УДК 517.926

СИСТЕМА ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ТЕОРИЯ ПУАНКАРЕ—ДАНЖУА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ТОРЕ

А. А. Жукова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.05.2008 г.

Аннотация. После перехода в линейной системе с периодическими коэффициентами от декартовых координат к полярным получается нелинейное дифференциальное уравнение, правая часть которого периодична как по времени, так и по полярному углу, что позволяет трактовать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе. Согласно теории Пуанкаре—Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется числом вращения и некоторым гомеоморфным отображением окружности на себя. В статье изучается связь между сильной устойчивостью (неустойчивостью) линейной системы, включая принадлежность к n-й области устойчивости (неустойчивости), с числом вращения и неподвижными точками упомянутого гомеоморфизма.

Abstract. After transition in linear system with periodical coefficients from Cartesian coordinates to polar the not linear differential equation is gained, right part which is periodic as to time, so and as to polar corner, which lets to consider that equation as differential equation on the torus. According to Poincare—Denjoy theory the behavior in the large of decisions of differential equations on the torus completely is characterized by rotation number and by some homeomorphic mapping of circle on itself. In article is studied connection between strong stability (instability) with rotation number and with the fixed points above-mentioned homeomorphism.

После перехода в линейной системе с периодическими коэффициентами от декартовых координат к полярным получается нелинейное дифференциальное уравнение, правая часть которого периодична как по времени, так и по полярному углу, что позволяет трактовать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе. Согласно теории Пуанкаре—Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется числом вращения и некоторым гомеоморфным отображением окружности на себя. В статье изучается связь между сильной устойчивостью (неустойчивостью) линейной системы, включая принадлежность к n-й области устойчивости (неустойчивости), с числом вращения и неподвижными точками упомянутого гомеоморфизма.

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -h_{21}(t)x - h_{22}(t)y,\\ \frac{dy}{dt} &= h_{11}(t)x + h_{12}(t)y,\end{aligned} \tag{1}$$

в которой коэффициенты h_{ij} — вещественные периодические с периодом $\omega > 0$ функции,

$$h_{ij}(t+\omega) = h_{ij}(t),\ \ i,j = 1,2, \tag{2}$$

суммируемые на отрезке $[0,\omega]$. Кроме того выполнено условие

$$\int_0^\omega h_{12}(t)dt = \int_0^\omega h_{21}(t)dt. \tag{3}$$

Иногда систему (1) удобно записывать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$Jz = H(t)z,\ \ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где z есть вектор-столбец с компонентами x и y, а $H(t) = (h_{ij}(t))$ есть ω-периодическая матричная функция.

Перейдем в системе (1) от декартовых координат к полярным координатам по формулам

$$x = r\sin(\theta),\ \ y = r\cos(\theta). \tag{5}$$

Для полярного угла получим следующее дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\dot{\theta} = h_{11}(t)\sin^2\theta + [h_{12}(t) + h_{21}(t)]\times\\ \times\sin\theta\cos\theta + h_{22}(t)\cos^2\theta \equiv f(t,\theta),\end{aligned} \tag{6}$$

которое примечательно тем, что не содержит полярного радиуса r. Дифференциальное уравнение (6) — это нелинейное дифференциальное уравнение, правая часть которого периодична по обеим переменным, а именно

$$f(t+\omega,\theta)=f(t,\theta), \quad f(t,\theta+\pi)=f(t,\theta), \tag{7}$$

что позволяет рассматривать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе $\mathfrak{T}$.

Тор $\mathfrak{T}$ запишем как произведение двух ориентированных окружностей: $\mathfrak{T}=\mathfrak{U}\times\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{U}$ есть ориентированная окружность длины ω, а $\mathfrak{C}$ есть ориентированная окружность длины длины π. С помощью первой из них определяются *параллели* на торе, а с помощью второй — *меридианы*. Согласно теории Пуанкаре—Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется *числом вращения* ρ и некоторым сохраняющим ориентацию *гомеоморфным отображением* Ñ окружности $\mathfrak{C}$ на себя. Основные положения теории Пуанкаре—Данжуа, а также дальнейшее ее развитие и обобщение можно найти, например, в следующих книгах и статьях [3, С. 442—456], [4, С. 173—175], [5, С. 147—186], [6, С. 238—244], [7].

