УДК 517.54

О ЛИНЕЙНОМ РАЗДЕЛЕННО-РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ

Э. Г. Кирьяцкий

Вильнюсский технический университет

Поступила в редакцию 20.08.2008 г.

Аннотация. В данной работе исследуется уравнение, которое тесно связано с разделенными разностями. Изучаются свойства такого уравнения и дается его общее решение.

Ключевые слова: Аналитическая функция. Линейный оператор. Линейное уравнение. Разделенная разность n-го порядка.

Abstract. In the given work the equation closely connected with divided differences is investigated. Properties of such equation are studied and its general solution.

Key words: Analytical function, the linear operator, the linear equation, the divided differences.

ВВЕДЕНИЕ

Линейное разностное уравнение с постоянными комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ можно записать в следующем виде:

$$a_0 w(z) + \sum_{m=1}^{n} a_m w(z + \zeta_1 + \ldots + \zeta_m) = u(z).$$

Здесь $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — фиксированные параметры (шаги), $u(z)$ — заданная функция, $w(z)$ — искомая функция. Разностные уравнения являются наиболее простыми представителями функциональных уравнений. Имеется обширная литература, посвященная линейным уравнениям в конечных разностях (см. [1], [2], [3]).

В данной работе изучается введенное автором уравнение в разделенных разностях

$$a_0 w(z) + \sum_{m=1}^{n} a_m \left[w(z); z, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \right] = u(z), \quad a_n \neq 0,\ n \geq 1. \tag{1}$$

Здесь $u(z)$ — заданная аналитическая в некоторой области G функция, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — фиксированные комплексные коэффициенты, $\left[w(z); z, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \right]$ — разделенная разность m-го порядка аналитической в области G функции $w(z)$, определяемая контурным интегралом (см. [3], [4])

$$\left[w(z); z_0, \ldots, z_m \right] = \frac{1}{2\pi \ i} \int_{\Gamma} \frac{w(\xi)\, d\xi}{(z - \zeta_1) \ldots (z - \zeta_m)},$$

где Γ — простой замкнутый контур, лежащий в области G и охватывающий все параметры $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$. Конечно, имеются и другие формулы, которые могут быть определениями разделенной разности (см. [3]). Разыскиваются аналитические в области G функции $w(z)$, удовлетворяющие уравнению (1). Очевидно, оператор

$$L_n\left(w(z)\right) = a_0 w(z) + \sum_{m=1}^{n} a_m \left[w(z); z, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \right]$$

является линейным. Уравнение (1) автор называет линейным разделенно-разностным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами. Если $u(z) \equiv 0$, то уравнение (1) превращается в линейное однородное разделено-разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

В данной работе дается общее решение уравнения (1). Справедлива

Теорема 1. *Общее решение линейного разделено-разностного уравнения* (1) *имеет вид*

$$w(z) = \frac{P(z) + (z - \zeta_1) \ldots (z - \zeta_n)\, u(z)}{a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z - \zeta_{k+1}) \ldots (z - \zeta_n)}, \tag{2}$$

где

$$g(z) = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z - \zeta_{k+1}) \ldots (z - \zeta_n),$$

$$g(\zeta_k) \neq 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Здесь $P(z)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$.

П. 1. Для доказательства нам понадобятся леммы. Для краткости обозначим через $D_t^{(p)}$ частную производную p-го порядка по t.

Лемма 1. *При любых целых $k \geq 1$, $m \geq 0$ справедлива формула*

$$\left[\frac{1}{(t-z)^k};\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_m\right]=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}D_t^{(k-1)}\prod_{l=0}^{m}\frac{1}{t-\zeta_l}.$$

Доказательство. Отметим сначала, что при любых целых $k\ge 1$, $m\ge 0$ имеет место формула

$$\left[\frac{1}{(t-z)^k};\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_m\right]=\sum\prod_{l=0}^{m}\frac{1}{(t-\zeta_l)^{\alpha_l+1}},$$

