УДК 517.9

К ТЕОРЕМЕ М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО О БИФУРКАЦИИ

Ю. В. Лысакова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.09.2008 г.

Аннотация. В данной статье приводится обобщение классической теоремы М. А. Красносельского о бифуркации.

Ключевые слова: бифуркация, решение операторного уравнения.

Abstract. This article provides a generalization of classical bifurcation M.A. Krasnosel'skii theorem.

Key words: bifurcation, solution of the operator equation.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию операторного уравнения

$$x = \Psi(x) + \varepsilon\Phi(x) \tag{1}$$

на наличие решений при малых ε. Здесь операторы

$$\Psi : E \to E \text{ и } \Phi : E \to E,$$

где E — конечномерное банахово пространство, k-раз непрерывно дифференцируемы. Требуется найти условия, при которых $\varepsilon = 0$ является точкой бифуркации уравнения (1). То есть при $\varepsilon = 0$ уравнение (1) имеет изолированное решение x_0, а при близких к нулю, но не равных нулю значениях ε уравнение (1) имеет по крайней мере два непрерывно зависящих от ε решения, близких к x_0.

Подобными исследованиями существования малых решений занимался М. А. Красносельский. В его работах предполагалось, что при всех значениях ε уравнение (1) имеет нулевое решение. В книге [1] М. А. Красносельский привел условия, при которых существует бифуркация решений уравнения

$$x = U(\varepsilon)x, \tag{2}$$

где

$$U(\varepsilon)x = V(\varepsilon)x + C(\varepsilon, x) + D(\varepsilon, x). \tag{3}$$

Выражение (3) получается в результате разложения в ряд Тейлора по x оператора $U(\varepsilon)x$ в окрестности $x = 0$. При этом предполагается, что при всех значениях ε все дифференциалы порядка 2, 3, ..., k-1 равны нулю.

В равенстве (3) оператор $V(\varepsilon)$ — непрерывно по норме операторов зависящий от ε линейный оператор, у которого при $\varepsilon = 0$ единица является простым собственным значением, $C(\varepsilon, x)$ — однородный по переменной x оператор порядка k, а

$$\|D(\varepsilon, x)\| = o(\|x\|^k).$$

В доказательстве М. А. Красносельского основную роль играет отличное от нуля число

$$\xi_0 = (C(0, e_0), g_0),$$

где e_0 — нормированный собственный вектор оператора $V(0)$, соответствующий собственному значению, равному 1, а g_0 — собственный вектор оператора $V^*(0)$, сопряженного оператору $V(0)$, соответствующий собственному значению 1 и нормированный условием

$$(e_0, g_0) = 1,$$

а точнее связь между знаками числа ξ_0 и $1 - \mu(\varepsilon)$, где $\mu(\varepsilon)$ — ветвь собственных значений оператора $V(\varepsilon)$, сходящаяся к 1 при $\varepsilon \to 0$.

В данной статье будет приведена теорема, обобщающая теорему М. А. Красносельского. А именно, предполагается, что уравнение (1) всегда имеет решение x_ε, непрерывно зависящее от ε, имеющее специальный вид, который будет указан в следующем пункте. В уравнении (1) производится замена

$$x = x_\varepsilon + z, \tag{4}$$

после чего в результате разложения в ряд Тейлора в точке $z = 0$ уравнение (1) приобретает вид

$$z = U(\varepsilon)z, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} U(\varepsilon)z = V(\varepsilon)z + C_\Psi^2(z, z) + \\ +\varepsilon C^2(\varepsilon, z) + C_\Psi^3(\varepsilon, z) + \varepsilon C_\Phi^3(\varepsilon, z) + W(\varepsilon, z). \end{gathered} \tag{6}$$

Операторы, входящие в (6), будут описаны в следующем пункте. При этом, во-первых,

© Лысакова Ю. В., 2008

оператор $U(\varepsilon)$ не обладает тем свойством, что все дифференциалы $2,3,...,k-1$ порядков, вычисленные в точке $z=0$, равны 0 при всех значениях ε. Во-вторых, в условиях теоремы (будет приведена ниже) $\xi_0=0$. Таким образом, результат М. А. Красносельского для анализа бифуркации уравнения (5) неприменим.