Гомеоморфизм C описывается функцией $c(\vartheta)\equiv\theta(\omega,\vartheta)$. Она непрерывна, возрастает и $c(\vartheta+k\pi)=c(\vartheta)+k\pi$ при любом целом k. Гомеоморфизм C^k описывается функцией $c^k(\vartheta)$, где: при $k>0$ функция $c^k(\vartheta)$ есть k-я итерация функции $c(\vartheta)$; при $k=0$ имеем $c^0(\vartheta)\equiv\vartheta$; и при $k<0$ она есть k-я итерация функции $c^{-1}(\vartheta)$, где $c^{-1}(\vartheta)$ есть функция, обратная $c(\vartheta)$.

Число вращения ρ дифференциального уравнения (6) определяется следующим образом

$$\rho=\frac{\omega}{\pi}\lim_{0<|t-s|\to+\infty}\frac{\theta(t,\vartheta)-\theta(s,\vartheta)}{t-s}. \tag{8}$$

Решение $\theta(t)$ дифференциального уравнения (6), обладающее свойством

$$\theta(t+m\omega)=\theta(t)+n\pi \tag{9}$$

при некоторых целых n и m назовем *периодическим в обобщенном смысле*.

Пусть $z(t)$ — произвольное вещественное решение матричной системы (4) системы, для которого при некотором целом m справедливо соотношение

$$z(t+m\omega)=\nu z(t), \tag{10}$$

где ν — некоторое вещественное число.

Лемма 1. *Пусть $z(t)$ — вещественное решение системы (4), для которого справедливо соотношение (10), а $\theta(t)$ — соответствующая угловая функция. Тогда $\theta(t)$ является решением уравнения (6), обладающим свойством (9). Пусть, наоборот, $\theta(t)$ — решение уравнения (6), обладающее свойством (9). Тогда существует вещественное решение $z(t)$ системы (4), для которого $\theta(t)$ является угловой функцией и для которого справедливо соотношение (10).*

Теорема 1. *Гомеоморфизм C имеет неподвижные точки, т.е.*

$$Cz=z \quad \text{при некотором } z\in\mathfrak{C}, \tag{11}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы системы (1) вещественные.

Теорема 2. *Число вращения ρ является целым неотрицательным числом, т.е.*

$$\rho=n, \tag{12}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы системы (1) вещественные. Если мультипликаторы не только вещественные, но и различные, то система (1), будучи сильно неустойчивой, принадлежит n-й области неустойчивости.

Теорема 3. *Если мультипликаторы μ_+ и μ_- системы (1) вещественные и различные, $\mu_+\neq\mu_-$, то гомеоморфизм C имеет точно две различные неподвижные точки z_+ и z_-, $z_+\neq z_-$, причем они устойчивы, каждая в своем направлении в следующем смысле:*

$$\begin{aligned}&\text{если } z\neq z_-, \text{ то } z_k\to z_+ \text{ где } k\to+\infty,\\ &\text{если } z\neq z_+, \text{ то } z_k\to z_- \text{ где } k\to-\infty,\end{aligned} \tag{13}$$

где $z=z_0\in\mathfrak{C}$ и $z_k=C^kz$ при $k=0,\pm1,\ldots$.

Для уравнения (6) это означает, что существует точно два различных ω-периодических в обобщенном смысле решения $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$, для которых

$$\theta_\pm(t+\omega)=\theta_\pm(t)+n\pi \tag{14}$$

при некотором целом n, причем решение $\theta_+(t)$ асимптотически устойчиво вправо, т.е. при $t\to+\infty$, и решение $\theta_-(t)$ асимптотически устойчиво влево, т.е. при $t\to-\infty$.

□ Рассмотрим решения $z_+(t)$ и $z_-(t)$ системы (4), для которых

$$z_\pm(t+\omega)=\mu_\pm z_\pm(t).$$

Мы видим, что для них справедливы соотношения (10) при $m=1$ и $\nu=\mu_\pm$. По лемме 1 угловые функции $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$ этих решений соответственно обладают свойством (9) при $m=1$ и некотором n, т.е. имеет место (14). Обозначим через z_+ и z_- точки на окружности $\mathfrak{C}$, отвечающие ν_+ и ν_-, где $\nu_\pm = \theta_\pm(0)$. Согласно (14) при $t=0$ имеем $\theta_\pm = \theta_\pm(0)+n\pi$, откуда вытекает, что $c(\nu_\pm) = \nu_\pm + n\pi$. Это и означает, что $z_\pm$ — неподвижные точки отображения C, т.е.

$$Cz_\pm = z_\pm.$$

Так как углы ν_+ и ν_- различные по модулю π, ибо они отвечают линейно независимым собственным векторам a_+ и a_- матрицы монодромии, то неподвижные точки z_+ и z_- различные, $z_+ \neq z_-$. Других неподвижных точек у отображения C нет, так как у матрицы монодромии нет других собственных направлений.

