УДК: 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Воробьев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.09.2008 г.

Аннотация. Данная статья посвящена исследованию разрешимости нелинейных разностных уравнений. Для доказательства основного результата использовались оценки норм обратных операторов к линейный разностным операторам.

Ключевые слова: Нелинейные разностные уравнения, оценки решений, линейный оператор.

Abstract. The paper is devoted to the research of solvability for nonlinear difference equations. The estimations of norms of inverse operators for linear difference operators were used to proof of the main result.

Keywords: Nonlinear difference equations, estimations of solutions, linear operator.

Пусть H — гильбертово пространство и $EndH$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Символом $\ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, H)$, где $p \in [1, \infty]$ обозначим банахово пространство двусторонних последовательностей векторов из H, суммируемых со степенью p для $p \in [1, \infty)$ и ограниченных для $p = \infty$, с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p},$$

$$1 \le p \le +\infty, \|x\|_\infty = \sup_{k \in Z} \|x(n)\|.$$

Рассмотрим нелинейные разностные уравнения вида

$$x(k) = Ax(k-1) + f(k-1, x(k-1)), \qquad (1)$$

где x — последовательность из ℓ_p, $p \in [1, \infty]$, $f : \mathbb{Z} \times H \to H$ — некоторая функция, а $A \in EndH$ — линейный оператор, для которого верно следующее условие

$$\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \varnothing, \qquad (2)$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in : |\lambda| = 1\}$. Здесь стоит отметить, что множество $\sigma(A)$ представимо в виде $\sigma(A) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}$, где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > 1\}$, поэтому пространство H можно записать в следующем виде

$$H = H_{\text{int}} \oplus H_{\text{out}},$$

где $H_{\text{int}} = \operatorname{Im} P_{\text{int}}$ — образ проектора Рисса, построенного по спектральной компоненте σ_{int} и $H_{\text{out}} = \operatorname{Im} P_{\text{out}}$, где $P_{\text{out}} = I - P_{\text{int}}$. Подпространства H_{int} и H_{out} инвариантны относительно оператора A. Поэтому он представим в виде $A = A_{\text{int}} \oplus A_{\text{out}}$, где A_{int} и A_{out} — сужения оператора A на H_{int} и H_{out} соответственно, причем $\sigma(A_{\text{int}}) = \sigma_{\text{int}}$ и $\sigma(A_{\text{out}}) = \sigma_{\text{out}}$. Следовательно, $r(A_{\text{int}}) < 1$. Оператор A_{out} обратим и $r(A_{\text{out}}^{-1}) < 1$.

Далее рассмотрим линейное разностное уравнение

$$x(k) = Ax(k-1) + f(k-1). \qquad (3)$$

Для того, чтобы разностный оператор $(Dx)(n) = x(n) - Ax(n-1), n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, X)$ был обратим необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2). Тогда обратный оператор имеет вид

$$(D^{-1}f)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(n-k) f(k),$$
$$n \in \mathbb{Z},\ x \in \ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, H), \qquad (4)$$

где $f \in \ell_p, n \in \mathbb{Z}$. Функция $G : \mathbb{Z} \to EndH$, определяется равенствами

$$G(k) = \begin{cases} A^k P_{\text{int}}, & k \ge 0, \\ -B^{-k} P_{\text{out}}, & k < 0, \end{cases}$$

где оператор $B \in EndH$ однозначно определяется из условий: $Bx = 0$, $x \in \operatorname{Im} P$, $ABy = BAy = y$, $y \in D(A) \cap \operatorname{Im} Q$ (т.е. B совпадает на $\operatorname{Im} Q$ с обратным к сужению A на $\operatorname{Im} Q \cap D(A)$). Соответствующий результат можно найти в статье [1]. Для последующих оценок нам потребуются следующие величины:

$$k(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \| G(n) \|, \qquad (5)$$

а также

$$s(A) = \max_{\lambda \in \mathbb{T}} \| R(\lambda, A) \|, \qquad (6)$$

где $R(\cdot, A) : \rho(A) \to EndH$ — резольвента оператора A. Справедливо следующее неравенство

$$s(A) \leq k(A). \qquad (7)$$

Данное утверждение легко следует из представления резольвенты в виде

$$R(\lambda, A) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(k)\lambda^{-k},$$

если $\lambda \in \mathbb{T}$. Отметим, что оператор D^{-1} действует в любом из пространств ℓ_p, $p \in \mathbb{Z}$, является линейным ограниченным оператором.

Лемма 1. Важным фактом является следующие равенство

$$\| D^{-1} \|_2 = \max_{\lambda\in\mathbb{T}} \| R(\lambda, A) \|. \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\hat{x} : \mathbb{T} \to H$, , где x — последовательность из ℓ_2, действующее по следующему правилу

$$\hat{x}(\gamma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\gamma^{-n}, \gamma \in \mathbb{T}.$$

Данное отображение назовем преобразованием Фурье последовательности $x \in \ell_p$. Справедливо равенство Парсеваля

$$\| x \|_2 = \| \hat{x} \|_2, x \in \ell_p.$$

Применив преобразование Фурье к обеим частям уравнения (3), получим $\hat{x}(\gamma) = \dfrac{1}{\gamma} A\hat{x}(\gamma) + + \dfrac{1}{\gamma}\hat{f}(\gamma)$. Легко видно, что $(\gamma I - A)\hat{x}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)$. Продолжая рассуждения, получим равенство $\hat{x}(\gamma) = -R(\gamma, A)\hat{f}(\gamma)$ и оценку вида $\|\hat{x}\|_2 \leq \leq \max_{\gamma\in\mathbb{T}} \|R(\gamma, A)\| \|\hat{f}\|_2$. Воспользовавшись равенством Парсеваля, получим $\|x\|_2 \leq \max_{\gamma\in\mathbb{T}} \|R(\gamma, A)\| \|f\|_2$. Данное неравенство равносильно $\|D^{-1}f\|_2 \leq \leq \max_{\lambda\in\mathbb{T}} \|R(\lambda, A)\| \|f\|_2$. Отметим, что данная оценка точна, т.е. $\|D^{-1}\| = \max_{\lambda\in\mathbb{T}} \|R(\lambda, A)\|$ Лемма доказана.

