УДК 517.9

СВОЙСТВА МОНОТОННОСТИ ЛОКАЛЬНО ЯВНОЙ МОДЕЛИ ОБОБЩЕННОГО РЕЛЕ

Ю. В. Абрамова, И. Н. Прядко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.09.2008 г.

Аннотация. Рассматривается так называемая локально явная модель обобщенного реле, т.е. такого реле с гистерезисом, у которого выходы в каждом из двух возможных состояний могут быть не константами, а фиксированными непрерывными функциями. Найдены необходимые и достаточные условия на эти функции, при которых большим входам соответствуют большие выходы, а также условия, при которых большим пороговым значениям соответствуют меньшие выходы.

Ключевые слова: локально явные уравнения, обобщенное реле, монотонность по входам, монотонность по пороговым значениям.

Abstract. So-called locally explicit model of the generalized relay, i.e. such relay with a hysteresis at which outputs in each of two possible conditions can be not constants, but the fixed continuous functions is considered. Necessary and sufficient conditions on these functions at which to greater inputs there correspond greater outputs, and also conditions at which to greater threshold values there correspond smaller outputs are found.

Key words: locally explicit equations, the generalized relay, monotonicity on inputs, monotonicity on threshold values.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются свойства монотонности локально явной модели обобщенного реле (монотонность по входам и монотонность по пороговым значениям). Локально явные уравнения — это класс уравнений с нелинейным дифференциалом [1]. Уравнение с нелинейным дифференциалом (*квазидифференциальное уравнение* [2], [3]) имеет вид:

$$u(t+dt)-u(t)=D(t,u(t),dt)+o(dt). \qquad (1)$$

Областью определения функции $D(t,u,dt)$ по (t,u) является некоторое множество $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, а по dt — промежуток $[0,\alpha(t,u))$. Множество ее значений лежит в $\mathbb{R}^n$ и

$$D(t,u,0)=0. \qquad (2)$$

Непрерывная слева на некотором промежутке I функция $u=\varphi(t)$, которая при любом $t\in\tilde{I}=I\setminus\{\sup I\}$ удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{dt\to+0}\frac{1}{dt}[\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)]=0, \quad (3)$$

называется *решением уравнения* (1). Это решение φ называется *сильным*, если для любого $t\in\tilde{I}$ существует такое $\delta>0$, что при $dt\in[0,\delta)$ выполняется равенство:

$$\varphi(t+dt)-\varphi(t)-D(t,\varphi(t),dt)=0. \qquad (4)$$

Локально явное уравнение в терминах свойств нелинейного дифференциала D определено следующим образом. Рассмотрим *квазипоток* ([4]), порожденный уравнением (1):

$$\gamma_t^{t+dt}u=u+D(t,u,dt). \qquad (5)$$

Уравнение (1) называется *локально явным*, если квазипоток непрерывен слева и локально обладает *полугрупповым свойством*, т.е.

$$\forall((t_0,u_0)\in U)\ \exists\,(\delta>0)\ \forall(t_1:t_0\le t_1<t_0+\delta)\ \exists\,(\delta_1>0)$$
$$\forall(t_2:t_1\le t_2<t_1+\delta_1)[\gamma_{t_1}^{t_2}\gamma_{t_0}^{t_1}u_0=\gamma_{t_0}^{t_2}u_0]. \qquad (6)$$

Начальное условие для локально явного уравнения (1) имеет вид:

$$u(t_0)=u_0,(t_0,u_0)\in U. \qquad (7)$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНО ЯВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведем необходимые свойства локально явных уравнений, доказанные в [5].

КРИТЕРИЙ ЛОКАЛЬНОЙ ЯВНОСТИ

Для того, чтобы уравнение (1) *было локально явным, необходимо и достаточно, чтобы для любой начальной точки* $(t_0,u_0)\in U$ *задача* (1), (7) *имела сильное решение.*

© Абрамова Ю. В., Прядко И. Н., 2008

УТВЕРЖДЕНИЕ О ЕДИНСТВЕННОСТИ

Класс сильных решений уравнения (1) *обладает свойством единственности вправо, т.е. если* φ *и* ψ *принадлежат этому классу и* $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$, *то* $\psi(t) = \varphi(t)$ *на* $[t_1, +\infty) \cap \mathcal{D}(\psi) \cap \mathcal{D}(\varphi)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ДО НЕПРОДОЛЖИМОГО

