

ОСОБЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

В. В. Белоглазов*, Н. Д. Бирюк*, Т. Н. Короткова**

*Воронежский государственный университет

**Воронежский институт МВД России

Поступила в редакцию 12.03.2009 г.

Аннотация. Теория резонанса колебательного контура очень непросто обобщается на более сложные системы. Причина заключается в том, что в этой теории превалирует абстрактно математический подход. С усложнением системы адекватный математический аппарат усложняется до такой степени, что выполнить характерные для более простой системы математические преобразования не удастся. Требуется более широкий взгляд на явление резонанса, опирающийся на физику протекающих в контуре процессов. Такой взгляд был предложен академиком Л. И. Мандельштамом, но должного распространения не получил. Ниже делается попытка восполнить этот пробел. Попутно были обнаружены новые свойства резонанса обычного колебательного контура.

Ключевые слова: Колебательный контур, параметрический контур, вынужденные колебания, резонанс, мгновенная компенсация тепловых потерь, особые частоты.

Abstract. Resonance theory of oscillation circuit is generalized with difficulty to more complicated systems. It is for the simple reason that abstract mathematical point of view prevails in this theory. With complication of system the adequate mathematical apparatus is complicated to such degree that it does not work typical for more simple systems mathematical transformation. It is demanded more sweeping view on the phenomenon of resonance, being guided by physics of proceeding in it processes. Such view was offered by academician L. I. Mandelstam, but due spreading in practice did not receive. Below it is made an attempt of making up this deficiency. At the same time new properties of oscillation circuit resonance were discovered.

Key words: Oscillating circuit, time-varying circuit, forced oscillations, resonance, momentary compensation of heat loss, particular frequencies.

Выбираем для анализа весьма распространенную систему — последовательный колебательный контур, возмущаемый синусоидальной электродвижущей силой (рис. 1) Полагаем $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi)$.

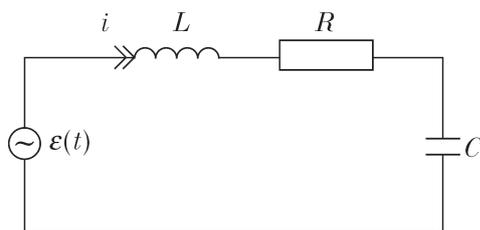


Рис. 1. Последовательный резонансный контур

Интегро-дифференциальное уравнение для тока —

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Здесь ток является гармонической функцией времени $i = I_m \cos(\omega t + \psi)$. Амплитуда тока $i(t)$ равна

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Напряжения на емкости и индуктивности пропорциональны соответственно интегралу и производной тока во времени. При этом амплитуды производной $I_{m(1)}$ и интеграла $I_{m(-1)}$ равны

$$\frac{di}{dt} = I_{m(1)} \cos(\omega t + \psi_{(1)}), \quad I_{m(1)} = \omega I_m,$$

$$\int idt = I_{m(-1)} \cos(\omega t + \psi_{(-1)}), \quad I_{m(-1)} = \frac{I_m}{\omega}.$$

Найдем амплитуды производной и интеграла тока

$$I_{m(1)} = \omega I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2} + \left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}};$$

$$I_{m(-1)} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\omega^2 R^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}}.$$

Для первого выражения введем функцию частоты $f(\omega) = \frac{R^2}{\omega^2} + \left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2$. Максимум $I_{m(1)}$ находится на частоте, полученной из условия

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Это частота

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}}, \quad (2)$$

на которой амплитуда напряжения индуктивности достигает максимума,

$$U_{mL \max} = \frac{\omega_0 L \varepsilon_m}{R \sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}} = \frac{\rho}{R} \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}} = \frac{Q \varepsilon_m}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}}.$$

Здесь $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — характеристическое сопротивление контура, $Q = \frac{\rho}{R}$ — добротность контура.