где сумма распространена на все неотрицательные числа $\alpha_0,\ldots,\alpha_m$, для которых $\alpha_0+\ldots+\alpha_m=k-1$ ([5]). Далее,

$$\sum\prod_{l=0}^{m}\frac{1}{(t-\zeta_l)^{\alpha_l+1}}=$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\sum\frac{(k-1)!}{\alpha_0!\ldots\alpha_m!}\prod_{l=0}^{m}D_t^{(\alpha_l)}\frac{1}{t-\zeta_l}.$$

Используя формулу для производной $(k-1)$-го порядка от произведения $m+1$ сомножителей (см. [6]), получим

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\sum\frac{(k-1)!}{\alpha_0!\ldots\alpha_m!}\prod_{l=0}^{m}D_t^{(\alpha_l)}\frac{1}{t-\zeta_l}=$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}D_t^{(k-1)}\prod_{l=0}^{m}\frac{1}{t-\zeta_l},$$

что и доказывает лемму 1.

Введем следующие обозначения:

$$P_m(t)=\prod_{l=1}^{m}(t-\zeta_l),\ \ m\ge 1,\ \ P_0(t)\equiv 1, \qquad (3)$$

$$R_n(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{P_m(t)}, \qquad (4)$$

$$H_{n,s,k}(t)=\frac{(-1)^{k-1-s}}{(k-1-s)!}D_t^{(k-1-s)}R_n(t). \qquad (5)$$

Лемма 2. *При любом* ξ, *отличном от* $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$, *справедлива формула*

$$L_n\left(\frac{1}{(\xi-z)^k}\right)=\sum_{s=0}^{k-1}H_{n,s,k}(\xi)\frac{1}{(\xi-z)^{s+1}}. \qquad (6)$$

Доказательство. Найдем по формуле Лейбница производную $(k-1)$-го порядка по t от произведения $(t-z)^{-1}P_m^{-1}(t)$ и затем положим $t=\xi$. Тогда получим

$$D_t^{(k-1)}\frac{1}{(\xi-z)P_m(\xi)}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\frac{(k-1)\ !}{(k-1-s)\ !}(\xi-z)^{-s-1}D_t^{(k-1-s)}\frac{1}{P_m(t)}.$$

Теперь, согласно лемме 1, имеем

$$L_n\left(\frac{1}{(\xi-z)^k}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1-s}}{(k-1-s)\ \ !}\frac{1}{(t-z)^{s+1}}D_t^{(m-1-s)}\frac{a_m}{P_m(\xi)}.$$

Учитывая (3), (4), (5), приходим к формуле (6).

Лемма 3. *Пусть* m *— натуральное число. Для того чтобы функция* $(\xi-z)^{-m}$ *удовлетворяла разделенно-разностному уравнению* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* ξ *было нулем функции* $R_n(t)$ *кратности* $k\ge m$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $L_n\left((\xi-z)^{-m}\right)=0$. Это означает, что

$$\sum_{s=0}^{m-1}\frac{H_{n,s,m}(\xi)}{(\xi-z)^{s+1}}\equiv 0.$$

Так как функции $(\xi-z)^{-1},\ldots,(\xi-z)^{-m}$ линейно независимы, то

$$H_{n,s,m}(\xi)=0,\ \ s=0,\ldots,(m-1).$$

Из формулы (5) при $t=\xi$ следуют равенства

$$D_t^{(m-1-s)}R_n(\xi)=0,\ \ s=0,\ldots,(m-1).$$

Значит, ξ есть нуль функции $R_n(t)$ кратности не меньше m.

Достаточность. При $1\le m\le k$ имеем

$$L_n\left(\frac{1}{(\xi-z)^{s+1}}\right)=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{H_{n,s,m}(\xi)}{(\xi-z)^{s+1}}.$$

Так как $0\le m-1-s\le m-1\le k-1$, то при $t=\xi$ имеем $D_t^{(m-1-s)}R_n(\xi)=0$ и поэтому $H_{n,s,m}(\xi)=0$, $s=0,\ldots,(m-1)$. Отсюда $L_n((\xi-z)^{-m})=0$.