Любое решение уравнения (1) *может быть продолжено до непродолжимого вправо.*

ОБОБЩЕННОЕ РЕЛЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННОГО РЕЛЕ

В [5] построена локально явная модель обобщенного реле с пороговыми значениями β, α $(\beta < \alpha)$. Пусть $f: (-\infty, \alpha] \to \mathbb{R}, g: [\beta, +\infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции и $f(x) \neq g(x)$ при $x \in (\beta, \alpha)$. Модель задается уравнением (1) с нелинейным дифференциалом следующего вида:

$$D(t,u,dt) = \begin{cases} f[\sigma(t+dt)] - f[\sigma(t)], \\ \quad \text{если } \sigma(t) < \alpha, u = f[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ g[\sigma(t+dt)] - f[\sigma(t)], \\ \quad \text{если } \sigma(t) = \alpha, u = f[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ g[\sigma(t+dt)] - g[\sigma(t)], \\ \quad \text{если } \sigma(t) > \beta, u = g[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ f[\sigma(t+dt)] - g[\sigma(t)], \\ \quad \text{если } \sigma(t) = \beta, u = g[\sigma(t)] \text{ и } dt > 0, \\ 0, \text{ если } dt = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Множество U допустимых пар (t,u) определяется как объединение графиков функций

$$u = f[\sigma(t)]$$

и

$$u = g[\sigma(t)].$$

Поведениями обобщенного реле называются сильные решения этого уравнения. Для него справедлива теорема об однозначной глобальной разрешимости начальной задачи вправо.

В настоящей работе мы будем рассматривать несколько измененную модель, которая описывается уравнением (1) с нелинейным дифференциалом вида (8), в котором $\sigma(t) = \alpha$ и $\sigma(t) = \beta$ заменены, соответственно, неравенствами $\sigma(t) \geq \alpha$ и $\sigma(t) \leq \beta$.

При этом считается, что функции f и g произвольным образом расширены на всю вещественную ось $\mathbb{R}$, а множество U, как и выше, есть объединение графиков функций $u = f[\sigma(t)]$ и $u = g[\sigma(t)]$. Определенную таким образом модель назовем расширенной. Множество U для первоначальной модели будем в дальнейшем обозначать U_0.

Заметим, что при заданной непрерывной входной функции $\sigma(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$:

1) любое поведение $u(t)$ исходной модели является поведением расширенной модели;

2) любое поведение $u(t)$ расширенной модели является на $(t_0, t_1]$ поведением исходной модели, а если $(t_0, u_0) \in U_0$, то оно удовлетворяет исходной модели и в момент t_0.

Рассмотрим следующую модель (при $dt > 0$):

$$u(t+dt) + o(dt) = \begin{cases} f[\sigma(t+dt)], & \text{если } \sigma(t) \leq \beta \text{ или} \\ & u(t) = f[\sigma(t)] \text{ и } \sigma(t) \in (\beta, \alpha); \\ g[\sigma(t+dt)], & \text{если } \sigma(t) \geq \alpha \text{ или} \\ & u(t) = g[\sigma(t)] \text{ и } \sigma(t) \in (\beta, \alpha). \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, эта модель также может быть записана в виде (1), если нелинейный дифференциал $D(t,u,dt)$ при $dt > 0$ определить равенством

$$D(t,u,dt) = \begin{cases} f[\sigma(t+dt)] - u, & \text{если } \sigma(t) \leq \beta \text{ или} \\ & u = f[\sigma(t)] \text{ и } \sigma(t) \in (\beta, \alpha), \\ g[\sigma(t+dt)] - u, & \text{если } \sigma(t) \geq \alpha \text{ или} \\ & u = g[\sigma(t)] \text{ и } \sigma(t) \in (\beta, \alpha) \end{cases} \tag{10}$$

и положить $D(t,u,0) = 0$.

Покажем эквивалентность расширенной модели и модели (9). Пусть $\sigma: [t_0, T] \to \mathbb{R}$ — непрерывная входная функция, $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$, соответственно, выходы расширенной модели и модели (9), удовлетворяющие условию $u(t_0) = \tilde{u}(t_0)$. Покажем, что $u(t) = \tilde{u}(t)$ при $t \in [t_0, T]$. Предположим противное, пусть $t_1 = \inf\{t \geq t_0 : u(t) \neq \tilde{u}(t)\}$. Из непрерывности слева следует, что $u(t_1) = \tilde{u}(t_1)$.

