УДК 517.5

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ И ЗАПРЕТАХ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ КЕЛЛЕРОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

А. В. Атанов, А. В. Лобода

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 04.09.2008 г.

Аннотация. В связи с известной гипотезой о якобиане в данной статье изучаются полиномиальные келлеровы отображения. Получен ряд условий на коэффициенты таких отображений, при которых они представляются суперпозициями аффинных и треугольных полиномиальных преобразований. Установлены также некоторые явные запреты для коэффициентов келлеровых отображений.

Ключевые слова. гипотеза о якобиане, полиномиальное отображение, треугольное преобразование, якобиева пара, суперпозиция отображений.

Annotation. In connection with the known Jacobian Conjecture the Keller polynomial mappings are studied in this article. A number of conditions for the coefficients of such mappings are obtained under wich they are presented by a superpositions of an affine and polynomial-triangular transformations. Some explicit prohibitions are also established for the Keller mappings coefficients.

Key words. jacobian conjecture, polynomial mapping, triangular transformation, jacobian mate, superposition of mappings.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полиномиальное отображение $f = (P, Q)$ комплексного пространства $\mathbb{C}^2$ в себя, имеющее невырожденный всюду якобиан

$$J_f = \left|\frac{D(P,Q)}{D(x,y)}\right| = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \neq 0. \quad (1.1)$$

Здесь x, y — комплексные переменные в пространстве $\mathbb{C}^2$; $P = P(x,y)$ и $Q = Q(x,y)$ — многочлены от своих аргументов.

Везде далее мы называем *келлеровым* отображением произвольное полиномиальное отображение $f = (P, Q)$, удовлетворяющее условию (1.1). Само это неравенство будем называть *условием келлеровости* отображения f.

Известная гипотеза о якобиане (Jacobian Conjecture, JC, см. [1—3]) в простейшем 2-мерном случае может быть переформулирована как утверждение о представимости любого келлерова отображения 2-мерного комплексного пространства в виде суперпозиции аффинных невырожденных и полиномиально-треугольных преобразований этого пространства.

Напомним, что треугольными преобразованиями называются отображения вида

$$x^* = x + g(y), \ \ y^* = y \quad (1.2)$$

и

$$x^* = x, \ \ y^* = y + h(x) \quad (1.3)$$

с произвольными (в нашем случае полиномиальными) функциями $g(y)$ и $h(x)$.

Основная цель настоящей работы — изучение условий:

а) существования келлеровых отображений в зависимости от различных ограничений на их компоненты P и Q;

б) представимости келлеровых отображений суперпозициями аффинных и треугольных преобразований.

Мы связываем такие условия с ограничениями на коэффициенты изучаемых отображений. Дело в том, что кратко записанное условие (1.1) может быть развернуто в большую систему уравнений, квадратично (билинейно) зависящих от коэффициентов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Рассмотрение такой системы позволило получить представленные ниже результаты, являющиеся, по мнению авторов, перспективными в изучении гипотезы о якобиане.

Анализ упомянутых систем и способы получения этих результатов о справедливости JC в

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-3877.2008.1

рассматриваемых частных случаях не являются стандартными в современных исследованиях гипотезы. В то же время, как и наша статья, практически все современные публикации по JC (не считая регулярно опровергаемых "полных доказательств" гипотезы) посвящены подтверждениям этой гипотезы при различных дополнительных ограничениях (см., например, [4—7]).

2. СИСТЕМА КВАДРАТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разложим компоненты $P(x,y)$, $Q(x,y)$ отображения f на однородные составляющие:

$$\begin{cases} P(x,y) = P_n(x,y) + P_{n-1}(x,y) + \ldots + P_1(x,y) + P_0, \\ Q(x,y) = Q_m(x,y) + Q_{m-1}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + Q_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь подразумевается, что степень многочлена $P(x,y)$ равна степени n его старшей (ненулевой) однородной компоненты P_n; аналогично степень многочлена $Q(x,y)$ равна m, т. что $Q_m \neq 0$.