Лемма 4. *Если* $a_0=\ldots=a_{k-1}=0$ *и* $a_k\ne 0$, *то функции* $1,z,\ldots,z^{k-1}$ *являются частными решениями уравнения* (1).

Доказательство. Для любого j из промежутка $0\le j<m$ и любых $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_m$ справедливо (см. [3]) равенство $\left[z^j;\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_m\right]=0$. Следовательно, при любом z получим

$$L_n\left(z^j\right)=\sum_{m=k}^{n}a_m\left[z^j;z,\zeta_1,\ldots,\zeta_m\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть*

$$g(z)=a_n+\sum_{m=0}^{n-1}a_m(z-\zeta_{m+1})\ldots(z-\zeta_n),\qquad (7)$$
$$g(z)\ne 0,\ \ \forall z\in G.$$

Если функция $w_0(z)$ *удовлетворяет уравнению* (1), *то она может быть представлена в виде*

$$w_0(z)=\frac{1}{g(z)}\Big((z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_n)u(z)+ \\ +\sum_{m=1}^{n}a_mT_m(z)(z-\zeta_{m+1})\dots(z-\zeta_n)\Big), \quad (8)$$

где $T_1(z)\equiv w_0(\zeta_1)$ и

$$T_m(z)=w_0(\zeta_1)+ \\ +\sum_{l=1}^{m}\left[w_0(z);\zeta_1,\dots,\zeta_l\right](z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_{l-1}),\ m>1. \quad (9)$$

Доказательство. Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона (см. [3], [4])

$$w_0(z)=T_m(z)+\left[w_0(z);z,\zeta_1,\dots,\zeta_m\right]\times \\ \times(z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_{m-1})(z-\zeta_m),$$

где $T_m(z)$, заданный формулой (9) многочлен, является интерполяционным многочленом степени не выше $m-1$ для функции $w_0(z)$. Отсюда следует выражение для разделенной разности m-го порядка:

$$\left[w_0(z);z,\zeta_1,\dots,\zeta_m\right]=\frac{w_0(z)-T_m(z)}{(z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_m)}. \quad (10)$$

С помощью (10) равенство $L_n(w_0(z))=u(z)$ перепишется так:

$$a_0w_0(z)+\sum_{m=1}^{n}a_m\frac{w_0(z)-T_m(z)}{(z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_m)}=u(z). \quad (11)$$

Решая (11) относительно $w_0(z)$, получим (8).

П. 2. Переходим к доказательству теоремы 1. Пусть $P(z)$ — произвольно взятый многочлен степени не выше $n-1$. Представим функцию

$$w(z)=\frac{P(z)+(z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_n)u(z)}{g(z)}, \quad (12)$$

предлагаемую в качестве решения уравнения (1), в виде суммы двух функций, т.е. в виде $w(z)=w_1(z)+w_2(z)$, где

$$w_1(z)=\frac{P(z)}{g(z)},$$

$$w_2(z)=\frac{(z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_n)u(z)}{g(z)}.$$

Покажем, что

$$L_n(w_1(z))=0. \quad (13)$$

В самом деле, если $t_1,\dots,t_m$ — корни многочлена $g(z)$ с кратностями соответственно $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ и α_k — первый (считая слева направо) из коэффициентов $a_0,a_1,\dots,a_n$, не равный нулю, то рациональную функцию $w_1(z)$ можно записать в виде

$$w_1(z)=S_{k-1}(z)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{c_{i,j}}{(t_i-z)^j},$$

$c_{i,j}$ — некоторые комплексные числа, а $S_{k-1}(z)$ — многочлен степени $k-1$ и положено $S_{-1}(z)\equiv 0$. Пользуясь линейными свойствами оператора L_n и леммой 3, получим

$$L_n(S_{k-1}(z))=\sum_{m=k}^{n}a_m\left[S_{k-1}(z);z,\zeta_1,\dots,\zeta_m\right]=0. \quad (14)$$