Аналогично для амплитуды интеграла тока введем функцию частоты

$$f(\omega) = \omega^2 R^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2.$$

Амплитуда напряжения, которая принимает максимальное значение, находится из условия $\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$, $\omega = \omega_{-1}$. Получается

$$\omega_{-1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}. \quad (3)$$

При этом максимальная амплитуда напряжения емкости дается выражением

$$\begin{aligned} U_{mC \max} &= \frac{\varepsilon_m}{\omega_0 C R \sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}} = \\ &= \frac{\rho}{R} \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}} = \frac{Q \varepsilon_m}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}}. \end{aligned}$$

Итак, найдено три резонансных частоты обычного последовательного контура, ω_0 , ω_1 , ω_{-1} . Между ними существует простая связь —

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{-1} \omega_1}. \quad (4)$$

Эти частоты не являются равнозначными. Главная из них — частота $\omega_p = \omega_0$. Это — час-

тота, на которой амплитуда тока принимает максимальное значение. А ток в последовательном контуре — функция процесса, относящаяся ко всем трем элементам контура: емкости, индуктивности, активному сопротивлению.

На частоте ω_{-1} принимает максимальное значение амплитуда интеграла тока во времени или амплитуда напряжения емкости. Аналогично, на частоте ω_1 максимальное значение принимает амплитуда производной тока во времени или амплитуда напряжения на индуктивности. Каждая из этих частот имеет отношение только к одному элементу контура, емкости или индуктивности. Они равнозначны между собой, но уступают как характеристики резонанса частоте ω_0 . В литературе обычно находится частота ω_0 и анализируются резонансные процессы в контуре на этой частоте, иногда вскользь упоминаются также частоты ω_{-1} , ω_1 .

Заметим, однако, что частот, подобных частотам ω_0 , ω_1 , ω_{-1} существует множество. Их значения и закономерности в расположении на оси частот являются важными характеристиками резонансных свойств контура. Никаких упоминаний в литературе о существовании этих особых частот не обнаружено.

Введем в рассмотрение бесконечный двусторонний ряд амплитуд

$$\dots, I_{-k}, \dots, I_{-1}, I_0, I_1, \dots, I_k, \dots, \quad (5)$$

где $I_0 = I_m$ — амплитуда тока контура, $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ — амплитуды первой, второй и т.д., k -ой производной тока во времени, $k = 1, 2, \dots, \infty$. $I_{-1}, I_{-2}, \dots, I_{-k}, \dots$ — амплитуды однократного, двукратного и т.д., k -кратного интеграла тока во времени. Будем интересоваться теми частотами, на которых эти амплитуды принимают максимальные значения. Получим бесконечный ряд особых частот, которые можно было бы назвать резонансными, однако, в установившейся терминологии таких понятий нет.

Найдем частоту ω_k , на которой принимает максимальное значение амплитуда k -ой производной тока. Методом комплексных амплитуд легко находим эту амплитуду,

$$I_k = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^{2k}} + \left(\frac{L}{\omega^{k-1}} - \frac{1}{\omega^{k+1}C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{f(\omega)}}, \quad (6)$$

где $f(\omega) = \frac{R^2}{\omega^{2k}} + \left(\frac{L}{\omega^{k-1}} - \frac{1}{\omega^{k+1}C}\right)^2$. Интересующая нас частота находится из условия

$\frac{df(\omega_k)}{d\omega} = 0$. Получается

$$\omega_k = \omega_0 \sqrt{\frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{R^2}{2\rho^2}\right)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{k^2-1}{k^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R^2}{2\rho^2}\right)^2}} \right]. \quad (7)$$

Можно убедиться, что при $k=0$ имеем $\omega_k = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Чтобы это показать, нужно по правилам математического анализа взять достаточно сложный предел. При $k=1$ получается $\omega_k = \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}}$. Здесь тоже нужно раскрыть

предельный переход $k \rightarrow 1$. Принимая значение $k = 0, 1, 2, \dots$ получим бесконечное множество частот, при которых амплитуды правой части ряда (5) принимают максимальные значения. Рассмотрим левую часть этого ряда. Здесь I_{-k} — амплитуда k -кратного интеграла тока во времени $\int \dots \int_k i dt dt \dots dt$. Выражение для этой амплитуды по методу комплексных амплитуд легко находится

$$I_{-k} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\omega^{2k} R^2 + \left(\omega^{k+1} L - \frac{\omega^{k-1}}{\omega^{k+1} C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{f(\omega)}}, \quad (8)$$

где $f(\omega) = \omega^{2k} R^2 + \left(\omega^{k+1} L - \frac{1}{\omega^{k+1} C}\right)^2$, $k = 1, 2, \dots, \infty$.

