направляющие косинусы отрезка $2h$; v_i — компоненты вектора скорости на концах отрезка среды $v_i(x_i + hn_i)$ и $v_i(x_i - hn_i)$; x_i — координаты средней точки отрезка $2h$.

Разложение в ряд Тейлора по h выражения для $\dot{\lambda}$ с учетом слагаемых до h^2 включительно дает характеристику скорости относительного формоизменения элемента:

$$\frac{\dot{\lambda}}{2} = \varepsilon_c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_c + \dots = \varepsilon, \quad (2)$$

где $\varepsilon_c = \operatorname{div}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ — скорость объемного расширения газа в соответствии с формулой

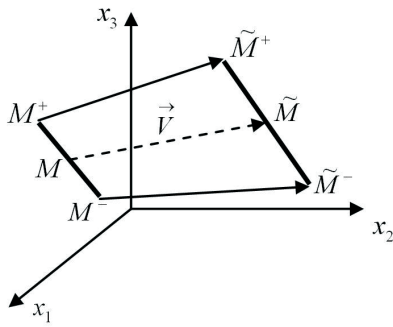


Рис. 1. Схематическое изображение материального отрезка длиной $2h$, который за время Δt перемещается в поле скоростей

Коши; $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$ — оператор Лапласа; ε

— скорость объемного расширения газа с учетом характерного линейного размера h представительного линейного элемента среды газа, меньше которого нет смысла рассматривать газ как сплошную среду.

Уточнение для скорости объемной деформации в классических уравнениях газовой динамики приводит к одному из вариантов КГУ:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mathbf{v} \cdot \Delta v_i, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \varepsilon + \rho \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon = 0, \\ \frac{P}{\rho^\gamma} = C, \\ \varepsilon = \text{div}(\vec{v}), \end{cases} \quad (3)$$

где P — давление; \mathbf{v} — кинематическая вязкость; ρ — плотность газа.

Система уравнений в частных производных (3) содержит первую производную по времени и третьи производные по геометрическим координатам x_1, x_2 и x_3 . Для построения единственного решения система (3) требует задания начальных значений P, ρ, v_i и в случае наличия границы течение необходимо задание граничных условий. Наличие третьей производной по геометрическим координатам требует дополнительного граничного условия на поверхности S , которое может быть сформулировано как условие сращивания внутреннего и внешнего разложения на пограничном слое, обусловленном учетом размера h микроструктуры.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЯВНАЯ ОДНОРОДНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ

Математическая модель нестационарного течения вязкого газа с учетом микроструктуры в двухмерном случае в безразмерной форме представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} E = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}, \\ \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \\ = -Eu \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial T} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \\ = -Eu \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial T} + U \frac{\partial P}{\partial X} + V \frac{\partial P}{\partial Y} + \gamma P E + \\ + \frac{\gamma}{6} \frac{h^2}{L^2} P \left[\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial Y^2} \right] = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $Eu = \frac{P_0}{\tilde{V}_0^2 \cdot \rho_0}$ — число Эйлера; $\text{Re} = \frac{\tilde{V}_0 \cdot L}{\nu}$

— число Рейнольдса; L — характерный размер системы.

Запишем конечно-разностный аналог системы дифференциальных уравнений в безразмерном виде, используя следующий шаблон (рис. 2).

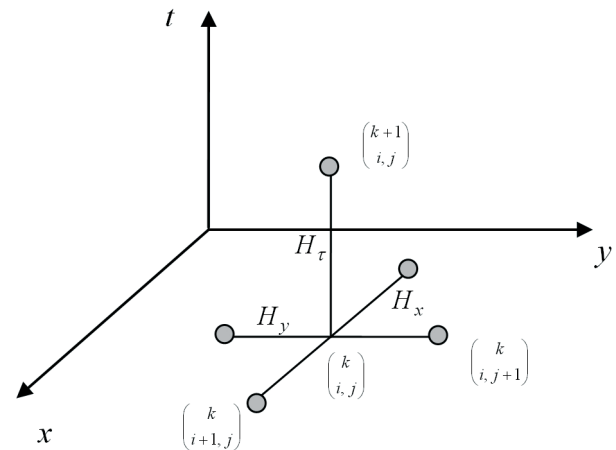


Рис. 2. Шаблон конечно-разностной сетки типа «крест»