Далее, пользуясь (4), нетрудно установить формулу

$$R_n(t)=\frac{g(t)}{P_n(t)},$$

где $g(t)$ и $P_n(t)$ заданы формулами (3) и (7). Из этой формулы следует, что функция $R_n(t)$ и многочлен $g(t)$ имеет корни $t_1,\dots,t_m$ с кратностями $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ соответственно, причем $\alpha_1\ge j,\dots,\alpha_m\ge j$. Применяя лемму 4, получим

$$L_n\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{c_{i,j}}{(t_i-z)^j}\right)= \\ =\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\alpha_i}c_{i,j}L_n\left(\frac{1}{(t_i-z)^j}\right)=0. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует (13). Покажем теперь, что

$$L_n(w_2(z))=u(z). \quad (16)$$

Действительно, формула (10) дает (см. [8])

$$\left[w_2(z);z,\zeta_1,\dots,\zeta_m\right]= \\ =\frac{u(z)(z-\zeta_{m+1})\dots(z-\zeta_n)}{g(z)}.$$

Отсюда

$$L_n(w_2(z))=\frac{a_0}{g(z)}u(z)(z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_n)+ \\ +\sum_{m=1}^{n}\frac{a_k}{g(z)}u(z)(z-\zeta_{m+1})\dots(z-\zeta_n)= \\ =\frac{u(z)}{g(z)}\Big(a_0(z-\zeta_1)\dots(z-\zeta_n)+ \\ +\sum_{m=1}^{n}a_m(z-\zeta_{m+1})\dots(z-\zeta_n)\Big)=u(z),$$

так как многочлен, расположенный в скобках, совпадает с многочленом $g(z)$. Таким образом, равенство (16) доказано.

Теперь, пользуясь линейностью оператора L_n, имеем

$$L_n\left(w(z)\right) = L_n\left(w_1(z) + w_2(z)\right) = \\ = L_n\left(w_1(z)\right) + L_n\left(w_2(z)\right) = u(z).$$

Значит, любая функция $w(z)$ вида (12) является решением уравнения (1).

Опираясь на лемму 3, заключаем, что никаких других решений, отличных от решений вида (2), уравнение (1) не имеет.

П. 3. Приведем несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *Общее решение линейного однородного разделено-разностного уравнения*

$$L_n\left(w(z)\right) = 0$$

имеет вид

$$w(z) = \frac{P(z)}{g(z)},$$

где $P(z)$ *— произвольный многочлен степени не выше* $n-1$.

Следствие 2. *Пусть* $N(z)$ *— многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Пусть также* $N(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. *Тогда для любого многочлена* $M(z)$ *степени не выше* $n-1$ *и взаимно простого с многочленом* $N(z)$, *рациональная функция* $R(z) = M(z)/N(z)$ *является решением однородного уравнения*

$$w(z) + \sum_{m=1}^{n} a_m\left[w(z); z, \zeta_1, \ldots, \zeta_m\right] = 0, \quad (17)$$

где

$$a_m = \left[N(z); \zeta_m, \ldots, \zeta_n\right], \; m = 1, \ldots, n. \quad (18)$$

Кроме того, рациональную функцию можно представить в виде

$$R(z) = \frac{1}{g(z)} \times \\ \times\left(\sum_{m=1}^{n-1} a_m T_m(z)\left(z-\zeta_n\right)\ldots\left(z-\zeta_n\right) + a_n T_n(z)\right), \quad (19)$$

где

$$T_m(z) = \\ = \sum_{j=1}^{m}\left[R(z); \zeta_1, \ldots, \zeta_j\right]\left(z-\zeta_1\right)\ldots\left(z-\zeta_{j-1}\right).$$

Доказательство. Многочлен $N(z)$ можно разложить в ряд Ньютона (см. [4], [8]), следующим образом:

$$N(z) = \left(z-\zeta_1\right)\ldots\left(z-\zeta_n\right) + \\ + a_1\left(z-\zeta_2\right)\ldots\left(z-\zeta_n\right) + a_{n-1}\left(z-\zeta_n\right) + a_n,$$

где для коэффициентов a_m, $m = 1, \ldots, n$ справедлива формула (18). По следствию 1 рациональная функция $R(z) = M(z)/N(z)$ будет частным решением уравнения (17) и по лемме 5 должна иметь вид (19).