Кроме этого предполагается, что $\mu(\varepsilon)$ допускает представление

$$\mu(\varepsilon)=1+\frac{1}{2}\mu''(0)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2). \tag{7}$$

Такое представление $\mu(\varepsilon)$ связано с работой [2] В. С. Луда для дифференциальных уравнений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$x=\Psi(x)+\varepsilon\Phi(x). \tag{8}$$

Будем предполагать, что операторы $\Psi: E\to E$ и $\Phi: E\to E$, где E — конечномерное банахово пространство, трижды непрерывно дифференцируемы. Предположим также, что уравнение (8) имеет решение x_ε, которое представимо в виде:

$$x_\varepsilon=x_0+\varepsilon x_1+\omega(\varepsilon), \tag{9}$$

где $\|\omega(\varepsilon)\|=o(\varepsilon)$, то есть

$$x_\varepsilon=\Psi(x_\varepsilon)+\varepsilon\Phi(x_\varepsilon). \tag{10}$$

Заметим, что при $\varepsilon=0$ точка x_0 является решением уравнения (8):

$$x_0=\Psi(x_0).$$

Сделаем замену переменных (4). Тогда уравнение (8) примет вид

$$\begin{aligned} z=\Psi(x_\varepsilon+z)+\varepsilon\Phi(x_\varepsilon+z)-\\ -\Psi(x_\varepsilon)-\varepsilon\Phi(x_\varepsilon). \end{aligned} \tag{11}$$

Значение $z=0$ является решением уравнения (11) при всех ε.

Разложим правую часть уравнения (11) в ряд Тейлора в точке $z=0$:

$$\begin{aligned} z&=\Psi'(x_\varepsilon)z+\frac{1}{2}\Psi''(x_\varepsilon)zz+\frac{1}{6}\Psi'''(x_\varepsilon)zzz+\\ &+\varepsilon\Phi'(x_\varepsilon)z+\frac{1}{2}\varepsilon\Phi''(x_\varepsilon)zz+\frac{1}{6}\varepsilon\Phi'''(x_\varepsilon)zzz+\Omega(z)=\\ &=(\Psi'(x_\varepsilon)+\varepsilon\Phi'(x_\varepsilon))z+\frac{1}{2}(\Psi''(x_\varepsilon)+\varepsilon\Phi''(x_\varepsilon))zz+\\ &+\frac{1}{6}(\Psi'''(x_\varepsilon)+\varepsilon\Phi'''(x_\varepsilon))zzz+\Omega(z), \end{aligned}$$

где $\|\Omega(z)\|=o(\|z\|^3)$. Далее, раскладывая $\Psi''(x_\varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке x_0, имеем

$$\begin{aligned} z&=(\Psi'(x_\varepsilon)+\varepsilon\Phi'(x_\varepsilon))z+\\ &+\frac{1}{2}\Psi''(x_0)zz+\frac{1}{2}\varepsilon(\Psi'''(x_0)x_1+\\ &+\Phi''(x_\varepsilon))zz+\frac{1}{6}(\Psi'''(x_\varepsilon)+\\ &+\varepsilon\Phi'''(x_\varepsilon))zzz+W(\varepsilon,z), \end{aligned}$$

где $\|W(\varepsilon,z)\|=o(\|z\|^3)$.

Введем новые обозначения:

$$V(\varepsilon)=\Psi'(x_\varepsilon)+\varepsilon\Phi'(x_\varepsilon),$$

$$C_\Psi^2(z,z)=\frac{1}{2}\Psi''(x_0)zz,$$

$$C^2(\varepsilon,z)=\frac{1}{2}(\Psi'''(x_0)x_1+\Phi''(x_\varepsilon))zz,$$

$$C_\Psi^3(\varepsilon,z)=\frac{1}{6}\Psi'''(x_\varepsilon)zzz,$$

$$C_\Phi^3(\varepsilon,z)=\frac{1}{6}\Phi'''(x_\varepsilon)zzz.$$

Таким образом, мы получили уравнение

$$\begin{aligned} z=V(\varepsilon)z+C_\Psi^2(z,z)+\varepsilon C^2(\varepsilon,z)+\\ +C_\Psi^3(\varepsilon,z)+\varepsilon C_\Phi^3(\varepsilon,z)+W(\varepsilon,z), \end{aligned} \tag{12}$$