Осталось объяснить устойчивость неподвижных точек z_+ и z_- в указанном выше смысле или, что то же самое, устойчивость обобщенных периодических решений $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$ в указанных направлениях. Последнее немедленно вытекает из формул

$$-2\ln|\mu_+| = \int_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta_+(t))}{\partial\theta}\,dt < 0,$$

$$-2\ln|\mu_-| = \int_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta_-(t))}{\partial\theta}\,dt > 0.$$

Локальная устойчивость точек z_+ и z_- в указанном выше смысле вытекает из очевидных формул

$$c'(\vartheta_+) = \exp\int_0^{\omega} \frac{\partial f(t,\theta_+(t))}{\partial\theta}\,dt \,|< 1,$$

$$c'(\vartheta_-) = \exp\int_0^{\omega} \frac{\partial f(t,\theta_-(t))}{\partial\theta}\,dt \,|> 1.$$

Докажем первое утверждение в (13). Проще всего оно устанавливается на языке обобщенных периодических решений $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$. Пусть $\vartheta_+ = \theta_+(0)$ и $\vartheta_- = \theta_-(0)$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \le \vartheta_+ < \vartheta_- < \pi$. Проверим, что

$$0 < c(\vartheta_+) - c(\vartheta_-) < \vartheta - \vartheta_+$$
$$\text{при } \ 0 < \vartheta - \vartheta_+ < \vartheta_- - \vartheta_+$$

(аналогичные рассуждения применимы и при $\vartheta_- - \vartheta_+ - \pi < \vartheta - \vartheta_+ < 0$) откуда и вытекает справедливость обсуждаемого утверждения.

Действительно, написанное выше неравенство имеет место в силу асимптотической устойчивости решения $\vartheta_+(t)$ при $0 < \vartheta - \vartheta_+ < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Если на мгновение допустить, что оно места не имеет, то найдется такое ϑ_*, для которого

$$0 < c(\vartheta_*) - c(\vartheta_+) = \vartheta_* - \vartheta_+$$
$$\text{и } \ 0 < \vartheta_* - \vartheta_+ < \vartheta_- - \vartheta_+.$$

Тогда, так как $c(\vartheta_+) = \vartheta_+ + n\pi$, то и $c(\vartheta_*) = \vartheta_* + n\pi$. Это означает, что $Cz_* = z_*$ в то время как у гомеоморфизма C нет неподвижных точек, кроме z_+ и z_-; здесь z_* — точка окружности $\mathfrak{C}$, соответствующая ϑ_*. Полученное противоречие и доказывает справедливость написанного выше неравенства.

Аналогично доказывается и второе утверждение в (13). ■

Теорема 3 говорит о том, что сильная неустойчивость системы (1) имеет место тогда и только тогда, когда гомеоморфизм C имеет точно две различные неподвижные точки.

Теорема 4. *Число вращения ρ является нецелым числом, т.е.*

$$\rho \neq n, \tag{15}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы системы (1) невещественные. При выполнении последнего условия система (1), будучи сильно устойчивой, принадлежит n-й области устойчивости, где n есть целая часть числа вращения ρ:

$$n = [\rho]. \tag{16}$$

Далее, могут представиться две возможности: либо

$$\rho \text{ — рациональное число, } \rho = \frac{n}{m}, \tag{17}$$

где n и m — целые взаимно простые числа (и $m \neq \pm 1$); в этом случае m-я степень гомеоморфизма C имеет неподвижные точки, т.е.

$$C^m z = z \ \text{ при некотором } \ z \in \mathfrak{C}, \tag{18}$$

и имеет место периодический случай; либо

$$\rho \text{ — рациональное число;} \tag{19}$$

в этом случае никакая степень гомеоморфизма C (кроме нулевой) не имеет неподвижных точек

$$C^m z \neq z \text{ при } z \in \mathfrak{C},\ m \neq 0, \tag{20}$$

и всегда имеет место эргодический случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., Наука, 1972.

2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, Изд-во иностр. лит., 1954. Т. II,— 416 с.

3. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.

4. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Мир, 1964.

5. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.—Л., Наука, 1964.

6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970.

7. *Перов А.И., Эгле И.Ю.* К теории Пуанкаре—Данжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1972, т.8, № 5, С. 801—810.

Жукова Анна Александровна — аспирант кафедры кафедра нелинейных колебаний факультета ПММ ВГУ; тел.: 66-47-75, e-mail: azhukova84@mail.ru

Zhukova Anna A. — post-graduate student, chair of nonlinear vibrations of Voronezh State University; tel.: (4732)664-775, e-mail: azhukova@mail.ru