Следствие 3. *В множестве решений уравнения (1) существует единственная функция* $w = w(z)$, *которая в s попарно различных точках* $z_1, \ldots, z_s$ *принимает вместе со своими производными порядка h данные значения* $w_k^{(h)}$ *согласно условиям*

$$w^{(h)}\left(z_k\right) = w_k^{(h)}, \; k = 1, \ldots, s, \\ h = 0, 1, \ldots, \left(\alpha_k - 1\right), \; \alpha_1 + \ldots + \alpha_s = n.$$

Доказательство. Всякое решение уравнения (1) имеет вид (2). Следовательно, отыскание функции $w = w(z)$, удовлетворяющей указанным выше условиям, сводится к нахождению интерполяционного многочлена $P(z)$ степени не выше $n-1$ при кратном интерполировании. Такой многочлен, как известно, существует и единственный (см. [7], [8]).

Следствие 4. *Общее решение уравнения*

$$\left[w(z); z, \zeta_1, \ldots, \zeta_k\right] = u(z)$$

имеет вид

$$w(z) = P(z) + u(z)\left(z-\zeta_1\right)\ldots\left(z-\zeta_k\right),$$

где $P(z)$ *— произвольный многочлен степени не выше* $k-1$.

Следствие 5. *Функция*

$$w(z) = \frac{P(z)}{g(z) - P_n(z)}$$

является неподвижной точкой оператора L_n, *т. е.* $L_n(w) = w$, *где* $P(z)$ *— произвольный многочлен степени не выше* $n-1$, *а* $P_n(z)$ *и* $g(z)$ *заданы соответственно формулами 3 и 7.*

Следствие 6. *Общее решение уравнения*

$$a_0 w(z) + \sum_{m=1}^{n} a_m\left[w(z); z, \underbrace{\zeta, \ldots \zeta}_{n}\right] = u(z), \\ a_n \neq 0, \; n \geq 1,$$

имеет вид

$$w(z) = \frac{P(z) + (z-\zeta)^n u(z)}{a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z-\zeta)^{n-k}}.$$

Замечание 1. До сих пор мы предполагали, что $g\left(\zeta_k\right) \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$. В случае, если число ζ_k является корнем полинома $g(z)$ кратности m, то многочлен $P(z)$ в (2) следует выбирать таким, чтобы дробь (2) была сократимой на $\left(z-\zeta_k\right)^m$. В противном случае функция (2) будет иметь полюс в точке ζ_k, а для таких функций оператор L_n не определен.

Замечание 2. Если не требовать дифференцируемости функции $u(z)$, то следствие 3 перефразируется следующим образом: в множестве решений уравнения (1) существует единственная функция $w = w(z)$, которая в n различных точках $z_1, \ldots, z_n$ принимает данные значения $w_1, \ldots, w_n$, т. е. $w_1(z_k) = w_k$, $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, здесь мы ограничиваемся лишь случаем простого интерполирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миролюбов А.А., Солдатов М.А.* Линейные однородные разностные уравнения. // Изд-во «Наука», Москва, 1981, С. 1—304.

2. *Миролюбов А.А., Солдатов М.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. // Изд-во «Наука», Москва, 1986, С. 1—126.

3. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. // Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1952, С. 15—27.

4. *Ибрагимов И.И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. // Изд-во «Наука», Москва, 1971, С. 1—519.

5. *Гопенгауз Б.Е.* О некоторых классах аналитических функций. // Труды Томского университета, 1969.

6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. // Гостехиздат, I, 1951, С. 274.

7. *Смирнов В.И., Лебедев Н.А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. // Изд-во «Наука», Москва—Ленинград, 1964, С. 12—14.

8. *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. // Изд-во иностранной литературы, Москва, 1961, С. 1—508.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, чл.-кор. IEAS. Вильнюсский технический университет, тел.: +370-5-272-84-95, e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Kiryatzkii Eduard G. — professor of Vilnyus Technical University in Litva, tel.: 37052728495, email: eduard.kiriyatzkii@takas.lt