Определение 1. Отображение $f = (P(x,y), Q(x,y))$ со степенями составляющих его многочленов, равными n и m, соответственно, будем называть (n,m)*-отображением.*

Замечание. За счет сдвига координат можно считать, что (являющиеся константами) компоненты P_0 и Q_0 в формулах (2.1) отсутствуют.

Якобиан J_f допускает такое же, как в (2.1), разложение на однородные составляющие:

$$J_f = R(x,y) =$$
$$= R_{n+m-2}(x,y) + \ldots + R_1(x,y) + R_0(x,y).$$

При этом компоненты R_j разложения определяются следующим образом:

$$R_j = \sum_{k+\ell=j+2} \left(\frac{\partial P_k}{\partial x}\frac{\partial Q_\ell}{\partial y} - \frac{\partial P_k}{\partial y}\frac{\partial Q_\ell}{\partial x} \right).$$

Для краткости введем следующее обозначение:

$$[P,Q] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тогда

$$R_j = \sum_{k+\ell=j+2} [P_k, Q_\ell].$$

Условие келлеровости отображения f можно записать теперь в виде уравнения

$$[P,Q] = \delta = const \neq 0 \quad (2.2)$$

либо в виде системы отдельных уравнений, каждое из которых описывает свою компоненту однородности многочлена $J_f = R(x,y)$:

$$\begin{gathered}
R_{n+m-2}(x,y) = [P_n, Q_m] = 0; \\
R_{(n+m-2)-1}(x,y) = [P_n, Q_{m-1}] + [P_{n-1}, Q_m] = 0; \\
R_{(n+m-2)-2}(x,y) = \\
= [P_n, Q_{m-2}] + [P_{n-1}, Q_{m-1}] + [P_{n-2}, Q_m] = 0; \\
\ldots \\
R_{(n+m-2)-k}(x,y) = \\
= [P_n, Q_{m-k}] + \ldots + [P_{n-k}, Q_m] = 0; \\
\ldots \\
R_2(x,y) = [P_3, Q_1] + [P_2, Q_2] + [P_1, Q_3] = 0; \\
R_1(x,y) = [P_2, Q_1] + [P_1, Q_2] = 0; \\
R_0(x,y) = [P_1, Q_1] = \delta \neq 0.
\end{gathered} \quad (2.3)$$

Отметим, что все уравнения этой системы, кроме последнего, «однородны» т.е. имеют нулевую правую часть. При этом левые части всех уравнений (2.3) квадратично зависят от многочленов пары (P,Q), или, что то же самое, от коэффициентов этих многочленов.

3. «КОМПЬЮТЕРНЫЕ» ТЕОРЕМЫ

Система (2.3) была изучена нами в случае $(6,3)$ - и $(8,4)$ -отображений в еще более детальной расшифровке. Так как каждая компонента $R_k(x,y)$ якобиана J_f является однородным многочленом (формой) от двух переменных, то равенство (тождественное) нулю такого многочлена означает равенство нулю всех его коэффициентов. У формы $R_k(x,y)$ положительной степени k имеется, как легко понять, $k+1$ коэффициентов:

$$R_k = \sum_{j=0}^{k} C_{(k-j,j)} x^{k-j} y^j =$$
$$= C_{(k,0)} x^k + C_{(k-1,1)} x^{k-1} y + \ldots + C_{(0,k)} y^k.$$

Это означает, что каждое из уравнений системы (2.3), отвечающее компоненте $R_k(x,y)$, распадается на систему из $(k+1)$ уравнений, отвечающих различным парам $x^{k-j}y^j$. Все такие уравнения квадратичным (билинейным) образом зависит от коэффициентов $A_{(k,l)}, B_{(s,t)}$ многочленов

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} A_{(k-j,j)} x^{n-j} y^j, \quad Q_\ell = \sum_{s=0}^{\ell} B_{(\ell-s,s)} x^{m-s} y^s.$$

При этом, например, для $(6,3)$-отображений получается система 36 квадратичных уравнений относительно 34 неизвестных коэффициентов; в $(8,4)$-случае имеем 66 уравнений относительно 55 неизвестных.

