УДК 517.9

ТЕОРЕМА БЁРЛИНГА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ СТЕПАНОВА С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ*

Н. С. Калужина, С. В. Марюшенков

Поступила в редакцию 11.09.2008 г.

Аннотация. Теорема Бёрлинга о спектре равномерно непрерывных и ограниченных на множестве вещественных чисел комплексных функций распространяется на непрерывные ограниченные функции и функции Степанова с дискретным спектром.

Ключевые слова: спектр Бёрлинга, теорема Бёрлинга, дискретный спектр, пространство Степанова, пространство непрерывных ограниченных функций.

Abstract. The Beurling theorem about a spectrum of complex functions, which are continuous in regular intervals and limited on set of material numbers, extends on the continuous limited functions and Stepanov functions with a discrete spectrum.

Key words: Beurling spectrum, the Beurling theorem, discrete spectrum, the space of Stepanov, the space of the continuous limited functions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L^\infty(\mathbb{R})$ — банахово пространство существенно ограниченных на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел комплексных функций, $C_b = C_b(\mathbb{R})$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R})$ — замкнутые подпространства соответственно непрерывных и равномерно непрерывных функций. Символами $L^p = L^p(\mathbb{R})$, $S^p = S^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$, обозначим пространства Лебега и Степанова [1] измеримых на $\mathbb{R}$ комплексных функций с соответствующими нормами:

$$\| x \|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} | x(s) |^p \, ds \right)^{1/p}, x \in L^p,$$

$$\| y \|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} | y(\tau) |^p \, d\tau \right)^{1/p}, y \in S^p.$$

Ясно, что верно включение $L^p \subset S^p$, $p \in [1,\infty)$.

Интерес к пространствам Степанова возрос в связи с использованием их в теории дифференциальных уравнений [2]. Пространства S^p, $p \in [1,\infty)$, важны также тем, что они содержат пространство $L^\infty(\mathbb{R})$.

Банахово пространство $L^1(\mathbb{R})$ является коммутативной банаховой алгеброй со свёрткой функций в качестве умножения. Через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ обозначается одно из введенных в рассмотрение банаховых пространств (и используется запись $\mathcal{F} \in \{L^\infty, C_b, C_{b,u}, L^p, S^p\}$). Банахово пространство $\mathcal{F}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (см. [3], [4]) с помощью свёртки

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (1)$$

где $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}$. При этом верна оценка $\| f * x \| \le \| f \|_1 \| x \|$ (см. лемму 2.1). Преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ обозначается через $\hat{f}$.

В статье [5] А. Бёрлингом было дано следующее понятие спектра функции (см. также [4], [6]).

Определение 1.1. *Спектром (Бёрлинга) функции $x \in L^\infty(\mathbb{R})$ называется множество $\Lambda(x)$, состоящее из таких точек $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, для которых функция $e_{\lambda_0}(t) = \exp(i\lambda_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$, содержится в L^1-замкнутом подпространстве, порожденном сдвигами функции x.*

Сформулируем еще одно (эквивалентное первому для функций из $L^\infty(\mathbb{R})$) определение спектра, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 1.2. *Спектром (Бёрлинга) $\Lambda(x)$ функции $x \in \mathcal{F}$ называется дополнение в $\mathbb{R}$ к множеству*

$$\{\lambda_0 \in \mathbb{R} : \text{ существует } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ такая, что } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0 \text{ и } f * x = 0\}.$$

Определение 1.3. *Последовательность функций (x_n) из банахова пространства $\mathcal{F}$ называется с-сходящейся к функции $x_0 \in \mathcal{F}$, если она равномерно ограничена в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ и $\lim_{n\to\infty} \|\varphi(x_n - x_0)\| = 0$ для любой функции*

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-01-00131

$\varphi \in C_{b,u}(\mathbb{R})$, *имеющей компактный носитель* $supp\varphi$. *Если, к тому же, в определении 1.3 выполнено* $\lim\|x_n\| = \|x_0\|$, *то для* $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \in \in \{L^\infty(\mathbb{R}), C_b(\mathbb{R})\}$ *последовательность* (x_n) *называлась в [7] узко сходящейся к* x_0.

Теорема 1 (Бёрлинг [5]). *Пусть* $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ *и* $x \neq 0$. *Тогда существует число* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *и последовательность* (x_n) *линейных комбинаций сдвигов функции* x, *которая узко сходится к функции* $e_{\lambda_0}(t) = \exp(i\lambda_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$.

В статье [7] П. Кусис установил ошибочность работы С. Годемана [8], в которой была предпринята попытка доказать теорему Бёрлинга для функций из $L^\infty(\mathbb{R})$, а также заметил, что она перестает быть верной для функций из $C_b(\mathbb{R})$, и указал схему построения соответствующего примера. Обобщение теоремы Бёрлинга на функционалы из сопряженных пространств к некоторым классам полупростых коммутативных банаховых алгебр было получено Н. Домаром [9]. Им же было введено понятие "узкого" спектра функционалов.