$$\left\{ \begin{aligned}
 E_{i,j}^k &= \alpha \frac{U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k}{H_x} + \beta \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{H_x} + \\
 &+ \eta \frac{V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k}{H_y} + \delta \frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^k}{H_y}, \\
 U_{i,j}^{k+1} &= U_{i,j}^k - H_\tau U_{i,j}^k \left(\alpha \frac{U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k}{H_x} + \beta \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{H_x} \right) - \\
 &- H_\tau \cdot V_{i,j}^k \left(\eta \frac{U_{i,j}^k - U_{i,j-1}^k}{H_y} + \delta \frac{U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k}{H_y} \right) - \\
 &- H_\tau \cdot Eu \left(\alpha \frac{P_{i,j}^k - P_{i-1,j}^k}{H_x} + \beta \frac{P_{i+1,j}^k - P_{i,j}^k}{H_x} \right) + \\
 &+ \frac{H_\tau}{\text{Re}} \left(\frac{U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{H_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{H_y^2} \right), \\
 V_{i,j}^{k+1} &= V_{i,j}^k - H_\tau \cdot U_{i,j}^k \left(\alpha \frac{V_{i,j}^k - V_{i-1,j}^k}{H_x} + \beta \frac{V_{i+1,j}^k - V_{i,j}^k}{H_x} \right) - \\
 &- H_\tau V_{i,j}^k \left(\eta \frac{V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k}{H_y} + \delta \frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^k}{H_y} \right) - \\
 &- H_\tau Eu \left(\eta \frac{P_{i,j}^k - P_{i,j-1}^k}{H_y} + \delta \frac{P_{i,j+1}^k - P_{i,j}^k}{H_y} \right) + \\
 &+ \frac{H_\tau}{\text{Re}} \left(\frac{V_{i+1,j}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i-1,j}^k}{H_x^2} + \frac{V_{i,j+1}^k - 2V_{i,j}^k + V_{i,j-1}^k}{H_y^2} \right), \\
 P_{i,j}^{k+1} &= P_{i,j}^k - H_\tau U_{i,j}^k \left(\alpha \frac{P_{i,j}^k - P_{i-1,j}^k}{H_x} + \beta \frac{P_{i+1,j}^k - P_{i,j}^k}{H_x} \right) - \\
 &- H_\tau V_{i,j}^k \left(\eta \frac{P_{i,j}^k - P_{i,j-1}^k}{H_y} + \delta \frac{P_{i,j+1}^k - P_{i,j}^k}{H_y} \right) - \\
 &- H_\tau \gamma P_{i,j}^k E_{i,j}^k - H_\tau \gamma \frac{h^2}{6L^2} P_{i,j}^k \times \\
 &\times \left[\frac{E_{i+1,j}^k - 2E_{i,j}^k + E_{i-1,j}^k}{H_x^2} + \frac{E_{i,j+1}^k - 2E_{i,j}^k + E_{i,j-1}^k}{H_y^2} \right] = 0,
 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНОЙ СХЕМЫ

Для исследования устойчивости полученной явной схемы линеаризуем исходную задачу, а затем используем метод гармоник [3]. Подставим в разностное уравнение частные решения — гармоники:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^k &= U \cdot p^i q^j \xi^k, \\
 V_{i,j}^k &= V \cdot p^i q^j \xi^k, \\
 P_{i,j}^k &= P \cdot p^i q^j \xi^k, \\
 E_{i,j}^k &= E \cdot p^i q^j \xi^k,
 \end{aligned} \quad (6)$$

где $p^i = e^{i\varphi}$, $q^j = e^{j\psi}$, $\xi^k = e^{kz}$.

В результате получим условие нетривильности решения:

$$\begin{vmatrix}
 A & B & 0 & -1 \\
 N - M(\text{Re}) & 0 & C(Eu) & 0 \\
 0 & N - M(\text{Re}) & D(Eu) & 0 \\
 0 & 0 & N & H(h)
 \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

Условие (7) выполняется в трех случаях:

$$N = M(\text{Re}); \quad (8)$$

$$N = \frac{M(\text{Re}) + \sqrt{M^2(\text{Re}) + 4H(h)(AC(Eu) + BD(Eu))}}{2}; \quad (9)$$

$$N = \frac{M(\text{Re}) - \sqrt{M^2(\text{Re}) + 4H(h)(AC(Eu) + BD(Eu))}}{2}. \quad (10)$$

Введем предположение равномерности сетки (11) и связанном управлении производными (12).

$$H_x = H_y = H_s; \quad (11)$$

$$\alpha - \beta = \eta - \delta = \text{sign}(\alpha - \beta) \cdot \varepsilon. \quad (12)$$

Рассмотрим случай $\varphi = \psi = \varphi^*$. Первый случай (8) даст классическое условие устойчивости с преимуществом противопоточных схем.

