УДК 621.3.015.4

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Ю. Б. Нечаев[*], Н. Д. Бирюк[*], Е. В. Латышева[**]

[*]*Воронежский государственный университет*
[**]*Международный институт компьютерных технологий*

Поступила в редакцию 16.02.2009 г.

Аннотация. Ток в последовательном параметрическом контуре является весьма сложной функцией времени, что создает трудности анализа. Здесь решается задача анализа в общем виде применением разложения искомой функции в степенной ряд.

Ключевые слова: Параметрическая радиоцепь, разложение в степенные ряды, нормировка уравнения.

Abstract. The current in series time-varying circuit is highly complicated function of time, which creates difficulties of analysis. This is wrought out of analysis problem with expansions of unknown functions in power sequences.

Keywords: Time-varying circuit, expansion in power sequences, rate settion of equation.

Во многих научных публикациях отмечается значение параметрического контура и трудности его анализа. Обычно рассматриваются частные случаи с изменяющейся во времени емкостью. Представляет также интерес для анализа общий случай наиболее часто встречающегося последовательного контура (рис. 1).

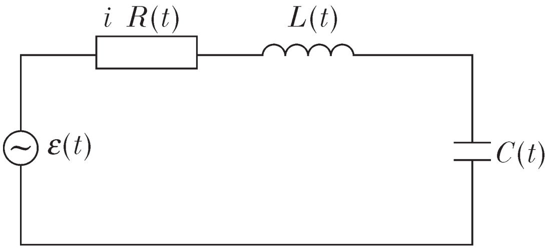

Рис. 1. Последовательный параметрический контур

Предполагается, что элементы контура $L(t)$, $C(t)$, $R(t)$ и его возмущающая э.д.с. $\varepsilon(t)$ изменяются во времени по достаточно гладким функциям, таким, что допускается разложение тока и его производной в степенной ряд по времени. В процессе анализа обнаружены некоторые не замеченные ранее особенности.

Уравнение контура относительно тока имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + (R + \dot{L})i + \frac{1}{C}\int idt = \varepsilon(t), \qquad (1)$$

где $\dot{L}$ - производная индуктивности во времени. Как оказалось, весьма полезным для анализа является нормирование уравнения. С этой целью введем масштабные делители времени $t_м$ и тока $i_м$, после чего перейдем к безразмерным переменным $x = \dfrac{i}{i_м}$, $\tau = \dfrac{t}{t_м}$. Уравнение контура (1) в этих переменных

$$L(\tau)\frac{dx}{d\tau} + [t_м R(\tau) + \dot{L}(\tau)]x + \frac{t_м^2}{C(\tau)}\int x d\tau = \frac{t_м}{i_м}\varepsilon(\tau),$$

где $\dot{L}(\tau)$ — производная индуктивности по τ. Поскольку во многих математических руководствах аналогичные уравнения рассматриваются с временным аргументом, введем переобозначение τ через t, при этом не будем выпускать из вида, что «наше» время t — безразмерное. Тогда последнему уравнению можно придать форму

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{t_м R + \dot{L}}{L}x + \frac{t_м^2}{LC}\int x d\tau = \frac{t_м}{i_м}\frac{\varepsilon}{L}. \qquad (2)$$

Здесь переменные и коэффициенты при них вместе со свободной функцией справа — безразмерные. Для удобства введем более компактные обозначения

$$a(t) = \frac{t_м R + \dot{L}}{L},\ b(t) = \frac{t_м^2}{LC},\ f(t) = \frac{t_м}{i_м}\frac{\varepsilon}{L}. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) запишется в общепринятом представлении

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)\int xdt = f(t). \qquad (4)$$

Формально это уравнение относится к интегро-дифференциальным уравнениям, но в действительности это — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, в чем легко убедиться с помощью замены переменной $y = \int xdt$.

Одним из универсальных методов решения уравнения [1] нелинейных дифференциальных уравнений является метод разложения в степенные ряды по аргументу коэффициентов, искомых и свободных функций. При переходе к линейным уравнениям роль и удобство этого метода возрастает. Попытаемся с помощью этого метода описать вынужденные колебания анализируемого контура. С этой целью применяем разложения в ряды Маклорена:

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,\ b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k,\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k,$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k,\ \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} kx_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x_k t^k, \qquad (5)$$

$$\int xdt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k+1} t^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k-1}}{k} t^k.$$

Здесь a_k, b_k, f_k, x_k, — числа.