Основные результаты данной статьи связаны с гармоническим анализом функций из пространств $C_b(\mathbb{R})$ и $S^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$. Получен аналог теоремы Бёрлинга для некоторых классов функций из этих пространств.

2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Введем в рассмотрение банаховы пространства $L^{p,q}(\mathbb{R})$, p, $q \in [1,\infty)$ следующим образом. Пусть $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ — линейное пространство (классов) локально суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций. Каждой функции $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ поставим в соответсвие последовательность (x_n), $n \in \mathbb{Z}$, где $x_n \in L^1_{loc}[0,1]$, $x_n(s) = x(s+n)$, $s \in \mathbb{R}$. Банахово пространство $L^{p,q}$ при $p \neq \infty$ состоит из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, для которых $x_n \in L^q[0,1]$, $n \in \mathbb{Z}$, а последовательность (x_n) обладает свойством $\| x \|_{p,q} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \| x_n \|_q^p \right)^{1/p} < \infty$, причем эта величина считается нормой функции x.

Если $p = \infty$, то последовательность (x_n) функций из $L^q[0,1]$ считается ограниченной и норма полагается равной $\|x\|_{\infty,q} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_q$.

Непосредственно из определения пространства Степанова $S^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$, следует, что оно совпадает с пространством $L^{\infty,p}(\mathbb{R})$, а нормы в них эквивалентны. Отметим еще, что $L^{\infty,\infty}(\mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R})$ и $L^{1,q} \subset L^1(\mathbb{R})$ для любого $q \in [1,\infty)$, причем $L^{1,1}(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R})$.

В банаховом пространстве $\mathcal{F}$ действует изометрическая группа операторов сдвига функций из $\mathcal{F}$ вида

$$(S(t)x)(\tau) = x(t+\tau), t, \tau \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{F}.$$

Лемма 2.1. *Операция свёртки функций* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in S^p(\mathbb{R})$ *(см. формулу (1)) корректно определена, т.е.* $f * x \in S^p(\mathbb{R})$, *и* $\|f * x\|_{s^p} \leq \|f\|_1 \|x\|_{s^p}$.

Если $f \in L^{1,q}(\mathbb{R})$, *где* $q = \dfrac{p}{p-1}$, *то оператор* $A_f x = f * x$, $x \in S^p(\mathbb{R})$, $A_f : S^p(\mathbb{R}) \to S^p(\mathbb{R})$ *свёртки с функцией* f *обладает свойствами:* $A_f x \in C_b(\mathbb{R})$ *и* $\|A_f x\|_\infty \leq \|f\|_{1,q} \|x\|_{S^p}$ *для любой функции* $x \in S^p(\mathbb{R})$.

Если, кроме того, $\lim_{t\to 0}\|S(t)f - f\|_{1,q} = 0$, *то* $A_f \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ *для любой функции* $x \in S^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$.

Доказательство. Доказательство факта, относящегося к первой части леммы содержится в [2].

Если $f \in L^{1,q}(\mathbb{R})$, то $(f * x)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t)$, где $x_n(t) = \int_n^{n+1} \tilde{f}(s)x(t+s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\tilde{f}(s) = f(-s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Из неравенства Гёльдера (при $p \neq 1$) следует, что для $q = \dfrac{p}{1-p}$

$$| x_n(t) | \leq \left(\int_n^{n+1} | \tilde{f}(s) |^q \, ds \right)^{1/q} \times \times \left(\int_n^{n+1} | x(t+s) |^p \, ds \right)^{1/p}, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Если $p = 1$, то

$$| x_n(t) | \leq vrai \sup_{\tau\in[n,n+1]} | \tilde{f}(\tau) | \times \times \int_n^{n+1} | x(t+s) | \, ds, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

$$\left|x_n(t+\Delta t) - x_n(t)\right| \leq \left(\int_n^{n+1} | \tilde{f}(s) |^q \, ds\right)^{1/q} \times \times \left(\int_n^{n+1} \left|x_n(s+t+\Delta t) - x_n(s+t)\right|^p ds\right)^{1/p}, \tag{4}$$

и при $p = 1$

$$\left|x_n(t+\Delta t) - x_n(t)\right| \leq vrai \sup_{\tau\in[n,n+1]} \left|\tilde{f}(\tau)\right| \times \times \int_n^{n+1} \left|x_n(s+t+\Delta t) - x_n(s+t)\right| ds. \tag{5}$$

Из абсолютной непрерывности интегралов в правых частях неравенств (4) и (5) следует непрерывность функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, а из неравенств (2) и (3) получаем оценку $\|f * x\|_{S^p} \le \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_\infty \le \|f\|_{1,q} \|x\|_{S^p}$. Таким образом, $f * x \in C_b(\mathbb{R})$.