При рассмотрении второго (9) и третьего (10) случаев в случае отсутствия кинематической вязкости с сохранением предположений (11) и (12) приходим, что выполнение следующего неравенства даст необходимое условие устойчивости:

$$\begin{aligned}
 &2 \left(-2\tilde{V}_{av} \pm G \sqrt{\left(1 - \frac{2}{H_s^2} \frac{h^2}{3L^2} (1 - \cos \varphi^*) \right)} \right) \times \\
 &\times \text{sign}(\alpha - \beta) \varepsilon + \left[(\varepsilon^2 + 1) + (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi^* \right] \frac{H_\tau}{H_s} \times \\
 &\times \left(-2\tilde{V}_{av} \pm G \sqrt{\left(1 - \frac{2}{H_s^2} \frac{h^2}{3L^2} (1 - \cos \varphi^*) \right)} \right)^2 \leq 0,
 \end{aligned} \quad (13)$$

где $G = \sqrt{2Eu\gamma\tilde{P}_0}$.

Сразу можно отметить, что центральная разностная схема неустойчива. При рассмотрении левой ($\alpha = 1, \beta = 0$) и правой ($\alpha = 0, \beta = 1$) производных получаем следующие результаты:

I. $\forall H_s$ выполняется условие

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{2}{H_s^2} \frac{h^2}{3L^2} (1 - \cos \varphi^*) &\geq 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 1 &\geq \frac{4}{H_s^2} \frac{h^2}{3L^2} \Rightarrow H_s \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h}{L}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Для устойчивости следует выполнить условия (15)

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\tau} \leq - \frac{\text{sign}(\alpha - \beta)}{\left(-2\tilde{V}_{av} \pm \sqrt{2Eu\gamma\tilde{P}_0} \sqrt{1 - \frac{4}{H_s^2} \frac{h^2}{3L^2}} \right)} H_s, \\ H_{\tau} \leq - \frac{\text{sign}(\alpha - \beta)}{\left(-2\tilde{V}_{av} \pm \sqrt{2Eu\gamma\tilde{P}_0} \right)} H_s. \end{array} \right. \quad (15)$$

В случае, если $H_s < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{L}$, зафиксируем $\varphi_0^* = \tilde{h}$:

$$|\xi|^2 = 1 - 8\tilde{V}_{av} \frac{H_{\tau}}{H_s} \text{sign}(\alpha - \beta) + 16 \left(\tilde{V}_{av} \frac{H_{\tau}}{H_s} \right)^2 + 8 \left(\frac{H_{\tau}}{H_s} \sqrt{\frac{4}{H_s^2} \frac{h^2}{3L^2}} - 1 \sqrt{Eu\gamma\tilde{P}_0} \text{sign}(\alpha - \beta) \right)^2.$$

При $\tilde{V}_{av} \text{sign}(\alpha - \beta) < 0$ (производная по направлению потока) устойчивость невозможна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

1. Введение дополнительного диссипативного члена в случае отсутствия кинематической вязкости не приводит к устойчивости конечно-

разностной схемы с центральной первой производной.

2. При введении дополнительного параметра h условие устойчивости для левой и правой производных принимает вид (15).

3. При введении дополнительного диссипативного члена условие устойчивости в случае использования производных по потоку вводит дополнительное условие на пространственный шаг в виде $H_s \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{L}$.

Таким образом, учет микроструктуры в кинематике течения газа позволяет строить устойчивые явные однородные конечно-разностные схемы нестационарного течения вязкого сжимаемого газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четверушкин Б.Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды // Математическое моделирование — 2005 — Т. 14 — № 4 — С. 27—39.
2. Вервейко Н.Д. Математическая модель высокоскоростного движения газа с микроструктурой / Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец // Вестник ВГУ, серия: Физика. Математика. — 2008 — № 2 — С. 92—96.
3. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учебное пособие для ВУЗов / А. А. Самарский, Ю. П. Попов — 3-е изд., доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. — 424 с.

Вервейко Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета; тел.: (4732) 20-87-63.

Просветов Вячеслав Иванович — магистр 2 г/о кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета; e-mail: viprosvetov@rambler.ru.

Verveiko Nikolai D. — professor, chair of engineering and applied mechanics of Voronezh State University; tel.: (4732) 20-87-63.

Prosvetov Vyatcheslav I. — student of engineering and applied mechanics of Voronezh State University; e-mail: viprosvetov@rambler.ru.