

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Н. Д. Вервейко*, П. П. Сумец**

*Воронежский государственный университет

**Воронежский военный авиационный инженерный университет

Поступила в редакцию 08.07.2008 г.

Аннотация. В работе построена модель сверхзвукового течения газа с микровключениями. Особое внимание уделено влиянию микроструктуры на характер изменения газодинамических параметров. Построенная модель также позволяет изучать процесс течения газа в масштабах, сравнимых с шириной переходной зоны фронта ударной волны. Получены зависимости, описывающие распределение параметров газа в переходной зоне фронта ударной волны, а также в пограничном слое на выпуклой поверхности.

Ключевые слова: микроструктура, математическая модель, ударная волна.

Abstract. It is constructed the model of shock wave flow of gas with microstructure. Especially it was studied the influence microstructure on changing of flow parameters. Model also allows to study the process of flow in scales, comparable to width of shock wave zone. It is obtained the dependencies, describing sharing the parameters of gas in zone of front shock wave, as well as in border layer on protuberant surface.

The keywords: microstructure, mathematical model, shock wave.

ВВЕДЕНИЕ

Трансзвуковые и гиперзвуковые течения газа обладают существенными особенностями, связанными с наличием ударных волн и волн разрежения, которые сопровождаются разрывами или большими градиентами давления, плотности и скорости течения. При этом области до и сверхзвукового течения разделены достаточно тонкими зонами, при переходе через которые имеет место быстрое изменение параметров течения газа.

Математическая модель идеального газа связывает эти тонкие зоны существенного изменения параметров течения с поверхностями ударных волн, при переходе через которые происходит скачек величин. Так что представление ударных волн в виде поверхностей есть факт математической идеализации. Однако, с физической точки зрения, быстрое изменение параметров среды происходит непрерывно внутри переходной зоны, толщина которой тем меньше, чем больше величина изменения параметров газа.

При рассмотрении областей течения газа, сравнимых с толщиной переходной зоны, а также при учете микроструктуры газа, необходимо учитывать характерный размер микро-

структуры. С математической точки зрения, модель течения такого газа должна учитывать параметр, характеризующий конечный характерный (представительный) элементарный объем. Рассмотрим построение такой модели.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЗА С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ

Классическая модель течения идеального газа представляет собой систему уравнений в частных производных для скорости V , давления P , плотности ρ — это уравнения движения [1]

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

состояния (для примера — уравнение изоэнтропического поведения)

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \text{const}. \quad (3)$$

Классические уравнения (1)–(3) локальны, т. е. они не содержат характерного масштаба, присущего данной системе и, следовательно, справедливы для любой ее части, какой бы малой она ни была. Это есть следствие того, что

уравнения (1)–(3) получены из интегральных законов сохранения при стремлении объема интегрирования к нулю. С физической точки зрения такая процедура некорректна, так как среда состоит из микрообъектов (атомов, молекул, кластеров и т.д.), которые обладают качественно новыми свойствами [2]. Однако, если характерный макромасштаб рассматриваемого процесса L много больше характерного масштаба микроструктуры среды h , то такой процесс локален и подчиняется уравнениям (1)–(3).

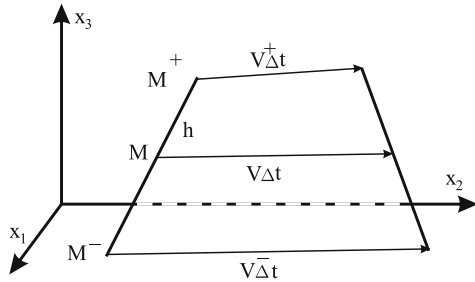


Рис. 1. Схематическое изображение материального отрезка длиной $2h$, который за время Δt перемещается в поле скоростей

Для учета конечного элементарного объема газа рассмотрим изменение относительной длины материального отрезка длиной $2h$ (h — мало). Обозначим через λ скорость относительного удлинения

$$\lambda = \frac{|M^- M'^+|^2 - |M^- M^+|^2}{|M^- M^+|^2 \Delta t}. \quad (4)$$

Обозначим через l единичный вектор вдоль исследуемого отрезка $|M^- M^+|$. Координаты точки M обозначим через x_i , $i = 1, 2, 3$, а координаты точек M^- и M^+ будут соответственно $(x_i - hl_i)$ и $(x_i + hl_i)$, где l_i — проекция единичного вектора l на оси координат x_1, x_2, x_3 . Разлагая в ряд Тейлора представление скорости в точках M^- и M^+ через ее значения в срединной точке M , представим скорость относительного удлинения λ с учетом h^2 в виде [3]

$$\frac{1}{2} \lambda = \sum_{i,j=1}^3 \left(\varepsilon_{ij}^c + \frac{1}{6} h^2 \sum_{k,p=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_p} \varepsilon_{ij}^c l_k l_p \right) l_i l_j. \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_{i,j}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — скорость деформации по Коши.