Пусть теперь для $f \in L^{1,q}(\mathbb{R})$ выполнено условие $\lim_{t\to 0} \| S(t)f - f \|_{1,q} = 0$. Тогда из полученных оценок следует, что $\|S(t)(f * x) - f * x\|_\infty = = \|(S(t)f - f) * x\|_\infty \le \|S(t)f - f\|_{1,q} \|x\|_{S^p}$ и поэтому $f * x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$. **Лемма доказана.**

Следствие 2.1. *Для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ и любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем для $\hat{f}$ функция $f * x$ является непрерывной ограниченной на $\mathbb{R}$, допускающей продолжение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа.* *Далее используются следующие свойства спектра функций из банахова пространства $\mathcal{F}$ (см. [4], [6]).*

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{F} \in \{L^\infty, S^p\}$, $1 \le p < \infty$. Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{F}$ имеют место следующие свойства:*

1. $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2. $\Lambda(f * x) \subset (\operatorname{supp} \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;

3. $f * x = 0$, если $(\operatorname{supp} \hat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$, и $f * x = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

4. $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда функция x представима в виде $x(t) = \alpha e_{\lambda_0}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \ne 0$.

Определение 2.1. *Ограниченной аппроксимативной единицей (сокращенно о.а.е.) будем называть ограниченную последовательность функций (f_n) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ со свойствами: 1) $\hat{f}_n(0) = 1$, $n \ge 1$; 2) $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\ge\alpha} | f_n(t) | dt = 0$ для любого $\alpha > 0$. В частности, о.а.е. является любая последовательность (f_n) из $L^1(\mathbb{R})$, определяемая равенствами $f_n(t) = n f_0(nt)$, где $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f_0}(0) = 1$.*

Через $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ обозначим подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ вида

$$\{x \in \mathcal{F} : \text{функция} \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \text{непрерывна}\}.$$

Отметим, что $\mathcal{F}_c = C_{b,u}$, если $\mathcal{F} \in \{L^\infty, C_b, C_{b,u}\}$ и $(L^p)_c = L^p$, $p \in [1, \infty)$. Ясно, что $\mathcal{F}_c$-замкнутое подпространство из $\mathcal{F}$ и, более того, $\mathcal{F}_c$ — замкнутый подмодуль из $\mathcal{F}$.

Лемма 2.3. *Пусть (f_n) — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}) = \{x \in \mathcal{F} : \lim_{n\to\infty} f_n * x = x\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\alpha > 0$

$$\|f_n * x - x\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(\tau)x - x) d\tau \right\| \le$$

$$\le 2 \int_{|\tau|\ge\alpha} |f_n(\tau)| d\tau \|x\| + \int_{|\tau|\le\alpha} |f_n(\tau)| \|S(\tau)x - x\| d\tau.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|S(\tau)x - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2\sup_{n\ge1}\|f_n\|}$ при всех $\tau \in [-\alpha, \alpha]$.

Доказательство. Пусть число $n_0 \in \mathbb{N}$ выбрано из условия $\int_{|\tau|\ge\alpha} |f_n(\tau)| d\tau < \dfrac{\varepsilon}{4\|x\|}$ для всех $n > n_0$. Тогда для всех $n > n_0$ получаем, что $\|f_n * x - x\| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim_{n\to\infty} f_n * x = x$.

Пусть теперь функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ такова, что $\lim_{n\to\infty} f_n * x = x$. Поскольку для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ верно равенство $S(t)(f * x) - f * x = = (S(t)f - f) * x$, $t \in \mathbb{R}$, и представление S сильно непрерывно в $L^1(\mathbb{R})$, то $f * x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. Следовательно, $f_n * x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ для всех $n \ge 1$ и поэтому $x = \lim_{n\to\infty} f_n * x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. **Лемма доказана.**

Определение 2.2. *Пусть $\Omega \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}_+\}$, где $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, и пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Семейство функций $(f_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется λ_0-семейством, если выполнены условия: 1) $\widehat{f_\alpha}(\lambda_0) = 1$, $\alpha \in \Omega$; 2) $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| f_\alpha(t+\tau) e^{-i\lambda_0 t} - f_\alpha(\tau) \right| d\tau = 0$, $t \in \mathbb{R}$.*

Примерами λ_0-семейств являются следующие два семейства функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$:

$$f_{\alpha,\lambda_0}(t) = (2\alpha)^{-1} \chi_{[-\alpha,\alpha]}(t) \times \exp(i\lambda_0 t), \ \alpha \in \mathbb{R}_+, \ t \in \mathbb{R};$$

$$g_{\alpha,\lambda_0}(t) = \alpha^{-1} \chi_{[0,\infty]}(t) \times$$

$$\times \exp((-\alpha^{-1} + i\lambda_0)t), \ \alpha \in \mathbb{R}_+, \ t \in \mathbb{R},$$

где $\chi_{\mathbb{J}}$ — характеристическая функция промежутка $\mathbb{J}$ из $\mathbb{R}$.