Частота ω_{-k} , на которой амплитуда I_{-k} принимает максимальное значение, находится из условия $\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$. Получается

$$\omega_{-k} = \omega_0 \sqrt{\frac{k}{k+1} \left(1 - \frac{R^2}{2\rho^2}\right)} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{k^2-1}{k^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R^2}{2\rho^2}\right)^2}} \right]. \quad (9)$$

Если $k=0$, то во втором радикале второе слагаемое оказывается бесконечно большим положительным (при $k \rightarrow 0$). При этом получается известный заранее результат, при $k=0$ $\omega_{-k} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Если $k=1$, то после раскрытия достаточно сложного предела также получается заранее известный результат (3) т.е. при

$k=1$, $\omega_{-k} = \omega_{-1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}$. Если $k \rightarrow \infty$, то

$\omega_k = \omega_{-k}$, эти частоты становятся комплексными. Из выражений (7) и (9) следует, что при $k \rightarrow \infty$ выражения под внутренними радикалами становятся отрицательными. В таких случаях частоты ω_k, ω_{-k} — комплексные, а комплексность в данной задаче означает, что при больших k , частоты ω_k, ω_{-k} с упомянутыми свойствами не существуют. Другими словами, целых чисел k может быть конечное множество, $k \leq K, -k \geq -K$ ($k = -K, \dots, -k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k, \dots, K$). Предельное значение $k = K$, как видно из формулы (7) и (9) можно найти из условия

$$\frac{K'^2 - 1}{K'^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R^2}{2\rho^2}\right)^2} = 1.$$

Решая это уравнение относительно K' получим

$$K' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{R^2}{2\rho^2}\right)^2}} = \frac{\rho/R}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{4\rho^2}}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

В реальных резонансных контурах добротность имеет порядок 100, поэтому и K' примерно такое же. K — целое число, не превосходящее K' . Число особых частот равно $2K + 1$, т.е. порядка 200. В расположении ряда частот $\dots, \omega_{-k}, \dots, \omega_0, \dots, \omega_k, \dots$ заметную роль играет сопротивление R , чем оно больше, тем дальше эти частоты расположены друг от друга. Если $R=0$, то все эти частоты сливаются в одну частоту ω_0 .

Заметим, что приведенные выше рассуждения без изменений можно применить к теории математического маятника. Одним из авторов настоящей статьи было показано [1], что математический маятник имеет не одну, как считалось ранее, а три резонансных частоты. Приведенная здесь публикация уточняет это утверждение: математический маятник имеет не три, а множество частот, которые при желании можно считать резонансными. Далее приводятся относящиеся к контуру выкладки, которые нельзя применить к математическому маятнику.

Итак, выше приведена абстрактно математическая теория резонанса последовательного контура с нашими дополнениями. Особенности этой теории таковы, что при ее обобщении на более сложные колебательные контуры встре-

чаются исключительные трудности. В случае несколько усложненного контура, громоздкость этой теории заметно возрастает. На рис. 2 представлен контур, отличающийся от рассмотренного (рис. 1) только проводимостью G .

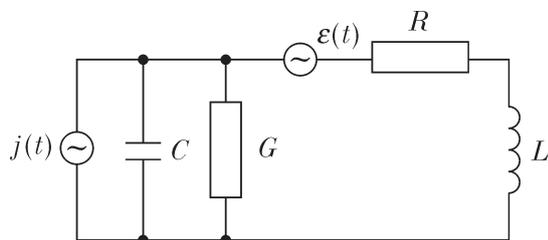


Рис. 2. Более общий вариант колебательного контура

Здесь включено два источника энергии: задающий ток $j(t)$ и задающее напряжение, представленное э.д.с. $\varepsilon(t)$. Ниже пояснено, для чего нужно два разнородных источника энергии, а пока полагаем $j(t) \equiv 0$.