где $V(\varepsilon)$ — непрерывно зависящий от ε линейный оператор,

$C_\Psi^2(z,z)$ и $C^2(\varepsilon,z)$ — однородные операторы второго порядка, $C_\Psi^3(\varepsilon,z)$ и $C_\Phi^3(\varepsilon,z)$ — однородные операторы третьего порядка,

$$\|W(\varepsilon,z)\|=o(\|z\|^3).$$

Пусть $\varepsilon=0$ является точкой бифуркации уравнения (12). То есть при $\varepsilon=0$ уравнение (12) имеет изолированное решение $z=0$, а при близких к нулю, но не равных нулю значениях ε уравнение (12) имеет по крайней мере два непрерывно зависимых от ε решения, близких к нулю. Предположим также, что 1 является простым собственным значением оператора $V(0)$. Иначе говоря, 1 является простым корнем уравнения

$$|V(0)-\mu I|=0. \tag{13}$$

Положим, что оператор $V(\varepsilon)$ при близких к 0, но не равных 0 значениях ε не имеет собственных значений, равных 1.

Обозначим через $\mu(\varepsilon)$ собственное значение оператора $V(\varepsilon)$, непрерывно зависящее от ε и обращающееся в 1 при $\varepsilon=0$. Будем предполагать, что $\mu(\varepsilon)$ представимо в виде (7).

Пусть e_0 — нормированный собственный вектор матрицы $V(0)$, соответствующий собственному значению, равному 1, а g_0 — собственный вектор матрицы $V^*(0)$, сопряженной матрице $V(0)$, соответствующий собственному значению 1 и нормированный условием

$$(e_0, g_0) = 1. \tag{14}$$

Будем также предполагать, что e_ε и g_ε представимы в виде

$$\begin{aligned} e_\varepsilon &= e_0 + \varepsilon e_1 + o(\varepsilon), \\ g_\varepsilon &= g_0 + \varepsilon g_1 + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{15}$$

В дальнейших построениях основную роль будут играть числа:

$$\xi = (C^2(0, e_0), g_0),$$
$$\xi_\Psi = (C^3_\Psi(0, e_0), g_0),$$
$$\xi^1_0 = (C^2_\Psi(e_0, e_0), g_1).$$

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема (Обобщение теоремы М. А. Красносельского). *Пусть нелинейный оператор* $U(\varepsilon)(|\varepsilon| < \delta_1)$ *допускает представление*

$$\begin{aligned} U(\varepsilon)z &= V(\varepsilon)z + C^2_\Psi(z,z) + \\ &+ \varepsilon C^2(\varepsilon, z) + C^3_\Psi(\varepsilon, z) + \varepsilon C^3_\Phi(\varepsilon, z) + W(\varepsilon, z), \end{aligned} \tag{16}$$

где $V(\varepsilon)$ *— непрерывно зависящий от* $\varepsilon(|\varepsilon| < \delta_1)$ *линейный оператор,* $C^2_\Psi(z,z)$ *и* $C^2(\varepsilon, z)$ *— однородные операторы второго порядка,* $C^3_\Psi(\varepsilon, z)$ *и* $C^3_\Phi(\varepsilon, z)$ *— однородные операторы третьего порядка,* $W(\varepsilon, z) = o(\| z \|^3)$.

Пусть 1 — простое собственное значение оператора $V(0)$, *которому соответствует нормированный вектор* e_0. *Пусть 1 не является собственным значением операторов* $V(\varepsilon)$ *при близких к 0 и отличных от 0 значениях* ε. *Пусть* g_0 *— собственный вектор сопряженного оператора* $V^*(0)$, *удовлетворяющий условию* (14).