Отметим используемое далее равенство

$$(f_{\alpha,\lambda_0} * x)(t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} x(s+t) e^{-i\lambda_0 s} ds, \ t \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0, \quad (6)$$

где $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

В частности, λ_0-семейство $(f_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ может быть получено из 0-семейства $(\tilde f_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ следующим образом: $f_\alpha(t)=\tilde f_\alpha(t)\exp(i\lambda_0 t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Определение 2.3. *Число $\lambda_0\in\mathbb{R}$ отнесем к дискретному спектру $\Lambda_d(x)$ функции $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, если выполнено условие*

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\,\| f_{\alpha,\lambda_0}*x\|=C(\lambda_0)>0.$$

Определение 2.4. *Точку $\lambda_0\in\mathbb{R}$ назовем эргодической точкой функции $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, если в банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ существует*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}x(t+s)e^{-i\lambda_0 s}ds=x_0(t),t\in\mathbb{R},\qquad(7)$$

где $x_0\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Эргодическую точку λ_0 отнесем к *спектру Бора* $\Lambda_B(x)$ функции $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, если функция x_0 из (7) ненулевая.

Понятие эргодической точки функции с применением λ_0-семейств было введено в статье [10] (см. также [11]).

Лемма 2.4. *Пусть $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Тогда*

1. $\Lambda_B(x)\subset\Lambda_d(x)\subset\Lambda(x)$;

2. если $\lambda_0\in\Lambda_B(x)$, то функция x_0 в формуле (7) имеет вид $x_0(t)=\beta\exp(i\lambda_0 t)$, $t\in\mathbb{R}$, для некоторого $\beta\neq 0$ из $\mathbb{C}$;

3. $\lambda_0\in\Lambda_B(x)$, если λ_0 — изолированная точка в $\Lambda(x)$.

Доказательство. Первое включение из 1) следует из определений 2.3 и 2.4.

Пусть $\lambda_0\notin\Lambda(x)$. Тогда существует такая функция $f\in L^1(\mathbb{R})$, что $\hat f(\lambda_0)=1$ и $(\operatorname{supp}\hat f)\cap\Lambda(x)=\varnothing$. Поэтому, в силу леммы 2.1, $f*x=0$. Поскольку $f_{\alpha,\lambda_0}*x=f_{\alpha,\lambda_0}*(x-f*x)=$ $=(f_{\alpha,\lambda_0}-f_{\alpha,\lambda_0}*f)*x$ для любого $\alpha>0$, то из равенства $\hat f(\lambda_0)=1$ следует, что $\left\|f_{\alpha,\lambda_0}-f_{\alpha,\lambda_0}*f\right\|=$ $=\lim_{\alpha\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|f_{\alpha,\lambda_0}(t)-(f_{\alpha,\lambda_0}*f)(t)\right|dt=0$.

Таким образом, $\lim_{\alpha\to\infty}f_{\alpha,\lambda_0}*x=0$, т.е. $\lambda_0\notin\Lambda_d(x)$. Итак, свойство 1) установлено.

Докажем свойство 2). Непосредственно из определения 2.4 следует, что $S(\tau)x_0=\exp(i\lambda_0\tau)x_0$ для любого $\tau\in\mathbb{R}$. Поэтому функция $x_0e_{-\lambda_0}$ является постоянной и, значит, $x_0(t)=\beta\exp(i\lambda_0 t)$, $t\in\mathbb{R}$, для некоторого $\beta\in\mathbb{C}$.

Докажем свойство 3). Пусть $f\in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\hat f\equiv 1$ в некоторой окрестности точки λ_0 и $(\operatorname{supp}\hat f)\cap(\Lambda(x)\setminus\{\lambda_0\})=\varnothing$. Представим функцию x в виде $x=x_0+x_1$, где $x_0=f*x$ и $x_1=x-x_0$. Из леммы 2.2 следует, что $\Lambda(x_0)=\{\lambda_0\}$, т.е. $x_0=\alpha_0 e_{\lambda_0}$, где $0\neq\alpha_0\in\mathbb{C}$, и $\Lambda(x_1)=\Lambda(x)\setminus\{\lambda_0\}$. Поскольку $f_{\alpha,\lambda_0}*x=\widehat{f_{\alpha,\lambda_0}}(\lambda_0)\alpha_0 e_{\lambda_0}+f_{\alpha,\lambda_0}*x_1=$ $=\alpha_0 e_{\lambda_0}+f_{\alpha,\lambda_0}*x_1$, то из доказательства свойства 1) следует, что $\lim_{\alpha\to\infty}f_{\alpha,\lambda_0}*x=\alpha_0 e_{\lambda_0}\neq 0$. Итак, $\lambda_0\in\Lambda_B(x)$. **Лемма доказана.**