Дифференциальное уравнение этого контура относительно заряда конденсатора имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \frac{dq}{dt} + \frac{1+RG}{LC} q = \frac{\varepsilon(t)}{L}.$$

В данном контуре уже нет никакой функции процесса, которая была бы общей для всех элементов контура. С помощью метода комплексных амплитуд находим непосредственно по схеме комплексную амплитуду тока в индуктивности

$$\begin{aligned} \dot{I}_{mL} &= \frac{\dot{\varepsilon}_m}{R + j\omega L + \frac{1}{G + j\omega C}} = \\ &= \frac{\dot{\varepsilon}_m (G + j\omega C)}{(1 + RG - \omega^2 LC) + j\omega(LG + CR)}. \end{aligned}$$

Отсюда находим амплитуду этого тока,

$$\begin{aligned} I_{mL} &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(1 + RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + CR)^2}} = \\ &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{f(\omega)}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(\omega) = \frac{(1 + RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + CR)^2}{G^2 + \omega^2 C^2}$.

Из условия $\frac{df(\omega_p)}{d\omega} = 0$, находим резонансную частоту, на которой амплитуда тока индуктивности

принимает максимальное значение,

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\sqrt{1 + 2G(R + \rho^2 G)} - \rho^2 G^2}. \quad (11)$$

Это аналог резонансной частоты $\omega_p = \omega_0$ предыдущего контура (рис. 1). Действительно, при $G = 0$ наш контур вырождается в предыдущий контур и тогда из (11) получается $\omega_p = \omega_0$, что и следовало ожидать.

Из комплексной амплитуды напряжения на конденсаторе $\dot{U}_{mC} = \frac{\dot{I}_m}{G + j\omega C}$ находим амплитуду этого напряжения

$$\begin{aligned} U_{mC} &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(1 + RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + CR)^2}} = \\ &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{f(\omega)}}, \end{aligned}$$

где $f(\omega) = (1 + RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + CR)^2$. Из условия $\frac{df(\omega)}{d\omega}$ находим резонансную частоту,

на которой амплитуда напряжения на конденсаторе принимает максимальное значение

$$\omega_c = \omega_{-1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\rho G - \frac{R}{\rho} \right)^2}. \quad (12)$$

При $G = 0$ эта частота вырождается в частоту ω_{-1} предыдущего контура (8).

Комплексную амплитуду напряжения индуктивности находим по формуле

$$\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m j\omega L.$$

Находим также амплитуду этого напряжения

$$\begin{aligned} U_{mL} &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(1 + RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + CR)^2}} = \\ &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\frac{(1 + RG - \omega^2 LC)^2}{\omega^2 L^2 (G^2 + \omega^2 C^2)} + \frac{\omega^2 (LG + CR)^2}{G^2 + \omega^2 C^2}}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{f(\omega)}}, \end{aligned}$$

где $f(\omega) = \frac{\left(\frac{1 + RG}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \left(G + \frac{C}{L} R\right)^2}{G^2 + \omega^2 C^2}$.

Из условия $\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$ находим частоту, на которой амплитуда напряжения индуктивности принимает максимальное значение

$$\omega_L = \omega_1 = \omega_0 \frac{1 + RG}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{R^2}{2\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2G^2\rho^2 \frac{1 - \frac{R^2}{\rho^2}}{(1 + RG)^4}}}. \quad (13)$$

Если $G = 0$, то это выражение вырождается в формулу для ω_1 предыдущего контура (2). Как видно, для контура рис. 2 выражения для частот ω_{-1} , ω_0 , ω_1 получаются намного более громоздкими, чем для контура рис.1. В принципе, можно получить и выражения для всего множества особых частот ω_{-k} , ω_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, однако, здесь получится такие громоздкие преобразования, которые преодолеть непросто. По этой причине нам не удалось получить этих общих формул.