Пусть, для определенности, $u(t_1) = f[\sigma(t_1)]$. Если $\sigma(t_1) \geq \alpha$, то на некотором промежутке $(t_1, t_1 + \delta)$ по определению моделей: $u(t) = \tilde{u}(t) = g[\sigma(t)]$, что противоречит определению t_1.

Если $\sigma(t_1) < \alpha$, то на некотором промежутке $(t_1, t_1 + \delta)$: $u(t) = \tilde{u}(t) = f[\sigma(t)]$, что также противоречит определению t_1.

Таким образом, модели эквивалентны.

МОНОТОННОСТЬ ПО ВХОДАМ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО РЕЛЕ

Определение. Будем говорить, что обобщенное реле *монотонно по входам*, если для любых непрерывных входов σ, $\tilde{\sigma}$ и любого $t_0 \in \mathcal{D}(\sigma) \cap \mathcal{D}(\tilde{\sigma})$ из того, что $\sigma(t) \le \tilde{\sigma}(t)$ при $t \ge t_0$ и $u(t_0) \le \tilde{u}(t_0)$, для соответствующих им выходов $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ вытекает неравенство $u(t) \le \tilde{u}(t)$ при $t \ge t_0$.

Теорема. *Для того, чтобы обобщенное реле было монотонно по входам, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

$$f \text{ и } g \text{ являются неубываемыми на } (-\infty, \alpha], [\beta, +\infty), \text{ соответственно;} \tag{11}$$

$$\text{для любых } x_1, x_2 \in (\beta, \alpha) \text{ справедливо неравенство } f(x_1) < g(x_2). \tag{12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть реле монотонно по входам. Докажем, что f является неубывающей на $(-\infty, \alpha]$, g — на $[\beta, +\infty)$ и $f(x_1) < g(x_2)$ для любых x_1, $x_2 \in (\beta, \alpha)$. Предположим противное: хотя бы одно из утверждений (11), (12) не выполнено.

Предположим, что не выполнено условие (11). Пусть, для определенности, f на промежутке $(-\infty, \alpha]$ не является неубывающей, т.е. найдутся такие $x_1 < x_2 \le \alpha$, что $f(x_1) > f(x_2)$. Пусть $x_0 < x_1$, $u(t_0) = \tilde{u}(t_0) = f(x_0)$, $t_1 = t_0 + h$, где h — некоторое положительное число. В качестве входов рассмотрим линейные функции $\sigma, \tilde{\sigma}$, задаваемые условиями: $\tilde{\sigma}(t_0) = \sigma(t_0) = x_0$, $\tilde{\sigma}(t_1) = x_2$, $\sigma(t_1) = x_1$. Отметим, что $\sigma(t) \le \sigma(t) < \alpha$ при $t \in [t_0, t_1)$, поэтому на отрезке $[t_0, t_1]$ при рассматриваемых входах реле не переключается, то есть $u(t_1) = f(x_1) > f(x_2) = \tilde{u}(t_1)$. Получили противоречие.

Пусть не выполнено условие (12), т.е. найдутся такие $x_1, x_2 \in (\beta, \alpha)$, что $f(x_1) \ge g(x_2)$. Так как $f(x) \ne g(x)$ при $x \in (\beta, \alpha)$, то на (β, α) возможны только два случая.

1. $f(x) > g(x)$ (при $x \in (\beta, \alpha)$).

Выберем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ и положим $t_1 = t_0 + h$. Кусочно линейный вход $\tilde{\sigma}$ с изломом в точке $t_0 + \frac{h}{2}$ и линейный вход σ зададим на $[t_0, t_1]$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\beta < \sigma(t_0) = \tilde{\sigma}(t_0) < \sigma(t_1) = \tilde{\sigma}(t_1) < \tilde{\sigma}\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) = \alpha.$$

Положим $u(t_0) = \tilde{u}(t_0) = f\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

Так как $\tilde{\sigma}\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) = \alpha$, при $t > t_0 + \frac{h}{2}$ будет $\tilde{u}(t) = g[\tilde{\sigma}(t)]$, в то время как $u(t) = f[\sigma(t)]$. Следовательно, $\tilde{u}(t_1) = g[\sigma(t_1)] < f([\sigma(t_1)] = u(t_1)$, что противоречит монотонности по входам.

2. $f(x) < g(x)$ (при $x \in (\beta, \alpha)$).

Отметим, что $x_1 > x_2$. Действительно, если $x_1 \le x_2$, то из того, что f и g являются неубывающими на (β, α) следует, что $g(x_2) \le f(x_1) \le f(x_2)$ — противоречие предположению.