Лемма 2.5. *Если $\hat f(\lambda_0)\neq 0$ для $f\in L^1(\mathbb{R})$ и $\lambda_0\in\Lambda(x)$, где $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, то $\lambda_0\in\Lambda(f*x)$, причем $\lambda_0\in\Lambda_d(f*x)$, если $\lambda_0\in\Lambda_d(x)$.*

Доказательство. Допустим, что $\lambda_0\notin\Lambda(f*x)$. Тогда существует функция $g\in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\hat g(\lambda_0)\neq 0$ и $(\operatorname{supp}\hat g)\cap\Lambda(f*x)=\varnothing$. Из свойства 3) леммы 2.2 следует, что $(g*f)*x=g*(f*x)=0$. Поскольку $\widehat{g*f}(\lambda_0)=\hat g(\lambda_0)\hat f(\lambda_0)\neq 0$, то $\lambda_0\notin\Lambda(x)$. Получено противоречие. Таким образом, $\lambda_0\in\Lambda(f*x)$.

Предположим, что $\lambda_0\in\Lambda_d(x)$. Поскольку $\lim_{\alpha\to\infty}\left\|f_{\alpha,\lambda_0}*f-\hat f(\lambda_0)f_{\alpha,\lambda_0}\right\|_1=0$, то $\lim_{\alpha\to\infty}f_{\alpha,\lambda_0}*(\hat f(\lambda_0)x-$ $-f*x)=0$. Поэтому $\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\left\|f_{\alpha,\lambda_0}*(f*x)\right\|>0$, т.е. $\lambda_0\in\Lambda_d(f*x)$. **Лемма доказана.**

Лемма 2.6. *Если последовательность (x_n) из $\mathcal{F}(\mathbb{R})\in\{C_b(\mathbb{R}),S^p(\mathbb{R})\}$ является c-сходящейся к $x_0\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$, то для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$ последовательность $(f*x_n)$ c-сходится к $f*x_0$.*

Доказательство. Из ограниченности последовательности (x_n) следует ограниченность последовательности $(f*x_n)$. Ввиду плотности в алгебре $L^1(\mathbb{R})$ линейных комбинаций характеристических функций отрезков из $\mathbb{R}$ и ограниченности (x_n), утверждение достаточно доказать для $f=\chi_{[a,b]}$, $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Пусть вначале $\mathcal{F}=C_b$. Тогда из оценки

$$\left|(f*x_n)(t)-(f*x_0)(t)\right|\le\int_{t+a}^{t+b}\left|x_n(s)-x_0(s)\right|ds,\ \ t\in\mathbb{R}$$

следует равномерная сходимость последовательности $(f*x_n)$ к функции $f*x_0$ на любом отрезке $[-c,c]$, $c>0$.

Если $\mathcal{F}=S^p$, то, используя неравенство Гельдера, получаем оценки

$$\int_{-c}^{c}\left|(f*x_n)(t)-(f*x_0)(t)\right|^p dt\le$$

$$\le\int_{-c}^{c}\left(\int_{t+a}^{t+b}\left|x_n(s)-x_0(s)\right|ds\right)^p dt\le 2c\left(\int_{-c+a}^{c+b}\left|x_n(s)-x_0(s)\right|ds\right)^p\le$$

$$\le 2c(b-a)^{pq}\left(\int_{-c+a}^{c+b}\left|x_n(s)-x_0(s)\right|^p ds\right),$$

где $q \in [1,\infty)$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Из этих оценок следует доказываемое утверждение. **Лемма доказана.**

Лемма 2.7. *Если последовательность функций (x_n) из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ с — сходится к функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, то* $\Lambda(x) \subset \bigcap\limits_{m\ge1}(\bigcup\limits_{n\ge m}\Lambda(x_n)) = \Delta$.