Итак, приведен критический анализ формально математического анализа резонанса обычного колебательного контура, внесены дополнения в эту теорию, показаны те трудности, которые возникают при обобщениях.

Теперь перейдем к общей идеологии резонанса, которую разработал академик Л. И. Мандельштам, она была принята и использовалась советской школой нелинейных колебаний [1]. Согласно этой идеологии при резонансе в любой момент времени тепловые потери компенсируются внешними источниками. Покажем, как она работает на примере несоизмеримо более сложного контура по сравнению с рассмотренными выше примерами.

Рассмотрим контур рис. 2 с двумя источниками в предположении, что это контур параметрический, т.е. все его элементы изменяются во времени по любым функциям, независимо от протекающих токов. Ограничение единственное — все элементы контура положительны. В таком случае нецелесообразно описывать процессы в контуре дифференциальным уравнением второго порядка, т.к. для его получения требуется выполнить громоздкие преобразования. Непосредственно из законов Кирхгофа получается система двух дифференциальных уравнений первого порядка. Если в качестве неизвестных функций выбрать заряд конденсатора q и магнитный поток Φ , сцепляющийся с индуктивностью, то эта система имеет следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{G}{C}q + \frac{1}{L}\Phi + j(t) \\ \frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{1}{C}q - \frac{R}{L}\Phi + \varepsilon(t) \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Вопрос о резонансе такого контура радикально усложняется. Будем поступать по Мандельштаму, для чего представим систему (14) в специальном виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} - \frac{1}{L}\Phi &= -\frac{G}{C}q + j(t) \\ \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C}q &= -\frac{R}{L}\Phi + \varepsilon(t) \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Справа первые слагаемые представляют тепловые потери, вторые — их восстановление внешними источниками. При резонансе, согласно Мандельштаму, их сумма в любой момент времени должна быть равна нулю. В таком случае система (15) распадается на две системы

$$\left. \begin{aligned} j(t) &= \frac{G}{C}q \\ \varepsilon(t) &= \frac{R}{L}\Phi \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} - \frac{1}{L}\Phi &= 0 \\ \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C}q &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Если бы наш контур был обычный, то система (17) представляла бы его собственные колебания, т.к. он изолирован от окружающей среды. Поскольку мы рассматриваем параметрический контур, то такой изоляции не получается, т.к. источник, изменяющий реактивность либо выполняет работу, тем самым увеличивая запасенную в контуре энергию, либо наоборот контур над этим источником выполняет работу, тогда его запасенная энергия уменьшается. Таким образом, источники, изменяющие реактивности, служат связующим звеном между контуром и окружающей средой. И все же весьма желательно иметь в виду аналогию между обычным и параметрическим контурами. Поэтому будем считать, что система уравнений (17) представляет «собственные» колебания (в кавычках). Итак, по Мандельштаму получается, что при резонансе в параметрическом контуре реализуются «собственные» колебания, удовлетворяющие системе уравнений (17). Для этого требуются вполне определенные задаю-

щий ток $j(t)$ и э.д.с. $\varepsilon(t)$ внешнего источника, удовлетворяющие уравнениям (16). Заметим, что система (16) имеет бесконечное множество решений. Поэтому внешние функции процесса $j(t)$ и $\varepsilon(t)$ выполняют два важных действия: а) компенсируют тепловые потери, б) задают начальные значения для системы, тем самым выбирая из бесконечного множества решений одно, вполне определенное.

Теперь, руководствуясь подходом Л. И. Мандельштама, дадим оценку классическому анализу резонанса, приведенному выше для обычных контуров рис. 1, 2. В случае контура рис. 1 приведен анализ явления резонанса. В этом случае в контуре реализовались собственные колебания, именно поэтому резонансная частота $\omega_p = \omega_0$ совпала с частотой собственных колебаний. В случае контура рис. 2 резонанса по Мандельштаму не было. Здесь за резонанс было принято околорезонансное явление, близкое к резонансному. Здесь в контуре не реализовались собственные колебания, поэтому резонансная частота ω_p на совпала с собственной частотой ω_0 . В контуре по этой схеме не может возникнуть резонанс по Мандельштаму, так как для этого требуется два внешних источника. Если источник один, то можно лишь приблизиться к резонансу на минимальное расстояние, что и было сделано в результате формально математического анализа. Отличить резонанс от околорезонансного явления на практике бывает очень трудно, формальный математический анализ здесь помочь не сможет. Поэтому при общепринятом анализе резонансных явлений часто околорезонансные явления принимаются как резонанс.