Пусть выполнено условие

$$C^2_\Psi(e_0, v) \in PE \quad \text{для любых} \quad v \in E,$$

где P *— проектор Рисса. Пусть числа* ξ, ξ_Ψ, ξ^1_0 *отличны от нуля.*

Тогда можно указать такие положительные числа r_0 *и* δ_0, *что справедливы следующие утверждения:*

1^0. *При* $\varepsilon = 0$ *уравнение*

$$z = U(\varepsilon)z \tag{17}$$

не имеет в шаре $\| z \| < r_0$ *ненулевых решений.*

2^0. *Если* $\xi_\Psi > 0$, *то*

(a) уравнение (17) имеет в шаре $\|z\| < r_0$ *ровно два непрерывно зависящих от* ε *ненулевых решения* $z_1(\varepsilon)$ *и* $z_2(\varepsilon)$, *если* $\mu''(0) \in \left(-\infty, \dfrac{(\xi + \xi^1_0)^2}{2\xi_\Psi}\right)$;

решения удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} sign(z_1(\varepsilon), g_0) &= sign(z_2(\varepsilon), g_0) = \\ &= -sign(\xi + \xi^1_0) \end{aligned} \tag{18}$$

если $\mu''(0) \in \left(0, \dfrac{(\xi + \xi^1_0)^2}{2\xi_\Psi}\right)$;

$$sign(z_1(\varepsilon), g_0) = -sign(z_2(\varepsilon), g_0) \tag{19}$$

если $\mu''(0) \in (-\infty, 0)$;

(b) уравнение (17) не имеет ненулевых решений в шаре $\|z\| < r_0$, *если* $\mu''(0) \in \left(\dfrac{(\xi + \xi^1_0)^2}{2\xi_\Psi}, \infty\right)$.

3^0. *Если* $\xi_\Psi < 0$, *то*

(a) уравнение (17) имеет в шаре $\|z\| < r_0$ *ровно два непрерывно зависящих от* ε *ненулевых решения* $z_1(\varepsilon)$ *и* $z_2(\varepsilon)$, *если* $\mu''(0) \in \left(\dfrac{(\xi + \xi^1_0)^2}{2\xi_\Psi}, \infty\right)$;

решения удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} sign(z_1(\varepsilon), g_0) &= sign(z_2(\varepsilon), g_0) = \\ &= sign(\xi + \xi^1_0) \end{aligned} \tag{20}$$

если $\mu''(0) \in \left(\dfrac{(\xi + \xi^1_0)^2}{2\xi_\Psi}, 0\right)$;

$$sign(z_1(\varepsilon), g_0) = -sign(z_2(\varepsilon), g_0) \tag{21}$$

если $\mu''(0) \in (0, \infty)$;

(b) уравнение (17) не имеет ненулевых решений в шаре $\|z\| < r_0$, *если* $\mu''(0) \in \left(-\infty, \dfrac{(\xi + \xi^1_0)^2}{2\xi_\Psi}\right)$.

ПРИМЕР

Приведем пример, иллюстрирующий полученный результат. Рассмотрим одномерный случай.

$$x = x^3 + \varepsilon x^2 + \left(\frac{1}{2} a\varepsilon^2 + 1\right)x, \tag{22}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый положительный параметр, $a \in R$. Точка $x = 0$ является решением данного уравнения при всех ε.

Если $\varepsilon = 0$, то уравнение (22) не имеет ненулевых решений.

Если $\varepsilon \neq 0$, то

(a) при $a < \dfrac{1}{2}$ уравнение (22) имеет ровно два решения

$$x_1(\varepsilon) = \frac{-\varepsilon + \varepsilon\sqrt{1 - 2a}}{2},$$
$$x_2(\varepsilon) = \frac{-\varepsilon - \varepsilon\sqrt{1 - 2a}}{2},$$

причем разных знаков, если $a < 0$ и одного знака, если $0 < a < \frac{1}{2}$;

(b) при $a > \frac{1}{2}$ уравнение (22) не имеет ненулевых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1966. — 332 с.

2. *Loud W.S.* Periodic Solutions of a perturbed autonomous system // Annals of mathematics. — 1959. — № 3, Vol. 70. — P. 490—529.

Лысакова Юлия Валериевна, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета; тел.: +79036507097, e-mail: juli06@mail.ru

Lysakova Yulia Valerievna, post graduate student of mathematical department, Voronezh State University, tel. +79036507097, e-mail: juli06@mail.ru