Доказательство. Допустим, что существует $\lambda_0 \in \Lambda(x) \setminus \Delta$. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойствами: $\widehat{f}(\lambda_0) = 0$ и $\operatorname{supp}\widehat{f} \cap \Delta = \varnothing$. По свойству 2) леммы 2.2, имеют место включения $\Lambda(f * x_n) \subset \operatorname{supp}\widehat{f} \cap \Lambda(x_n)$, $n \ge 1$. Поэтому существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $f * x_n = 0$ для $n \ge m$, по свойству 3) той же леммы. Теперь из леммы 2.3 (учитывая, что $L^p(\mathbb{R})$ непрерывно вложено в $S^p(\mathbb{R})$) получаем, что $f * x = 0$. Из леммы 2.6 вытекает, что $\lambda_0 \in \Lambda(f * x)$, т.е. $\Lambda(f * x) \ne \varnothing$. Таким образом, из свойства 1) леммы 2.2 следует, что получено противоречие в связи со сделанным предположением. **Лемма доказана.**

Для каждой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ и $h > 0$ рассмотрим функцию $x_h(t) = \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} x(s+t)ds$, $t \in \mathbb{R}$. Ее называют *функцией Стеклова*, и далее она обозначается через $S_h x$, $h > 0$. Из представления $S_h x = f_h * x$, где $f_h = (2h)^{-1}\chi_{[-h,h]} \in L^{\infty,1}(\mathbb{R})$, $\| f_h \|_1 = 1$, следует (см. лемму 2.1), что $x_h \in C_b(\mathbb{R})$ и $\|x_h\|_\infty \le \|f_h\|_{1,q}\|x\|$, где $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Лемма 2.8. *Функция Стеклова $S_h x$, $h > 0$, для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \in \{C_b(\mathbb{R}), S^p(\mathbb{R})\}$ является с-пределом некоторой последовательности (x_n) линейных комбинаций сдвигов функции x, причем $\|x_n\| \le \|x\|$, $n \ge 1$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(t) = (b-a)^{-1}\int x(t+s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, где $a < b$, и докажем утверждение леммы для этой функции, представимой также в виде $y = (b-a)^{-1}\chi_{[-b,-a]} * x$.

Пусть $\tau_k = -b + k(\dfrac{b-a}{n})$, $0 \le k \le n$ — точки равномерного разбиения отрезка $[-b,-a]$ на n равных частей. Тогда последовательность функций $y_n(t) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} x(t-\tau_k)$, $t \in \mathbb{R}, n \ge 1$ равномерно ограничена в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, причем $\|y_n\| \le \|x\|, n \ge 1$.

Для любого $c > 0$ введем в рассмотрение модуль непрерывности функции $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ на отрезке $[-c,c]$, положив для любого $\delta > 0$

$$\omega_c(\delta, y) = \max_{|t_1-t_2|<\delta, t_1,t_2\in[-c,c]} \left|y(t_1) - y(t_2)\right|,$$

если $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = C_b(\mathbb{R})$, и

$$\omega_c(\delta, y)_p = \max_{|t_1-t_2|<\delta, t_1,t_2\in[-c,c]} \| S(t_1)y - S(t_2)y \|_{L^p[-c,c]},$$

если $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = S^p(\mathbb{R})$.

Пусть вначале $x \in C_b(\mathbb{R})$. Тогда для любого $t \in [-c,c]$ верны оценки

$$\left|(b-a)^{-1}(\chi_{[-b,-a]} * x)(t) - y_n(t)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (x(t-\tau) - x(t-\tau_k))d\tau\right| \le$$

$$\le \omega_{c+b-a}\left(\frac{b-a}{n}, x\right).$$

Ввиду равномерной непрерывности функции x на отрезке $[-c-b+a, c+b-a]$ последовательность (y_n) является с-сходящейся к функции $\dfrac{1}{b-a}\chi_{[-b,-a]} * x = y$.

Пусть теперь $x \in S^p(\mathbb{R})$. Тогда

$$\| (b-a)^{-1}\chi_{[-b,-a]} * x - y_n \|_{L^p[-c,c]} \le$$

$$\le \frac{1}{b-a}\left(\int\limits_{-c}^{c} |\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (x(t-\tau) -\right.$$

$$\left. - x(t-\tau_k))d\tau |^p \, dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le \omega_{c+b-a}\left(\frac{b-a}{n}, x\right)_p.$$

Так как $x \in L^p[-c-b+a, c+b-a]$ и оператор сдвига является непрерывным на этом пространстве, то последовательность (y_n) с-сходится к $\dfrac{1}{b-a}\chi_{[-b,-a]} * x = y$. **Лемма доказана.**

ТЕОРЕМА БЁРЛИНГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ $C_b(\mathbb{R})$ И $S^p(\mathbb{R})$

В следующем утверждении теорема Бёрлинга распространяется на класс функций из пространств $C_b(\mathbb{R})$ и $S^p(\mathbb{R})$, имеющих непустой дискретный спектр.