Из (5) следует, что кинематика сплошной среды с учетом характерных размеров h^2 представительного элемента определяется тензором скоростей деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ijkp}^h l_k l_p, \quad (6)$$

где $\varepsilon_{ijkp}^h = \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^c}{\partial x_k \partial x_p}$.

Для случая идеального газа без учета влияния недиагональных членов важным представляется только 1-й инвариант, характеризующий скорость объемного деформирования

$$\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^c + \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}^c}{\partial x_p \partial x_p}. \quad (7)$$

Принимая во внимание вышесказанное, математическая модель пространственного движения газа с учетом характерного размера h его микроструктуры имеет вид

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right) = 0, \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}. \end{cases} \quad (8)$$

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗЕ С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ

Система уравнений (8) содержит малый параметр h , который стоит перед старшей производной по координатам. Такая система называется сингулярно возмущенной. Это связано с тем, что при предельном переходе $h \rightarrow 0$ порядок уравнений падает с третьего до первого, и мы получаем классические уравнения газовой динамики (1)–(3), для которых невозможно выполнение граничных условий, поставленных для системы (8) уравнений в частных производных третьего порядка.

Для рассмотрения структуры ударных волн введем в рассмотрение подвижную криволинейную систему координат (n, y_1, y_2, t) , распространяющуюся со скоростью G ударных волн и совпадающую с поверхностью Γ переднего фронта ударной волны (рис. 1).

Здесь n — расстояние по нормали, а (y_1, y_2) — поверхностные координаты вдоль поверхности Γ переднего фронта. Для того чтобы рассмотреть поведение параметров газа в переходном слое ударной волны, осуществим растяжение

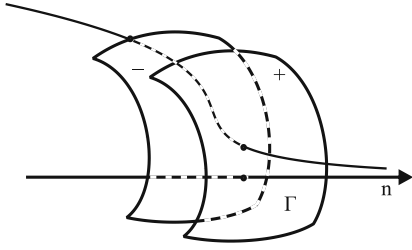


Рис. 2. Изображение узкой зоны, поперек которой газодинамические параметры меняются сильно

координаты вдоль нормали n в $(1/h)$ раз. Произведем замену координат (n, y_1, y_2, t) на (η, y_1, y_2, t) , где $\eta = n/h$. Осуществляя указанные выше замены, при $h \rightarrow 0$ получаем для нормальной к Γ компоненты скорости v , плотности ρ и давления p систему уравнений

$$\begin{cases} \rho(G-v) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta}, \\ -G \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho v) + \frac{\rho}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} = 0, \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}. \end{cases} \quad (9)$$

Исключим давление в уравнениях (9)

$$\begin{cases} \rho(G-v)v' = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} \rho', \\ (v-G)\rho' + v'\rho + \frac{1}{6} \rho v''' = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Интегрирование первого уравнения системы (10) дает

$$(2\bar{G} - \bar{v} - 1)(\bar{v} - 1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} D(\bar{\rho}^{\gamma-1} - 1), \quad (11)$$

где

$$\bar{G} = \frac{G}{v_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \\ D = \frac{2p_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad v_0 = v \text{ при } \eta = 0.$$

Решение (11) для первого уравнения (10) в переходном слое позволяет выразить плотность через скорость и привести систему (10) к одной неизвестной функции — скорости. Из (10) и (11) получаем

$$\bar{v}''' + 6\bar{v}' - \frac{12(\bar{G} - \bar{v})^2}{\gamma D + (\gamma - 1)(\bar{v} - 1)(2\bar{G} - \bar{v} - 1)} \bar{v}' = 0. \quad (12)$$

Введем замену $U = \bar{G} - \bar{v}$, тогда уравнение для превышения (понижения) скорости v над G имеет вид

$$U''' + 6U' - \frac{12U^2 U'}{(\gamma - 1)(b^2 - U^2)} = 0, \quad (13) \\ b^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} D + (\bar{G} - 1)^2 > 0.$$