Подставив (5) в (4), получим

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x_k t^k + (\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k)(\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k) + \\ +(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k)(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k-1}}{k} t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k.\end{gathered} \qquad (6)$$

Для дальнейшего анализа желательно преобразовать это уравнение к более удобной форме

$$\begin{gathered}a_0x_0 + x_1 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)x_k + \sum_{l=0}^{k} a_{k-l}x_l + \sum_{l=1}^{k} \frac{b_{k-1}}{l} x_{l-1}] = \\ = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k t^k.\end{gathered} \qquad (7)$$

Здесь числа отделены от функций. Слева коэффициенты при t^k представлены в виде суммы, число слагаемых которой возрастает вместе с k и, естественно, стремится к бесконечности вместе с k.

Для каждого фиксированного k выбирая члены с множителем t^k и сокращая на этот множитель, получим бесконечную неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов x_k разложения в ряд Маклорена неизвестной функции $x(t)$.

$$\begin{aligned}
&k = 0: \ a_0x_0 + x_1 = f_0 \\
&k = 1: \ (a_1 + b_0)x_0 + a_0x_1 + 2x_2 = f_1 \\
&k = 2: \ (a_2 + b_1)x_0 + (a_1 + \frac{b_0}{2})x_1 + \\
&\qquad + a_0x_2 + 3x_3 = f_2 \\
&k = 3: \ (a_3 + b_2)x_0 + (a_2 + \frac{b_1}{2})x_1 + \\
&\qquad + (a_1 + \frac{b_0}{3})x_2 + a_0x_3 + 4x_4 = f_3 \qquad (8) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&k = i: \ (a_i + b_{i-1})x_0 + (a_{i-1} + \frac{b_{i-2}}{2})x_1 + \\
&\qquad + (a_{i-2} + \frac{b_{i-3}}{3})x_2 + \ldots + (a_1 + \frac{b_0}{i})x_{i-1} + \\
&\qquad + a_0x_i + (i+1)x_{i+1} = f_i.
\end{aligned}$$

Здесь дано представление бесконечной системы уравнений в нормальном виде для конечных систем уравнений. В компактном векторном виде такое представление широко применяется –

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица системы, $\mathbf{x}$ — неизвестный вектор-столбец, $\mathbf{f}$ — свободный вектор-столбец.

Однако, для бесконечных систем алгебраических уравнений разработана отдельная теория [2], а в качестве нормального выбрано другое представление

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}, \qquad (9)$$

развернутый вид которого, в отличие от (8), следующий

$$\begin{aligned}
&x_0 = -\frac{1}{a_0}x_1 + \frac{f_0}{a_0} \\
&x_1 = -\frac{a_1 + b_0}{a_0}x_0 - \frac{2}{a_0}x_2 + \frac{f_1}{a_0} \\
&x_2 = -\frac{a_2 + b_1}{a_0}x_0 - \frac{a_1 + \frac{b_0}{2}}{a_0}x_1 - \frac{3}{a_0}x_3 + \frac{f_2}{a_0} \\
&x_3 = -\frac{a_3 + b_2}{a_0}x_0 - \frac{a_2 + \frac{b_1}{2}}{a_0}x_1 - \frac{a_1 + \frac{b_0}{3}}{a_0}x_2 - \frac{4}{a_0}x_4 + \frac{f_4}{a_0} \qquad (10) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_i = -\frac{a_i + b_{i-1}}{a_0}x_0 - \frac{a_{i-1} + \frac{b_{i-2}}{2}}{a_0}x_1 - \frac{a_{i-2} + \frac{b_{i-3}}{3}}{a_0}x_2 - \\
&\qquad - \frac{i+1}{a_0}x_4 + \frac{f_i}{a_0} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Развернутый векторный вид (9) этой системы следующий:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_1+b_0}{a_0} & 0 & -\frac{2}{a_0} & 0 & 0 \\ -\frac{a_2+b_1}{a_0} & -\frac{a_1+\frac{b_0}{2}}{a_0} & 0 & -\frac{3}{a_0} & 0 \\ -\frac{a_3+b_2}{a_0} & -\frac{a_2+\frac{b_1}{2}}{a_0} & -\frac{a_1+\frac{b_0}{3}}{a_0} & 0 & -\frac{4}{a_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{f_0}{a_0} \\ \frac{f_1}{a_0} \\ \frac{f_2}{a_0} \\ \frac{f_3}{a_0} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Теория бесконечных алгебраических систем, по признанию одного из авторов [2], в общем виде не разработана. Методы решения в достаточно завершенном виде разработаны только для регулярных и близких к ним бесконечных алгебраических систем линейных уравнений. Рассмотрим матрицу правой части системы (11). Обозначим элемент, стоящий на пересечении ее i-ой строки и k-го столбца через c_{ik}. Бесконечная система типа (11) называется регулярной, если сумма модулей элементов каждой строки ее матрицы меньше единицы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{i,k} \right| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \infty. \qquad (12)$$