Для произвольно выбранных $t_0 \in \mathbb{R}, h > 0$ положим $\tilde{u}(t_0) = f(x_1)$ и $u(t_0) = g(x_2)$, $t_1 = t_0 + h$. Зададим на $[t_0, t_1]$ линейные входы следующим образом: $\tilde{\sigma}(t_0) = x_1, \sigma(t_0) = x_2$, $\sigma(t_1) = \tilde{\sigma}(t_1) = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Так как $\beta < \sigma(t) \le \tilde{\sigma}(t) < \alpha$ при $t \in [t_0, t_1]$, то на этом промежутке реле не переключается. Поэтому

$$u(t_1) = g[\sigma(t_1)] = g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f[\tilde{\sigma}(t_1)] = \tilde{u}(t_1),$$

что противоречит монотонности по входам.

Достаточность. Пусть f и g являются неубывающими на $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$, соответственно, и для любых $x_1, x_2 \in (\beta, \alpha)$ справедливо неравенство $f(x_1) < g(x_2)$. Докажем, что обобщенное реле монотонно по входам. Предположим противное: найдутся такие непрерывные входы $\sigma(t) \le \tilde{\sigma}(t)$, начальные значения $u(t_0) \le \tilde{u}(t_0)$ и момент времени $t^* \ge t_0$, что $u(t^*) > \tilde{u}(t^*)$. Положим $t_1 = \inf\{t \ge t_0 : u(t) > \tilde{u}(t)\}$. Из непрерывности слева следует, что

$$u(t_1) \le \tilde{u}(t_1). \tag{13}$$

На некотором промежутке $(t_1, t_1 + \delta_1)$: $u(t) = f[\sigma(t)]$ или $u(t) = g[\sigma(t)]$; $\tilde{u}(t) = f[\tilde{\sigma}(t)]$ или $\tilde{u}(t) = g[\tilde{\sigma}(t)]$. Рассмотрим возможные случаи. Отметим, что случаи $u(t) = f[\sigma(t)] > f[\tilde{\sigma}(t)] = \tilde{u}(t)$ и $u(t) = g[\sigma(t)] > g[\tilde{\sigma}(t)] = \tilde{u}(t)$ невозможны из-за того, что $\sigma(t) \le \sigma(t)$ и f, g — неубывающие функции.

Пусть $u(t) = f[\sigma(t)] > g[\tilde{\sigma}(t)] = \tilde{u}(t)$, тогда (см. (9)): $\sigma(t_1) < \alpha$, $\tilde{\sigma}(t_1) > \beta$. Так как функции $\sigma, \tilde{\sigma}$ непрерывны, то на некотором промежутке $(t_1, t_1 + \delta_2)$: $\sigma(t) < \alpha$, $\tilde{\sigma}(t) > \beta$, кроме того, по условию $\sigma(t) \le \tilde{\sigma}(t)$. Из (11), (12) следует, что при $x_1 < \alpha$, $x_2 > \beta$ выполняется неравенство $f(x_1) < g(x_2)$.

Действительно, выберем $x_1^* > \beta$, $x_2^* < \alpha$, так, чтобы $x_1 < x_1^* < \alpha$, $\beta < x_2^* < x_2$. Тогда

$f(x_1) \le f(x_1^*) < g(x_2^*) \le g(x_2)$.

Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Наконец, $u(t) = g[\sigma(t)] > f[\tilde{\sigma}(t)] = \tilde{u}(t)$, тогда $\sigma(t_1) > \beta$, $\tilde{\sigma}(t_1) < \alpha$. Так как $\beta < \sigma(t_1) \le \tilde{\sigma}(t_1) < \alpha$ и $u(t) = g[\sigma(t)]$, очевидно, что $u(t_1) = g[\sigma(t_1)]$ (иначе из (9): $u(t) = f[\sigma(t)]$), $\tilde{u}(t_1) = f[\tilde{\sigma}(t_1)]$. Из условия (12) следует, что $u(t_1) = f[\sigma(t_1)] < g[\sigma(t_1)] = u(t_1)$, что противоречит неравенству (13).

Замечание. Отметим, что если f и g возрастают, то для выполнения условия (12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(\alpha) \le g(\beta)$.

Если f и g — неубывающие функции, то необходимо, чтобы $f(\alpha) \le g(\beta)$, достаточно, чтобы $f(\alpha) < g(\beta)$.