Обе эти системы были изучены [8] при помощи компьютерных программ символьных вычислений. Результаты такого изучения приведены ниже.

ТЕОРЕМА 1. С точностью до аффинных преобразований келлерово $(6,3)$-отображение сводится к суперпозиции двух треугольных отображений. При этом однородная составляющая Q_3 младшей компоненты $Q(z,w)$ келлерова отображения является точным кубом.

ТЕОРЕМА 2. С точностью до аффинных преобразований келлерово $(8,4)$-отображение сводится к суперпозиции двух или трех треугольных отображений.

Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, можно получать и для других (n,m)-отображений при достаточно произвольно выбираемых n и m. При этом ясно, что с увеличением степеней n и m количество (а следовательно, и время) компьютерных вычислений быстро возрастает.

В связи с этим мы приводим ниже теоремы 3—5, полученные путем математических рассуждений, а не компьютерных вычислений. Эти результаты связаны (в первую очередь) с «2-кратными» келлеровыми $(2n,n)$-отображениями $(n \geq 3)$ и имеют ту же направленность, что и теоремы 1 и 2. Они позволяют конструктивно переносить на широкий класс келлеровых отображений два важных принципа, явно обозначившихся в теоремах 1 и 2.

Во-первых, из условия (1.1) вытекает требование обращения в нуль некоторых (четко указываемых) коэффициентов келлерова отображения. Например, в случае (6,3)-отображений многочлен Q_3 можно без ограничения общности считать имеющим вид

$$Q_3 = x^3 + B_{(1,2)}xy^2 + B_{(0,3)}y^3.$$

Из (1.1) тогда следует, что пара коэфициентов $(B_{(1,2)}, B_{(0,3)})$ является нулевой.

Во-вторых, при наличии некоторых ограничений на коэффициенты келлерова отображения (например, условий $B_{(1,2)} = B_{(0,3)} = 0$ для (6,3)-отображений) удается представить это отображение суперпозицией «более простых» отображений.

Ниже показано, что обозначенные принципы имеют более широкую (по сравнению с теоремами 1 и 2) область применимости и интересное взаимное влияние.

Отметим еще, что случаи келлеровых отображений с «некратными» степенями при малых (n,m) легко сводятся (при помощи компьютера) к противоречиям. В соответствии с гипотезой JC так должно быть всегда, а не только в простейших ситуациях.

4. ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ О СУПЕРПОЗИЦИЯХ И О ВЗАИМНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ

Первый из приводимых ниже результатов связан с идеей пошагового построения многослойной суперпозиции «простых» преобразований, представляющей исходное келлерово отображение. Теорема 3 описывает одну из ситуаций, в которых возможно снятие с такого отображения «простого» верхнего слоя.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть n — натуральное число $(n > 3)$; $f = (P,Q)$ — келлерово $(2n,n)$-отображение;*

$$Q = Q(x,y) = Q_n + Q_{n-1} + \ldots + Q_1$$

— разложение компоненты Q этого отображения на однородные составляющие. Пусть при этом выполнены два следующих условия:

а) $Q_n = x^n$;

б) хотя бы один из двух «старших» по y коэффициентов многочлена

$$Q_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} B_{(n-1-k,k)} x^{n-k} y^k,$$

т.е. $B_{(0,n-1)}$ или $B_{(1,n-2)}$ отличен от нуля.

Тогда отображение f является суперпозицией $f = T \circ g$ треугольного преобразования $T = \{x^* = x + h(y),\ y^* = y\}$ и келлерова отображения g степени n.

Замечание 1. Одна из компонент возникающего в теореме 3 отображения g совпадает с исходным многочленом $Q(x,y)$.

Замечание 2. Утверждение теоремы 3 удается получать и при замене условия б) из ее формулировки более слабыми требованиями. Например, если

$$Q_{n-1} = B_{(n-1,0)}x^{n-1} + \\ + B_{(n-2,1)}x^{n-2}y + \ldots + B_{(N,n-1-N)}x^N y^{n-1-N}$$

для некоторого $N < (n+1)/3$, и $B_{(N,n-1-N)} \neq 0$, то теорема 3 остается в силе. При этом ее доказательство сильно усложняется.