Теорема 2. *Пусть $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \in \{C_b(\mathbb{R}), S^p(\mathbb{R})\}$, где $p \in [1,\infty)$, и $\lambda_0 \in \Lambda_d(x)$. Тогда существует последовательность линейных комбинаций сдвигов функции x, которая с-сходится к функции $e_{\lambda_0}(t) = e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство функций (f_{α,λ_0}), $\alpha \in \mathbb{R}_+$, из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и соответствующее семейство функций

$x_\alpha = f_{\alpha,\lambda_0} * x$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Поскольку семейство функций (f_{α,λ_0}), $\alpha \in \mathbb{R}_+$, принадлежит пространству $L^{1,q}(\mathbb{R})$ при любом $q \in [1,\infty)$ и равномерно ограничено в нем, то из леммы 2.1 следует, что $x_\alpha \in C_b(\mathbb{R})$ и $\sup_{\alpha>0} \| x_\alpha \| < \infty$. При $p > 1$ верны оценки (вытекают из леммы 2.1)

$$|x_\alpha(t+\tau) - x_\alpha(t)| \le \left\| S(\tau) f_{\alpha,\lambda_0} - f_{\alpha,\lambda_0} \right\|_{1,q} \|x\|,$$

$$t, \tau \in \mathbb{R}, \alpha > 0,$$

где $q = \dfrac{p}{p-1} \in [1,\infty)$.

Поскольку $\left\| S(\tau) f_{\alpha,\lambda_0} - f_{\alpha,\lambda_0} \right\|_{1,q} \le \tau^{1/q} \alpha^{-1}$, $\tau > 0$, то семейство $x_\alpha \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ и является равностепенно непрерывным при $\alpha > 0$.

Если $p = 1$, то из соотношений

$$| x_\alpha(t+\tau) - x_\alpha(t) | =$$
$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} (x(t+\tau+s) - x(t+s)) ds \le$$
$$\le \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} | x(t+\tau+s) - x(t+s) | \, ds,$$
$$\alpha > 0, t, \tau \in \mathbb{R},$$

и абсолютной непрерывности интеграла следует равностепенная непрерывность семейства функций $(x_\alpha), \alpha > 0$ на каждом конечном промежутке $[a,b]$ из $\mathbb{R}$. Пусть сначала $x \in C_b(\mathbb{R})$. Тогда из условия $\lambda_0 \in \Lambda_d(x)$ получаем существование последовательностей (α_n) из $\mathbb{R}_+$ и (t_n) из $\mathbb{R}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ и

$$\begin{aligned} C(\lambda_0)/2 &\le |x_\alpha(t_n)| = \\ &= \left| (f_{\alpha_n,\lambda_0} * x)(t_n) \right| \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\| f_{\alpha,\lambda_0} * x \right\|. \end{aligned} \tag{8}$$

Если же $x \in S^p(\mathbb{R})$, то свойство 8 также выполняется, так как в противном случае (ввиду непрерывности вложения $C_b(\mathbb{R})$ в $S^p(\mathbb{R})$), получили бы, что $\lambda_0 \notin \Lambda_d(x)$.

Без ограничения общности можно считать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} (f_{\alpha,\lambda_0} * x)(t_n) = C_o \ne 0$. Положим $g_n(t) = \dfrac{f_{\alpha,\lambda_0}(t+t_n)}{(f_{\alpha_n,\lambda_0} * x)(t_n)}$, $t \in \mathbb{R}$. Полученная последовательность $x_n = g_n * x$, $n \ge 1$, из $C_{b,u}(\mathbb{R})$ обладает свойствами: 1) $x_n(0) = (g_n * x)(0) = 1$; 2) $\|x_n\|_\infty \le 2/C(\lambda_0)\|x\|$; 3) семейство функций x_n, $n \ge 1$, равностепенно непрерывно на каждом конечном промежутке. Отметим, что свойство 2) вытекает из леммы 2.1, а свойство 3) — непосредственно из определения функций (x_n), $n \ge 1$ (см. оценки (4) и (5)). Таким образом, из теоремы Арцела—Асколи (см. [6]) следует существование подпоследовательности последовательности (x_n), которая c-сходится к некоторой ненулевой функции $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, причем без ограничения общности можно считать, что сама последовательность (x_n) c-сходится к x_0.

Для любого $\mu_0 \ne \lambda_0$ из $\mathbb{R}$ выберем функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\hat{f}(\mu_0) \ne 0$, $\operatorname{supp} \hat{f}$ — компакт и $\lambda_0 \notin \operatorname{supp} \hat{f}$. Из леммы 2.2 следует, что последовательность $(f * x_n)$ c-сходится к функции $f * x_0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| f * f_{\alpha_n,\lambda_0} \right\|_1 = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| f * g_n \right\|_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| S(t_n)(f * f_{\alpha_n,\lambda_0}) \right\|_1 = 0$. Следовательно, $f * x_0 = 0$, т.е. $\mu_0 \notin \Lambda(x_0)$, и поэтому $\Lambda(x_0) \subset \{x_0\}$. Так как $x_0(0) = 1$, то $\Lambda(x_0) = \{\lambda_0\}$ и, в силу леммы 2.2, $x_0(t) = \exp(i\lambda_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку функции x_n, $n \ge 1$, являются сдвигами функций Стеклова функции x, то из леммы 2.8 (см. также ее оценки) следует, что каждая из функций x_n, $n \ge 1$, является c-пределом последовательности сдвигов функции x. Из доказанного получаем, что некоторая последовательность сдвигов функции x c-сходится к e_{λ_0}. **Теорема доказана.**

Следующая теорема является наиболее близкой к теореме Бёрлинга.