Если эта сумма не превосходит некоторого постоянного числа, меньшего единицы, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{i,k} \right| \le 1 - \theta < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \infty, \qquad (13)$$

то бесконечная система типа (11) называется вполне регулярной. Оказалось удобным ввести для регулярных и вполне регулярных бесконечных систем бесконечное множество параметров

$$\rho_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{i,k} \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, \infty. \qquad (14)$$

Для регулярных систем $\rho_i > 0$, для вполне регулярных систем $\rho_i \ge \theta > 0$. Согласно существующей теории, если система (11) регулярная (а тем более, вполне регулярная) и элементы ее свободного вектора удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{f_i}{a_0} \right| \le K \rho_i, \qquad (15)$$

где $K > 0$ — некоторая константа, то эта система может быть приближенно решена с любой точностью известными методами (метод редукции, метод итераций). Для практики особенно удобен метод редукции, когда из бесконечной системы отбирается конечное число первых уравнений, а остальные отбрасываются. Для применения метода редукции нужна уверенность, что решаемая бесконечная система уравнений сходится, т.е. чем больше уравнений выбирается для решения из бесконечной системы, тем ближе приближенное решение к точному. В противном случае это условие не выполняется и решение бесконечной системы теряет смысл. Достаточным условием сходимости решения является совокупность приведенных выше ограничений: система должна быть регулярной при выполнении неравенства (15). К регулярным бесконечным системам примыкают квазирегулярные [2], у которых условие регулярности не выполняется только для конечного числа первых уравнений. Для таких систем также можно применять метод редукции.

Как видно, условия сходимости бесконечной системы (11) изначально не установлены. Главной причиной этого является правая ненулевая диагональ матрицы, числители элементов, которой с повышением порядка уравнений монотонно возрастают до бесконечности. Так случилось из-за дифференцирования степенного ряда. В монографии [2] приведены рекомендации по приведению нерегулярной бесконечной системы к регулярной, хотя там же отмечено, что это может быть сделано не всегда. Попытка воспользоваться этими рекомендациями и преобразовать систему (11) в регулярную не привела к цели.

Все же попытаемся привести систему (11) к регулярной или хотя бы к квазирегулярной другим способом. Для этого вернемся к уравнению (4) и отметим, что первое слагаемое $\dot{x}$ в нем несовместимо с регулярностью, нужно эту производную во времени убрать. С этой целью перейдем к новой переменной

$$y = \frac{dx}{dt}, \qquad (16)$$

тогда уравнение (4) примет вид

$$y + a(t)\int y dt + b(t)\iint y dt dt = f(t). \qquad (17)$$

Как и раньше (5), разлагаем в степенные ряды $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ и $y(t)$ вместо $x(t)$, т.е. изначально разлагаем в ряд Маклорена не решение $x(t)$ уравнения (4), а его производную (16). Имеем, кроме (5),

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k,$$

$$\int y dt=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{k+1} t^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{k-1}}{k} t^k, \qquad (18)$$

$$\iint y dt dt=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{k-1}}{k(k+1)} t^{k+1}=\sum_{k=2}^{\infty} \frac{y_{k-2}}{k(k-1)} t^k.$$

Подставляя суммы степенных рядов (5) и (18) в уравнение (17), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k+(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k)(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{k-1}}{k} t^k)+$$
$$+(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k)(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{y_{k-2}}{k(k-1)} t^k)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k.$$