Отметим, однако, что ситуация теоремы 3 не вписывается в схему пошагового снятия простых слоев. Объясняет причины этого следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f=(P,Q)$ — келлерово (n,m)-отображение, т. что $1<m\le n$. Если разложение многочлена P на однородные составляющие имеет вид*

$$P=P(x,y)=P_n+P_{n-1}+...+P_1,$$

и при этом $P_n=x^n$, то существует натуральное число $N\in[n/2,n-1]$, т. что компонента P_{n-1} делится нацело на x^N.

Замечание. Теоремой 4 не запрещается, в частности, случай тождественно нулевого многочлена P_{n-1}.

Находясь в условиях теоремы 3, построим соответствующее келлерово отображение $g=(Q,S)$ степени n. Применение к нему теоремы 4 очевидно приводит к противоречию. Это означает, что келлеровых отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 3, не существует.

Для формулировки результата, обобщающего только что рассмотренную ситуацию и являющегося основным в данной работе, напомним одно определение из [2].

Определение 2. Многочлен $P(x,y)$ называется *якобиевой парой* для многочлена $Q(x,y)$, если отображение $f=(P,Q)$ является келлеровым, т.е. удовлетворяет условию (1.1).

ТЕОРЕМА 5. *Если для многочлена $Q(x,y)=Q_n+Q_{n-1}+...+Q_1$, разложенного на однородные составляющие, выполняются два следующих условия:*

а) $Q_n=x^n$;

б) $Q_{n-1}=B_{(n-1,0)}x^{n-1}+B_{(n-2,1)}x^{n-2}y+...+$ $+B_{(N,n-1-N)}x^Ny^{n-1-N}$ для некоторого $N<(n+1)/3$, и $B_{(N,n-1-N)}\ne 0$,

то в интервале степеней $n\le m\le 2n$ многочлен Q не имеет ни одной якобиевой пары.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3

Помимо многочленов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющих степени $2n$ и n соответственно, мы рассмотрим еще многочлен $P^*=Q^2$ степени $2n$. Основная идея доказательства теоремы 3 заключается в установлении сходства старших однородных компонент многочленов P и P^*. Более точно, мы покажем, что после некоторого аффинного преобразования (определяемого в самом начале рассуждений) однородные компоненты P_k и P_k^* совпадают при $n+1\le k\le 2n$.

Тогда суперпозиция $g=(P-Q^2,Q)$ отображения $f=(P,Q)$ с треугольным преобразованием $T^{-1}=\{x^*=x-y^2,y^*=y\}$ (обратным к преобразованию T из формулировки теоремы 3) также является келлеровым отображением. Его степень равна n, а суперпозиция $T\circ g$ совпадает с исходным отображением $f=(P,Q)$.

Для детального изучения структуры компонент P_k келлерова отображения $f=(P,Q)$ рассмотрим систему (2.3). Ее первое (верхнее) уравнение

$$[P_{2n},Q_n]=0. \tag{5.1}$$

перепишется с учетом условия $Q_n=x^n$ в виде $P_{2n}=\alpha_{2n}x^{2n}$.

Здесь α_{2n} — некоторый коэффициент, отличный от нуля, т.к. $P_{2n}\ne 0$. Растяжением многочлена $P(x,y)$ этот коэффициент превращается в единицу, т. что

$$P_{2n}=x^{2n}. \tag{5.2}$$

Все последующие обсуждения проводятся при допущении (5.2), очевидно, не нарушающем общности рассмотрений.

Нам будет удобно далее рассмотреть помимо уравнения (2.2) его модифицированный вариант

$$[P-Q^2,Q]=\delta\ne 0. \tag{5.3}$$

Это уравнение получается за счет вычитания из уравнения (5.1) очевидного тождества $[Q^2,Q]=0$ и использования линейности скобки $[P,Q]=0$ по первому аргументу.