Теорема 3. *Пусть $x \in S^p(\mathbb{R})$, где $p > 1$ и $\lambda_0 \in \Lambda(x)$. Тогда существует последовательность линейных комбинаций сдвигов функции x, которая c-сходится к функции $e_{\lambda_0}(t) = \exp(i\lambda_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть (f_n), $n \ge 1$ — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, состоящая из функций f_n, принадлежащих подпространству $L^{\infty,q}(\mathbb{R})$, где $q = \dfrac{p}{p-1} \in [1,\infty)$. Например, в качестве такой последовательности функций можно взять функции Стеклова $f_n(t) = (2n)^{-1} \chi_{[-1/n,1/n]}$, $n \ge 1$. Из леммы 2.1 следует, что последовательность функций $x_n = f_n * x$, $n \ge 1$, принадлежит пространству $C_{b,u}(\mathbb{R})$ и ограничена в нем, а из леммы 2.3 получаем, что она сходится к x по норме пространства $S^p(\mathbb{R})$. Поскольку $\hat{f}_n(\lambda_0) \ne 0$ (по крайней мере для $n \ge n_0 \ge 1$), то $\lambda_0 \in \Lambda(f_n * x)$, $n \ge n_0 \ge 1$, в силу леммы 2.5. К каждой из функций $f_n * x$, $n \ge n_0$, применима теорема Бёрлинга и, значит, некоторая последовательность линейных комбинаций сдвигов функции $f_n * x$ c-сходится к e_{λ_0}. В свою очередь, из леммы 2.8 (с учетом выбора функций (f_n), $n \ge 1$) следует, что каждая из функций $f_n * x$, $n \geq 1$, является c-пределом в $S^p(\mathbb{R})$ линейных комбинаций сдвигов функции x, причем соответствующая последовательность ограничена в $S^p(\mathbb{R})$ величиной $\| x \|$. Таким образом, некоторая последовательность линейных кобинаций сдвигов функции x c-сходится в $S^p(\mathbb{R})$ к функции e_{λ_0}. **Теорема доказана.**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции / Б. М. Левитан — М.: ГИТТЛ, 1953. — 396 с.

2. *Костин А.В.* К теории функциональных пространств Степанова / А. В. Костин, В. А. Костин. — Воронеж.: Изд-во ВГУ, 2007.

3. *Хьюитт Э.* Абстрактный гармонический анализ / Э. Хьюитт, К. Росс. — М.: Мир, 1975. — Т. 2.

4. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж.: Изд-во ВГУ, 1987.

5. *Beurling A.* Un theoreme sur les fonctions borness et uniformement continues sur l'axe reel / A. Beurling // Acta Math. — 1945. — № 77. — P. 127—136.

6. *Данфорд Н.* Линейные операторы / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: Мир, 1966. — Т. 2.

7. *Koosis P.* On the spectral analysis of bounded functions / P. Koosis // Pacific Journal of Mathematics. — 1966. — № 16. — P. 121—128.

8. *Godement S.* Theorems tauberiens et theorie spectrale / S. Godement // Annales de l'Ecole Normal Superieure. — 1947. — № 64. — P. 119—138.

9. *Domar Y.* Some results on norrow spectral analysis / Y. Domar// Math. Scand. — 1967. — № 20. — P. 5—18.

10. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах / Ф. Гринлиф — М.: Мир, 1973.

11. *Woodward G.S.* Invariants means and ergodic sets in Fourier analysis / G. S. Woodward // Pacific Journal of Mathematics. — 1974. — № 54, Vol. 2. — P. 281—299.

Калужина Наталья Сергеевна — студент факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет; e-mail: kaluzhina_n_s@mail.ru

Марюшенков Станислав Владимирович — студент факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет; e-mail: stasint1@mail.ru

Kaluzhina Natalya S. — student, department of applied mathematics, mechanics and informatics of Voronezh State University, e-mail:kaluzhina_n_s@mail.ru

Maryushankov Stanislav V. — student, department of applied mathematics, mechanics and informatics of Voronezh State University, e-mail: stasint1@mail.ru