Это уравнение, как и решение (6), можно привести к более удобному для анализа виду:

$$k=0: \; y_0=f_0$$
$$k=1: \; a_0 y_0+y_1=f_1$$
$$k=2: \; (a_1+\frac{b_0}{2}) y_0+\frac{a_0}{2} y_1+y_2=f_2$$
$$k=3: \; (a_2+\frac{b_1}{2}) y_0+(\frac{a_1}{2}+\frac{b_0}{2 \cdot 3}) y_1+$$
$$+\frac{a_0}{3} y_2+y_3=f_3 \qquad (19)$$

....

$$k=i: \; (a_{i-1}+\frac{b_{i-2}}{2}) y_0+(\frac{a_{i-2}}{2}+\frac{b_{i-3}}{2 \cdot 3}) y_1+\ldots+$$
$$+(\frac{a_1}{i-1}+\frac{b_0}{i(i-1)}) y_{i-2}+\frac{a_0}{3} y_{i-1}+y_i=f_i$$

....

Это бесконечная неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Представим ее в нормальном для бесконечных систем виде

$$y_0=f_0$$
$$y_1=-a_0 y_0+f_1$$
$$y_2=-\left(a_1+\frac{b_0}{2}\right) y_0-\frac{a_0}{2} y_1+f_2$$
$$y_3=-(a_2+\frac{b_1}{2}) y_0-(\frac{a_1}{2}+\frac{b_0}{2 \cdot 3}) y_1-\frac{a_0}{3} y_2+f_3$$
$$y_4=-(a_3+\frac{b_2}{2}) y_0-(\frac{a_2}{2}+\frac{b_1}{2 \cdot 3}) y_1-$$
$$-(\frac{a_1}{3}+\frac{b_0}{3 \cdot 4}) y_2-\frac{a_0}{4} y_3+f_4 \qquad (20)$$

....

$$y_i=-(a_{i-1}+\frac{b_{i-2}}{2}) y_0-(\frac{a_{i-2}}{2}+\frac{b_{i-3}}{2 \cdot 3}) y_1-\ldots-$$
$$-(\frac{a_1}{i-1}+\frac{b_0}{i \cdot(i-1)}) y_{i-2}-\frac{a_0}{i} y_{i-1}+f_i$$

....

В развернутой векторной форме эта система имеет вид

$$\begin{array}{|c|}\hline y_0\\ \hline y_1\\ \hline y_2\\ \hline y_3\\ \hline \vdots\\ \hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline -a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline -(a_1+\frac{b_0}{2}) & -\frac{a_0}{2} & 0 & 0 & 0\\ \hline -(a_2+\frac{b_1}{2}) & -(\frac{a_1}{2}+\frac{b_0}{2\cdot 3}) & -\frac{a_0}{3} & 0 & 0\\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ \hline\end{array} * \begin{array}{|c|}\hline y_0\\ \hline y_1\\ \hline y_2\\ \hline y_3\\ \hline \vdots\\ \hline\end{array}+\begin{array}{|c|}\hline f_0\\ \hline f_1\\ \hline f_2\\ \hline f_3\\ \hline \vdots\\ \hline\end{array} \qquad (21)$$

Покажем, что система (21) может быть приведена к регулярной. Условие (15), налагаемое на свободный вектор, может быть выполнено подбором масштабного делителя $i_м$, который влияет только на элементы свободного вектора. Кроме того, элементы свободного вектора f_i с ростом номера строки i должны убывать, как это обычно бывает при разложении функции в ряд Маклорена. Функция $a(t)$ связана с сопротивлением, поэтому она не должна быть большой в высокодобротных контурах. Кроме того, ее можно уменьшить подбором масштабного делителя $t_м$. Таким образом, все числа a_i сами по себе небольшие и при этом могут быть уменьшены искусственным путем. Функция $b(t)$, пропорциональная квадрату собственной частоты контура, может быть большой, но она также зависит от $t_м^2$, подбирая этот масштабный делитель можно практически неограниченно уменьшать ее, а также связанные с ней числа b_i. Кроме того, с возрастанием номера строки i матрицы числа a_i, b_i должны уменьшаться, как это обычно бывает при разложении в сходящийся ряд Маклорена.