Проинтегрировав выражение (13) по η получим

$$U'' + 6U - \frac{12}{(\gamma - 1)} \int \frac{U^2 dU}{b^2 - U^2} = C_0. \quad (14)$$

Выясним физический смысл величины b . Разность $(G - 1)^2$ есть скорость фронта относительно потока перед ним, а величина

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} D = \frac{2\gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho_0} \cdot \frac{1}{v_0^2} = \left(\frac{v_{\max}}{v_0} \right)^2 = \bar{v}_{\max}^2 \quad (15)$$

есть безразмерная максимальная скорость расширения газа до вакуума, так что b^2 представляет собой сумму квадратов скоростей: максимальной скорости расширения газа в вакуум и относительной скорости фронта. Из приведенных рассуждений видно, что относительная скорость должна удовлетворять условию $U < b$. Тогда мы имеем

$$\int \frac{U^2 dU}{b^2 - U^2} = -U - \frac{1}{2} b \ln(b - U) + \frac{1}{2} b \ln(U + b) = \\ = -U - \frac{1}{2} b \ln\left(1 - \frac{U}{b}\right) + \frac{1}{2} b \ln\left(1 + \frac{U}{b}\right) \approx \\ \approx -U - \frac{1}{2} b \left(-\frac{U}{b}\right) + \frac{1}{2} b \left(\frac{U}{b}\right) = 0.$$

С учетом (16) уравнение (14) выглядит так

$$U'' + 6U = C_0, \quad (17)$$

решение которого имеет вид

$$U = C_1 \sin(\sqrt{6}\eta + C_2) + C_0. \quad (18)$$

Решение (18) представляет собой высокочастотную гармонику с периодом $\Pi = 2\pi h / \sqrt{6}$ в системе координат (n, y_1, y_2, t) , где $n = h\eta$.

Константы C_0, C_1 и C_2 определяются исходя из условий для $v(0), v'(0)$ и $v''(0)$, налагаемых на значение нормальной компоненты скорости в точках поверхности переднего фронта волны. Заметим, что поверхность переднего фронта распространяется вдоль «лучей» — простран-

ственных кривых, которые в каждой своей точке перпендикулярны распространяющейся поверхности. Найденная нами нормальная компонента скорости $v(n)$ есть касательная к линии луча, а сам луч в нашем случае есть криволинейная координатная линия n . С этой точки зрения величина $v'(0)$ определяет кривизну линии луча, а $v''(0)$ связано со второй кривизной (кручением) кривой луча.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим течение исследуемого газа вблизи выпуклой поверхности S , характеризуемой нормалью N и поверхностными криволинейными координатами (y_1, y_2) (рис. 3).

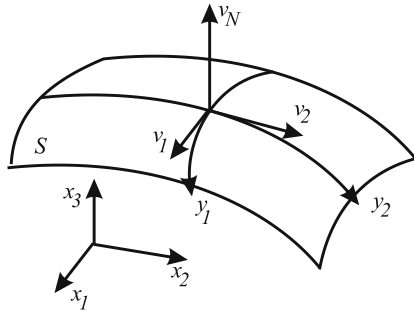


Рис. 3. Элемент выпуклой поверхности с криволинейными координатами

Для учета влияния малого параметра h задачи, как и прежде, произведем растяжение нормальной координаты N , приняв $\eta = N/h$. Учитывая эту замену, представим систему уравнений (8) в локальной криволинейной системе координат (N, y_1, y_2) , совершив предельный переход при $h \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \rho v_N \frac{\partial v_i}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} N_i = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v_N) + \frac{\rho}{6} \frac{\partial^3 v_N}{\partial \eta^3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}. \end{cases} \quad (19)$$

Из системы (19) можно выделить два уравнения для v_1 и v_2 путем проектирования первого уравнения из (2) на y_1 и y_2

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из (20) следует, что микроструктура не ведет к обычному пограничному слою на поверхности, поскольку единственное решение для $v_1(\eta)$ и $v_2(\eta)$ есть постоянная величина, которая возникает при обтекании идеальным газом поверхности

$$\begin{cases} v_1(\eta, y_1, y_2) = V_1(y_1, y_2), \\ v_2(\eta, y_1, y_2) = V_2(y_1, y_2). \end{cases} \quad (21)$$