Разность $P-P^*=P-Q^2$ обозначим через $\hat{P}(x,y)$. Степень этого многочлена не превосходит $2n$, а в силу (5.3) имеем для него тождество

$$[\hat{P},Q]=\delta\ne 0. \tag{5.4}$$

Вместо исходной системы (2.3) будем теперь рассматривать такую же систему для уравнения (5.4). Формально это означает, что вместо компонент P_k мы будем теперь обсуждать $\hat{P}_k$. Еще одно отличие двух систем вида (2.3) состоит в том, что

$$\hat{P}_{2n}=0. \tag{5.5}$$

Второе равенство новой системы (2.3), т.е.

$$[\hat{P}_{2n},Q_{n-1}]+[\hat{P}_{2n-1},Q_n]=0$$

несложно переписать с учетом (5.5) в виде

$$\hat{P}_{2n-1}=\alpha_{2n-1}x^{2n-1}, \tag{5.6}$$

где α_{2n-1} — некоторый коэффициент.

Теперь необходимо подставить (5.5) и (5.6) в третье уравнение системы (2.3), т.е. в

$$[\hat{P}_{2n}, Q_{n-2}] + [\hat{P}_{2n-1}, Q_{n-1}] + [\hat{P}_{2n-2}, Q_n] = 0. \quad (5.7)$$

Для удобства записи получающихся здесь и в дальнейшем формул введем дополнительные обозначения.

Во-первых, в разложении произвольной формы от двух переменных будем выделять слагаемое максимально возможной степени по x и «остальную часть» исходной формы. Для обозначения «остальной части» будем использовать знак $\sim$, т. что, например,

$$\begin{aligned} Q_{n-1}(x,y) &= \sum_{k+\ell=n-1} B_{(k,\ell)} x^k y^\ell = \\ &= B_{(n-1,0)} x^{n-1} + \tilde{Q}_{n-1}(x,y). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Во-вторых, возникающие при дифференцировании многочленов положительные числовые коэффициенты (а также произведения и отношения таких коэффициентов) будем обозначать символами λ, нумеруя такие коэффициенты по мере необходимости.

С учетом таких обозначений результат подстановки формул (5.5) и (5.6) в уравнение (5.7) после несложных преобразований можно записать в виде

$$\hat{P}_{2n-2} = \alpha_{2n-2} x^{2n-2} + \lambda_{2n-2} \alpha_{2n-1} x^n \tilde{Q}_{n-1}. \quad (5.9)$$

Теперь для доказательства теоремы 3 потребуется математическая индукция. Полагая $k=1$, уже полученную информацию из трех рассмотренных уравнений системы (2.3) запишем в виде

$$\begin{cases} \hat{P}_{2n} = \ldots = \hat{P}_{2n-(k-1)} = 0, \\ \hat{P}_{2n-k} = \alpha_{2n-k} x^{2n-k}, \\ \hat{P}_{2n-(k+1)} = \alpha_{2n-(k+1)} x^{2n-(k+1)} + \lambda_{2n-(k+1)} \alpha_{2n-k} x^{n-k} \tilde{Q}_{n-1}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Присоединим к этим формулам очередное, $(k+3)$-е, уравнение системы (2.3) (при $k=1$ — четвертое уравнение).

С учетом равенств

$$\hat{P}_{2n} = \ldots = \hat{P}_{2n-(k-1)} = 0$$

из (5.10) это уравнение содержит (вместо, вообще говоря, большой суммы) лишь три слагаемых и имеет вид

$$\begin{aligned} &[\hat{P}_{2n-k}, Q_{n-2}] + [\hat{P}_{2n-(k+1)}, Q_{n-1}] + \\ &+ [\hat{P}_{2n-(k+2)}, Q_n] = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

ЛЕММА 1. Если совокупность условий (5.10)—(5.11) выполняется при некотором k $(1 \le k \le n-1)$, и выражение $x^{-k}\hat{Q}_{n-1}^2$ не является многочленом, то условия (5.9)—(5.10) остаются верными при замене k на $(k+1)$.