МОНОТОННОСТЬ ПО ПОРОГОВЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО РЕЛЕ

Будем считать, что $f(x) \ne g(x)$ всюду на $\mathbb{R}$.

Определение. Будем говорить, что обобщенное реле *монотонно по пороговым значениям*, если для любых пороговых значений α, $\tilde{\alpha}$, β, $\tilde{\beta}$ таких, что $\alpha \le \tilde{\alpha}$, $\beta \le \tilde{\beta}$, выходы $u(t)$, $\tilde{u}(t)$, соответствующие непрерывному входу $\sigma(t)$, удовлетворяют при $t \ge t_0$ неравенству $u(t) \ge \tilde{u}(t)$, если $u(t_0) \ge \tilde{u}(t_0)$.

Теорема. *Для того, чтобы обобщенное реле было монотонно по пороговым значениям, необходимо и достаточно, чтобы для любых* x *выполнялось условие* $f(x) < g(x)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть обобщенное реле монотонно по пороговым значениям. Покажем, что $f(x) < g(x)$ при любых x. Предположим противное: существует такое x_0, что $f(x_0) \ge g(x_0)$. Так как $f(x) \ne g(x)$ при любом x, то $f(x) > g(x)$. Пусть $\beta < \tilde{\beta} = \sigma(t_0) < \alpha = \tilde{\alpha}$, $u(t_0) = \tilde{u}(t_0) = g[\sigma(t_0)]$. Тогда из (9) следует, что $u(t) = g[\sigma(t)] < f[\sigma(t)] = \tilde{u}(t)$. Это противоречит монотонности по пороговым значениям.

Достаточность. Пусть $f(x) < g(x)$ для любых x. Покажем, что обобщенное реле монотонно по пороговым значениям. Предположим противное, пусть $\beta \le \tilde{\beta}$, $\alpha \le \tilde{\alpha}$ — пороговые значения, σ — непрерывный вход, $u(t_0) \ge \tilde{u}(t_0)$ и $u(t) < \tilde{u}(t)$ при некоторых $t > t_0$. Положим $t_1 = \inf\{t \ge t_0 : u(t) < \tilde{u}(t)\}$, тогда в силу непрерывности слева $u(t_1) \ge \tilde{u}(t_1)$. На некотором интервале $(t_1, t_1 + \delta)$: $u(t) = f[\sigma(t)]$ или $u(t) = g[\sigma(t)]$; $\tilde{u}(t) = f[\sigma(t)]$ или $\tilde{u}(t) = g[\sigma(t)]$. Так как $g(x) > f(x)$ для любых x, то $u(t) = f[\sigma(t)]$, $\tilde{u}(t) = g[\sigma(t)]$, следовательно, $\beta \le \tilde{\beta} < \sigma(t_1) < \alpha \le \tilde{\alpha}$. Поэтому $u(t_1) = f[\sigma(t_1)] \ge g[\sigma(t_1)] = \tilde{u}(t_1)$, что противоречит предположению.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kloeden P.E.* Quasi-flows and equations with nonlinear differentials / P. E. Kloeden, B. N. Sadovsky, I. E. Vasilyeva // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. — 2002. — 51. — P. 1143—1158.

2. *Панасюк А.И.* Квазидифференциальные уравнения в метрических пространствах / А. И. Панасюк // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 8. — С. 1344—1353.

3. *Панасюк А.И.* Свойства решений квазидифференциального аппроксимационного уравнения и уравнение интегральной воронки / А. И. Панасюк // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 9. — С. 1537—1544.

4. *Садовский Б.Н.* О квазипотоках / Б. Н. Садовский // Тез. докл. конф, Воронеж, 26—29 апреля 1995 г. — Воронеж: ВГУ, 1995. — С. 80.

5. *Прядко И.Н.* О локально явных моделях некоторых негладких систем / И. Н. Прядко, Б. Н. Садовский // Автомат. и телемех. — 2004. — № 10. — С. 40—50.

Абрамова Юлия Владимировна, студент математического факультета Воронежского государственного университета.

Прядко Ирина Николаевна, старший преподаватель кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, к.ф.-м.н, тел. 8-904-212-45-85, e-mail pryadko_irina@mail.ru.

Abramova Yulia V. — student, department of mathematics of Voronezh State University

Pryadko Irina N. — senior teacher, chair of functional analysis and operation equations of Voronezh State University, tel.: 89042124585, e-mail: pryadko_irina@mail.ru