Оставшиеся три уравнения из (20) дают замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для p, ρ и v_N

$$\begin{cases} \rho v_N \frac{\partial v_N}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v_N) + \frac{\rho}{6} \frac{\partial^3 v_N}{\partial \eta^3} = 0, \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \text{const}. \end{cases} \quad (22)$$

Первое уравнение системы (22) допускает интегрирование в виде

$$v_N^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) \rho^{\gamma-1} = C_1^{*2}. \quad (23)$$

Второе уравнение системы (22) с учетом (23) сводится к дифференциальному уравнению относительно v_N

$$v_N'''' + 6v_N' - \frac{12v_N^2 v_N'}{(\gamma - 1)(C_1^{*2} - v_N^2)} = 0, \quad (24)$$

которое аналогично уравнению (13). Уравнение (24) можно представить в виде, удобном для анализа:

$$v_N'''' + 6v_N' (1 - k^2) = 0, \quad (25)$$

где $k^2 = \left(\frac{v_N}{G} \right)^2$, G — скорость звука.

В линейном приближении решение уравнения (25) может быть представлено в виде:

$$v_N = \begin{cases} A_1 \sin(\sqrt{6}\eta + A_2) + A_0, & k^2 < 1, \\ A_1 sh(\sqrt{6}\eta + A_2) + A_0, & k^2 > 1. \end{cases} \quad (26)$$

Первое решение в формуле (26) соответствует случаю дозвукового течения газа в пограничном слое, второе решение соответствует сверхзвуковому течению. Видно, что они носят качественно разный характер поведения.

Постоянные интегрирования A_0, A_1, A_2 находятся из соотношений, которые выражают условия качения микрообъема газа по S .

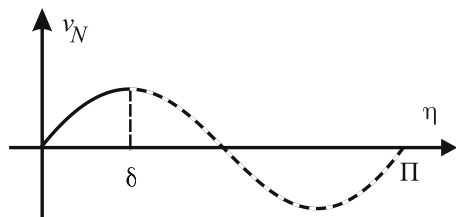


Рис. 4. Распределение нормальной компоненты скорости в пограничном слое при дозвуковом течении газа

$$\begin{cases} v_N(0) = 0, \\ v'_N(0) = 0, \\ v_N(h) \approx v_N(0) + hv'_N(0) + \\ + \frac{h^2}{2} v''_N(0) + \frac{h^3}{6} v'''_N(0) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad (27)$$

$$\begin{cases} v_N(0) = 0, \\ v'_N(0) = 0, \\ 3v''_N(0) + hv'''_N(0) = 0. \end{cases}$$

Из соотношения (26) видим, что в линейном приближении при дозвуковом течении газа в пограничном слое нормальная компонента скорости v_N распределяется по η гармоническим образом. Такой характер поведения $v_N(\eta)$ позволяет выделить пограничный слой толщиной $\delta = \Pi/4$, где $\Pi = 2\pi h/\sqrt{6}$, то есть толщина пограничного слоя в прямой зависимости от раз-

меров микроструктуры h . При этом, на границе пограничного слоя имеет место касательная (v_1, v_2) и нормальная v_N компоненты скорости, которые должны совпадать с соответствующими компонентами в области основного течения.

ВЫВОДЫ

Проведенное исследование пограничного слоя идеального газа за счет учета микроструктуры приводит к выводу, что микроструктура газа сужает поперечное сечение газопроводов и приводит к повышению давления в них.

Изложенные выше результаты могут быть применены при моделировании высокоскоростного течения газа с различными включениями. В качестве таких включений могут выступать кластеры из крупных молекул, мелкие капли жидкости, наноструктуры и т. п. Также, приведенная математическая модель позволяет вести расчет течения идеального газа в микромасштабах и анализировать зоны быстрого изменения газодинамических параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике. — М.: МИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. — 776 с.
2. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. — М.: Физматлит, 2003. — 496 с.
3. Вerveйко Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. — Воронеж: ВГУ, 1997. — 204 с.

Вerveйко Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета; тел.: (4732) 20-87-63

Сумец Павел Петрович — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики Воронежского военного авиационного инженерного университета; тел.: (4732) 31-11-44, e-mail: sumets@yandex.ru

Verveiko Nikolai D. — professor, chair of engineering and applied mechanics of Voronezh State University, tel.: (4732)208-763

Sumetz Pavel P. — senior teacher, chair of mathematics of Voronezh Military Aviation Engineering University; tel.: (4732)311-144, e-mail: sumets@yandex.ru