Доказательство леммы 1 следует из того, что уравнение (5.11) после подстановки в него формул (5.10) и несложных преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} P_{2n-(k+2)} &= \alpha_{2n-(k+2)} x^{2n-(k+2)} + \\ + \lambda_1 \alpha_{2n-(k+1)} x^{n-(k+1)} \tilde{Q}_{n-1} &+ \alpha_{2n-k} (\lambda_2 x^{n-k} \tilde{Q}_{n-2} + \\ + \lambda_3 B_{(n-1,0)} x^{n-(k+1)} \tilde{Q}_{n-1} &+ \lambda_4 x^{-k} \tilde{Q}_{n-1}^2). \end{aligned} \quad (5.12)$$

В этой формуле все слагаемые, кроме последнего, т.е.

$$\alpha_{2n-k} \lambda_4 x^{-k} \tilde{Q}_{n-1}^2$$

являются многочленами. В итоге (5.12) может иметь смысл только при $\alpha_{2n-k} = 0$. Это и означает возможность сделать переход от k к $(k+1)$, заявленный в лемме 1.

В случае, если у многочлена

$$\tilde{Q}_{n-1} = B_{(n-2,1)} x^{n-2} y^k + \ldots + B_{(0,n-1)} y^{n-1},$$

последний коэффициент, т.е. $B_{(0,n-1)}$ отличен от нуля, рациональная функция

$$\lambda_3 x^{-k} \tilde{Q}_{n-1}^2$$

никогда (ни при каких натуральных k) не является многочленом. В этом случае индукция сразу же приводит к желаемым равенствам

$$\hat{P}_{2n} = \ldots = \hat{P}_{n+1} = 0. \quad (5.13)$$

Если предположить, что $B_{(0,n-1)} = 0$, но $B_{(1,n-2)} \ne 0$, то тот же результат (5.13), получается ценой некоторого усложнения рассуждений.

Теорему 3 считаем доказанной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Если обе компоненты P, Q обсуждаемого отображения $f = (P, Q)$ имеют степень n, то легко проверяется (например, так же, как при доказательстве теоремы 3), что старшая однородная компонента $Q_n(x,y)$ многочлена Q имеет вид βx^n с некоторым коэффициентом β. Рассмотрим тогда вместо f новое келлерово отображение $(P, Q - \beta P)$, сохраняя за ним и его компонентами старые обозначения и учитывая более жесткое ограничение $1 < m < n$ на степень компоненты Q.

Если однородный многочлен P_{n-1} отличен от тождественного нуля, то он допускает разложение вида

$$P_{n-1} = A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} y + \ldots + A_N x^N y^{n-1-N}. \quad (5.14)$$

с ненулевым коэффициентом A_N при некотором натуральном $N \in [0, n-1]$. Наша задача — доказать, что N не может быть «малым» числом. Мы предположим здесь, что

$$N < \min\{n/2, n-1\} \qquad (5.15)$$

и получим противоречие этому допущению. Основывается противоречие на том, что в разложении некоторого **нулевого** многочлена от двух переменных x, y обнаруживается моном с ненулевым коэффициентом.

Итак, воспользуемся разложением на однородные составляющие многочлена

$$Q = Q_m + Q_{k-1} + \ldots + Q_1, \ (Q_m \neq 0)$$

и основной системой уравнений (2.3). Рассмотрим три первых уравнения этой системы.

В случае $m > 2$ они имеют вид

$$[P_n, Q_m] = 0, \qquad (5.16)$$

$$[P_n, Q_{m-1}] + [P_{n-1}, Q_m] = 0, \qquad (5.17)$$

$$[P_n, Q_{m-2}] + [P_{n-1}, Q_{m-1}] + [P_{n-2}, Q_m] = 0; \qquad (5.18)$$

при $m = 2$ в уравнении (5.18) этой системы отсутствует первая скобка, а остальные слагаемые всех трех уравнений сохраняются.

Так как $P_n = x^n$, то из уравнения (5.16) получаем

$$Q_m = \beta_m x^m. \qquad (5.19)$$

При этом в силу неравенства $Q_m \neq 0$ коэфициент β_m здесь отличен от нуля.