ВЫВОДЫ

1. В обычной практике при обнаружении явления резонанса применяют абстрактно математический подход, а именно, средствами математического анализа обнаруживают экстремальные значения вынужденных токов и напряжений при изменении частоты.

2. Существует естественный физический критерий резонанса, именно, при резонансе тепловые потери в любой момент времени компенсируются внешними источниками.

3. Формально математический (исследование на экстремум) и физический критерий резонанса не обязательно совпадают друг с другом.

Первый является необходимым, но не достаточным условием физического резонанса.

4. Такого рода несовпадения при решении конкретных задач обычно не приводят к особым неудобствам, кроме терминологических (близкое к резонансу явление принимается за резонанс). Однако, при обобщении теории резонанса на более сложные системы могут возникнуть значительные трудности искусственного характера.

5. Мандельштамовская идеология резонанса является общей, простой и удобной для применения. При решении конкретных задач на резонанс она, как правило, не применяется, что приводит к искаженному толкованию этого важного явления.

6. Теория резонанса по Мандельштаму обобщается на более сложные случаи, например, на нелинейный и параметрический контур, чего нельзя сказать о теории формально математического резонанса

В заключение заметим, что понятие «резонанс по Мандельштаму» не нашло широкого применения. Впервые принципы такого резонанса были предложены Мандельштамом на I Всесоюзной конференции по колебаниям в 1931 г. Два года спустя вышли труды этой конференции, которые сейчас являются библиографической редкостью. Это сообщение Мандельштама также опубликовано в доступном современному читателю журнале [3]. Несколько позже академик Н. Д. Папалекси [4,5] дал систематизированный обзор всех известных в то время резонансов электрических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирюк Н.Д. О резонансе маятника // Изв. Вузов МВ и ССО СССР. — Сер. Физика. — 1972. — №1. С. 156—158.
2. Горелик Г.С. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами // ЖТФ. — 1934. — Т. 4. — Вып. 10. — С. 1783—1817; 1935. — Т. 5. — Вып. 2. — С. 196—215; 1935. — Т.5. — Вып. 3. — С. 490—517.
3. Мандельштам Л.И. Вопросы электрических колебаний систем и радиотехники // Успехи физич. наук. — 1933. — Т. XIII. — Вып. 2. — С. 161—194.
4. Папалекси Н.Д. Радио и развитие учения о резонансе / Н. Д. Папалекси. Собрание трудов. — Изд. АН СССР, 1948. — С. 247—255.
5. Папалекси Н.Д. Эволюция понятия резонанса / Н. Д. Папалекси. Собрание трудов. — Изд. АН СССР, 1948. — С. 343—356.

Белоглазов Василий Васильевич — научный сотрудник Всероссийского научно-исследовательского института МВД России, соискатель кафедры экспериментальной физики Воронежского государственного университета.

Бирюк Николай Данилович — профессор кафедры экспериментальной физики Воронежского государственного университета, доктор физико-математических наук.

Короткова Татьяна Николаевна — доцент кафедры радиоэлектронных устройств Воронежского института МВД России, кандидат физико-математических наук.

Beloglazov Vasily Vasilievich — Russian Institute of Ministry of Internal Affairs scientist, Chair of Experimental Physic of Voronezh State University competitor.

Birjuk Nikolay Danilovich — VCU Chair of Experimental Physic professor, doctor of physical and mathematical sciences.

Korotkova Tatiana Nikolayevna — Chair of Radio Electronic Devices of Voronezh MIA Institute reader, candidate of physical and mathematical sciences.