Поэтому в нашем, с точки зрения радиоэлектроники, довольно общем случае бесконечная система (21) упомянутыми приемами может быть сделана, как минимум, квазирегулярной, а в лучшем случае регулярной и даже вполне регулярной. Ее решение сходится и к ней можно применять метод редукции. Но в таком случае и решение однозначно связанной с ней системы (11) тоже сходится и к ней также можно применять метод редукции.

Заметим, предложенный здесь метод регуляризации системы (11) имеет общий характер и может быть естественным образом продолжен. Он связан с исключением дифференцирования рядов. Если бы оказалось, что система (21) не является регулярной, то можно было бы перейти к аналогичной замене переменной $z=\frac{dy}{dt}$ и, таким образом, уменьшить элементы матрицы, т.е. приблизиться к регуляризации системы.

Такой прием можно повторить несколько раз.

Что касается решения бесконечной системы (21), то оно существенно проще решения исходной бесконечной системы (11). Оказалось, что система (21) – рекуррентная и ее уравнения с начала до конца могут быть решены одно за другим. Это удобно проследить по формулам (20). Из первого уравнения находится y_0. Если y_0 известно, то по второму уравнению находится y_1. Если y_0 и y_1 известны, то по третьему уравнению находится y_2 и т.д. Допустим, таким способом найдено достаточное количество неизвестных $y_0, y_1, y_2, .., y_n$. Тогда по первой формуле (18) строится приближенное выражение решения уравнения (17), т.е.

$$y(t) \cong \sum_{i=0}^{n} y_i t^i ,$$

затем по формуле (16) можно перейти к функции $x(t) = \int y(t)dt$, являющейся решением исходного уравнения (2).

Можно поступить иначе. Доказано, что бесконечная система (21) сходится. Поэтому решаем ее методом редукции и находим приближенно $x_1, x_2, .., x_n$, по которым непосредственно строим решение уравнения (2) параметрического контура

$$x(t) \cong \sum_{i=0}^{n} x_i t^i .$$

Заметим, что в публикациях по параметрическому контуру можно найти бесконечные системы уравнений, но они получены на основе ряда Фурье, а не ряда Маклорена, как в настоящей статье. При этом анализе сходимости решений полученных бесконечных систем не приводится.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обычно в радиоэлектронике рассматривают параметрические радиоцепи с периодическими параметрами [3]. При этом коэффициенты, свободные и неизвестные функции разлагают в ряд Фурье, на базе метода комплексных амплитуд производят выборку членов с одинаковыми частотами. Таким способом получаются бесконечные в четыре стороны (вверх, вниз, вправо, влево) алгебраические системы с комплексными коэффициентами. Эта методика описана в монографии [3], причем здесь не содержится анализа сходимости бесконечных систем.

В настоящей статье предлагается другая методика, основанная на разложении коэффициентов, свободных и неизвестных функций в ряды Маклорена, которую можно применять в том числе и к параметрическим цепям с периодическими параметрами. В результате получаются бесконечные в две стороны (вместо четырех) системы уравнений с действительными (вместо комплексных) коэффициентами. Самое главное достоинство предлагаемого метода заключается в том, что полученные бесконечные системы уравнений оказываются рекуррентными, т.е. можно, начиная сначала, решать уравнения порознь одно за другим.

В статье предложен также не применяющийся ранее принцип доказательства сходимости полученных здесь бесконечных систем уравнений. Этот принцип не связан с особенностями контура, т.е. может быть обобщен на более сложные параметрические цепи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 704 с.

2. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Госфизматиздат, 1962. — 708 с.

3. *Тафт В.А.* Спектральные методы расчета нестационарных цепей и систем. — М.: Энергия, 1978. — 272 с.

Нечаев Юрий Борисович — доктор физико-математических наук, профессор факультета компьютерных наук ВГУ.

Бирюк Николай Данилович — доктор физико-математических наук, профессор физического факультета ВГУ, тел. (4732) 208-625, e-mail: lidia@vmail.ru

Латышева Елена Владимировна — аспирант международного института компьютерных технологий, тел. (4732) 550-869.

Nechaev Yuri Borisovich — Professor of Computer Science Faculty of Voronezh State University.

Biriuk Nikolay Danilovich — Professor of Physical Faculty of Voronezh State University, tel. 7(4732) 208-625, e-mail: lidia@vmail.ru

Latisheva Elena Vladimirovna — International Institute of Computers Technology's, Postgraduated student, tel. 7 (4732) 550-869.