Подставляя формулу (5.19) в уравнение (5.17), получим

$$nx^{n-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial y} = kx^{m-1}\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y}. \qquad (5.20)$$

Отсюда следует, что

$$Q_{m-1} = \beta_{m-1}x^{m-1} + \lambda\frac{1}{x^{(n-m)}}\tilde{P}_{n-1} \qquad (5.21)$$

для некоторых положительного λ и комплексного β_{m-1}.

Заметим, что из (5.21) следует неравенство $N \geq n - m > 0$, т.к. при $N < n - m$ рациональная функция

$$\frac{1}{x^{(n-m)}}\tilde{P}_{n-1}$$

не может быть равна разности двух многочленов Q_{m-1} и $\beta_{m-1}x^{m-1}$.

Уточнение оценки на N требует дальнейших рассмотрений, связанных с уравнением (5.18), т.е. с

$$[P_n, Q_{m-2}] + [P_{n-1}, Q_{m-1}] + {}$$
$$+ [P_{n-2}, Q_m] = 0, \ (m > 2)$$

или

$$[P_{n-1}, Q_{m-1}] + [P_{n-2}, Q_m] = 0, \ (m = 2). \qquad (5.22)$$

В этих уравнениях нас интересуют слагаемые с минимальными степенями по переменной x. Например, легко видеть, что первая скобка в (5.18) делится не менее чем на x^{n-1}, а третья скобка из того же уравнения содержит множителем x^{m-1}. В то же время формулы (5.19) и (5.20) позволяют вычислить слагаемое самой младшей по x степени, содержащееся в скобке $[P_{n-1}, Q_{m-1}]$.

Имеем в силу (5.20) и (5.15):

$$P_{n-1} = A_N x^N y^{n-1-N} + x^{N+1}S(x,y) \qquad (5.23)$$

для некоторого многочлена $S(x,y)$. А из (5.21) и (5.15) следует, что

$$Q_{m-1} = \lambda A_N x^{N-n+m}y^{n-1-N} + x^{(N+1)-(n-m)}T(x,y) \qquad (5.24)$$

для некоторого многочлена $T(x,y)$.

Несложно проверяется справедливость следующего утверждения

ЛЕММА 2. Если

$$P = x^\alpha y^\gamma + x^{\alpha+1}S(x,y),$$
$$Q = x^\beta y^\delta + x^{\beta+1}T(x,y),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in N$, $S(x,y)$, $T(x,y)$ — многочлены, то

$$[P,Q] = (\alpha\delta - \beta\gamma)x^{\alpha+\beta-1}y^{\gamma+\delta-1} + x^{\alpha+\beta}W(x,y),$$

где $W(x,y)$ — некоторый многочлен.

Применяя лемму 2 к формулам (5.23) и (5.24), получаем:

$$[P_{n-1}, Q_{m-1}] = x^{N+(N-n+m)}S(x,y) +$$
$$+\lambda A_N^2(N(n-1-N) - (N-n+m)\times$$
$$\times(n-1-N))x^{(2N-n+m)-1}y^{2(n-N)-3} =$$
$$= \lambda A_N^2(n-1-N)(n-m)x^{(2N-n+m)-1}\times$$
$$\times y^{2(n-1-N)-1} + x^{(2N-n+m)}W(x,y),$$

где $W(x,y)$ — некоторый многочлен.

В силу неравенств $\lambda > 0$, $A_N \neq 0$, $N < n-1$, $m < n$ это означает, что скобка $[P_{n-1}, Q_{m-1}]$, являющаяся вторым слагаемым в формуле (5.18) (соответственно, первым слагаемым в формуле (5.22)), содержит моном $x^{2N-n+m-1}y^{2(n-1-N)-1}$ с ненулевым коэффициентом. В то же время при условии $N < n/2$ выполняется неравенство

$$(2N - n + m) - 1 < (m-1), \qquad (5.25)$$

которое означает, что степени по x всех остальных слагаемых, входящих в уравнение (5.18), оказываются строго большими, чем $(2N - n + m) - 1$.

То же неравенство (5.25) позволяет сделать аналогичный вывод о противоречивости уравнения (5.22) при $m = 2$.

Теорема 4 доказана.