Предположим далее, что $f_0 \equiv f(k, 0), k \in \mathbb{Z}$, есть ограниченная последовательность, и выполнено условие Липшица

$$\| f(k, x) - f(k, y) \| \leq \ell \| x - y \|, \qquad (9)$$

где $\ell > 0$ — некоторая константа. Так же будет удобно рассмотреть следующие константы

$$c = 8d^2 + 1, \qquad (10)$$

где

$$d = \frac{s(A)}{1 - s(A)\ell}. \qquad (11)$$

При доказательстве следующего основного результата использовался метод из [2].

Теорема 1. Пусть выполнено условие Липшица (9) и условие $q \equiv s(A)\ell < 1$. Тогда разностное уравнение (1) имеет единственно ограниченное решение $x_0 : \mathbb{Z} \to H$, и для этого решения справедлива оценка

$$\|x_0\|_\infty \leq \left(8\left(\frac{s(A)}{1 - s(A)\ell} \right)^2 + 1 \right) \|f_0\|_\infty, \qquad (12)$$

в которой постоянная $s(A) = \max_{\lambda\in\mathbb{T}} \| R(\lambda, A) \|$ определена формулой (6).

Доказательство. Рассмотрим линейное разностное уравнение

$$\begin{aligned} x(k) = Ax(k-1) + \\ +B(k-1)x(k-1) + f(k-1), \end{aligned} \qquad (13)$$

где $B : \mathbb{Z} \to EndH$ есть ограниченная операторозначная функция, причем

$$\| B(k) \| \leq \ell, k \in \mathbb{Z}, \qquad (14)$$

а $f : \mathbb{Z} \to H$ — ограниченная функция. Запишем уравнение (13), которое, очевидно, удовлетворяет всем условиям теоремы 1, в виде

$$\Im x = I - (AS(-1) + BS(-1))x = f,$$

где S — оператор сдвига, и докажем, что оператор $\Im$ обратим в ℓ_2 и справедливо неравенство

$$\| \Im \|_2 \leq d, \qquad (15)$$

где d — постоянная, определенная формулой (11). Действительно, используя формулу (4)

$$x(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} G(n-k)[B(n)x(n) + f(n)],$$
$$k \in \mathbb{Z},\ x \in \ell_p = \ell_p,$$

откуда в силу равенства (5) и условия (14) получаем неравенство $\|x\|_2 \leq s(A)(\ell\|x\|_2 + \|f\|_2)$. Отсюда $\| x \|_2 \leq (s(A)/(1 - s(A)\ell)) \| f \|_2$. В силу произвольности f мы доказываем справедливость предположения (15).

Далее в работе [3] было доказано, что из обратимости оператора в пространстве ℓ_2 следует его обратимость в любом пространстве ℓ_p, причем верна следующая оценка

$$\| \Im \|_\infty \leq c, \qquad (16)$$

где постоянная $\tilde{n}$ определена равенством (10). Таким образом мы видим, что для ограниченного решения уравнения (13) оценка (12) установлена.

Пусть x_0 произвольное решение разностного уравнения (1). Рассмотрим последовательность $y_0(k) \equiv f(k, x_0(k)) - f(k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. В силу условия Липшица (9), верно неравенство $y_0(k) \leq \ell \| x_0(k) \|$, $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим также операторозначную функцию $B : \mathbb{Z} \to EndH$, определенную следующим образом

$$B(k)x = \begin{cases} \dfrac{(x, x_0(k))}{\| x_0(k) \|^2} y_0(k), \ x_0(k) \neq 0, \ k \in \mathbb{Z}, \\ 0, \ x_0(k) = 0, \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (17)$$

где $x \in H$. Очевидно, что $B(k)x_0(k) = y_0(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ и выполняется неравенство $\|y_0\| \leq \ell \|x_0\|$.

Таким образом мы доказали существование такой операторозначной функции B, что $f(k, x(k)) = B(k)x(k) + f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\| B \| \leq \ell$, т.е. каждое решение исходного разностного уравнения (1) является решением уравнения (13), в котором $f(k) = f(k, 0)$ и функция B удовлетворяет неравенству (14). Поэтому, если решение x_0 есть ограниченное решение исходного разностного уравнение (1), то оно является ограниченным решением уравнения (13) и, следовательно, для него выполнена оценка (12). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А.Г., Пастухов А.И.* // Сибирский матем. журнал 2001. Т. 42. № 6. С. 1231—1242.

2. *Перов А.И.* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 896—904.

3. *Baskakov A.G., Krishtal I.A.* //J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol. 38. P. 420—439.

Воробьев Антон Алексеевич, аспирант, Воронежский государственный университет, тел. 8-915-588-88-81, e-mail: antonvsu@gmail.com

Vorobiev A. A., postgraduate student, Voronezh state university , tel. 8-915-588-88-81, email: antonvsu@gmail.com