Теперь докажем на основе теорем 3 и 4 последнее утверждение статьи, т.е. теорему 5. Предположим от противного, что существует келлерово отображение $f = (P, Q)$, у которого младшая компонента $Q(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 5 (это означает, в частности, что она имеет степень n, причем $Q_n = x^n$). Степень многочлена $P(x, y)$ при этом предполагается расположенной в промежутке $n \le \deg P \le 2n$.

Рассмотрим суперпозицию $\tilde{f} = T \circ f$ отображения f и треугольного преобразования $T = \{x^* = x + y^2,\ y^* = y\}$. Эта суперпозиция, очевидно, также является келлеровым отображением. При этом $\deg(\tilde{P}) = \deg(P + Q^2) \le 2n$, что дает возможность считать отображение $\tilde{f} = (\tilde{P}, Q)$ келлеровым $(2n, n)$-отображением.

Применяя к нему теорему 3, получаем вывод о представлении $\tilde{f}$ в виде суперпозиции T и некоторого келлерова отображения степени, не превышающей n. Это означает, что $\tilde{P} = P^* + Q^2$ для некоторого многочлена $P^*(x, y)$, степень которого не превышает n.

Следовательно, исходный многочлен $P(x, y) = P^*(x, y)$ может иметь степень, лишь в точности равную n. Тогда исходное келлерово отображение $f = (P, Q)$ является (n, n)-отображением, а отображение $g = (Q, P)$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Поэтому компонента Q_{n-1} этого отображения должна содержать в виде множителя «достаточно большую» степень переменной x. Это противоречит условию б) теоремы 5. Тем самым, теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Keller O.-H.* Ganze Cremona-Transformationen / O.-H. Keller // Monatsh. Math. Phys. — 1939. Vol. 47. — S. 299—306.

2. *Essen A.* Polynomial automorphisms and the jacobian conjecture: Progress in Mathematics Vol. 190 / A. Essen. — Basel, Berlin, Boston: Birkhauser Verlag, 2000. — 329 p.

3. *Кострикин А.И.* Основы алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 1994. — 320 с.

4. *Moh T.T.* On the Global Jacobian Conjecture and the configurations of roots / T. T. Moh // Journal fur die Reine Angew. Math. — 1983. — Bd. 340. S. 140—212.

5. *Heitmann R.C.* On the Jacobian Conjecture / R. C. Heitmann // J. Pure Appl. Algebra. — 1990.— Vol. 64, № 1. — P. 35—72.

6. *Лобода А.В.* Коэффициентный подход к некоторым задачам многомерного комплексного анализа / А. В. Лобода // Черноземный альманах научных исследований. Серия: «Фундаментальная математика». Воронеж. 2005. – № 1(1). — С. 99—112.

7. *Newberger J.W.* The divergence-free Jacobian conjecture in dimension two / J. W. Newberger // Rocky Mount. J. Math. — 2006. — Vol. 36, № 1. — P. 265—271.

8. *Атанов А.В.* Алгоритмический подход к изучению келлеровых отображений / А. В. Атанов, А. В. Лобода // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы, Воронеж: Воронежский государственный университет, 2007. — С. 15—16.

9. *Атанов А.В.* О соотношениях на коэффициенты келлеровых отображений / А. В. Атанов, А. В. Лобода // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2008: тез. докладов, Воронеж: Воронежский государственный университет, 2008. — С. 10—11.

Атанов Артем Викторович — магистрант математического факультета ВГУ, тел. 42-18-14, e-mail: aatanov@mail.ru

Лобода Александр Васильевич — д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики ВГАСУ, профессор кафедры математического моделирования ВГУ, тел. 71-53-62, 208-364, e-mail: lobvgasu@yandex.ru

Atanov Artyom V. — undergraduate, department of mathematics of Voronezh State University; tel.: (4732)421-814, e-mail: aatanov@mail.ru

Loboda Alexandr V. — professor, chair of higher mathematics of Voronezh State architecturally-building university, tel.: (4732)715-362, 208-364, 781-028, email: lobvgasu@yandex.ru