УДК 517.937: 517.983

ОБ УСЛОВИЯХ ОБРАТИМОСТИ ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю. Н. Синтяев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.03.2008 г.

Аннотация. Получены достаточные условия обратимости возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами. Приведены оценки норм обратных к дифференциальным операторам через нормы разностных.

Ключевые слова: достаточные условия обратимости, возмущенный дифференциальный оператор, оценки норм, обратный к дифференциальному оператору, норма разностных операторов.

Abstract. Sufficient conditions of invertibility for perturbed operator with unboundary coefficients are obtained. Also it is given estimations for norms of inverse to differentials operator through the norms of differrence operator.

Key words: sufficient conditions of invertibility, perturbed differentials operator, estimations for norms, inverse to differentials operator, the norms of differrence operator.

1. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ

Пусть X — комплексное банахово пространство и $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Символом $L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1,\infty]$ обозначим банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых по Бохнеру и суммируемых со степенью $p \in [1,\infty]$ (существенно ограниченных при $p=\infty$) функций, определенных на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве X и с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p \, dt\right)^{1/p}, \; p \in [1,\infty), \; \|x\|_\infty = vrai\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|.$$

Через $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X. Таким образом, $C_b \subset L_\infty$. Символом $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$ убывающих на $\pm\infty$ функций. Здесь используется также пространство Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1,\infty)$. Оно состоит из локально суммируемых функций $x : \mathbb{R} \to X$, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|^p \, ds\right)^{1/p}$. Символ $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ используется для обозначения одного из введенных в рассмотрение пространств. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, $p \in [1,\infty]$ — банахово пространство двусторонних последовательностей $\{x : \mathbb{Z} \to X : \|x\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p)^{1/p} < \infty\}$, $p \in [1,\infty)$, $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \{x : \mathbb{Z} \to X : \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\| < \infty\}$.

Символом $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ будет обозначаться пространство l_p, $p \in [1,\infty)$, если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = L_p(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) = l_\infty$, если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является одним из пространств C_b, L_∞, S^p, $p \in [1,\infty)$. Оно будет называться *ассоциированным* с пространством $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Далее рассматривается сильно непрерывное семейство эволюционных операторов $U : \Delta \to EndX$, где $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : t \ge s\}$, т.е. выполнены условия:

1) $\mathcal{U}(t,t) = I$ — тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{R}$;

2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$, $\tau \le s \le t$; $s,t,\tau \in \mathbb{R}$;

3) отображение $(t,s) \mapsto \mathcal{U}(t,s)x : \Delta \to X$ непрерывно для любого $x \in X$;

4) конечна величина

$$K = \sup_{0\le t-s\le 1} \|\mathcal{U}(t,s)\| \ge 1. \qquad (1)$$

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\{\mathcal{U}(t,s),\ s \le t\}$ из алгебры $EndX$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$ с показателем $\beta > 0$ и коэффициентом $M \ge 1$, если существует ограниченная сильно непрерывная проекторозначная функция

$P:\mathbb{R}\to EndX$, такая что: 1) $\mathcal{U}(t,s)P(s)= = P(t)\mathcal{U}(t,s)$ при $t\geq s$ из $\mathbb{R}$; 2) $\|\mathcal{U}(t,s)P(s)\|\leq \leq Me^{-\beta(t-s)}$ при $t\geq s$ из $\mathbb{R}$; 3) при $t\geq s$ сужение $\mathcal{U}(t,s)\,|\,Im(Q(s))$ оператора $\mathcal{U}(t,s)$ на образ $\mathrm{Im}(Q(s))$ проектора $Q(s)=I-P(s)$ (здесь и далее символом I обозначается тождественный оператор) является изоморфизмом подпространств $\mathrm{Im}(Q(s))$ и $\mathrm{Im}(Q(t))$ (определим оператор $\mathcal{U}(s,t)$ как обратное отображение из $\mathrm{Im}(Q(t))$ в $\mathrm{Im}(Q(s))$); 4) $\|\mathcal{U}(t,s)Q(s)\|\leq Me^{\beta(t-s)}$ при $s\geq t$ (нормы берутся в $EndX$ и оператор $\mathcal{U}(t,s)Q(s)$ рассматривается как элемент пространства $EndX$).

Построим линейный оператор $\mathcal{L}:D(\mathcal{L})\subset \subset\mathcal{F}\to\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, который определяется на любом рассматриваемом пространстве $\mathcal{F}$ следующим образом. Функция $x\in\mathcal{F}$ относится к области определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует функция $f\in\mathcal{F}$ такая, что для почти всех $s\leq t$ из $\mathbb{R}$, если $\mathcal{F}\neq C_b$ и для всех $s\leq t$, если $\mathcal{F}=C_b$, верны равенства

$$x(t)=\mathcal{U}(t,s)x(s)-\int_s^t\mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ s\leq t,\ t\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Необходимо отметить, что эти равенства следует понимать на представителях класса, если $\mathcal{F}\neq C_b$. Из (2) следует, что функция x почти всюду совпадает с непрерывной функцией, и функция f единственна. Далее полагается $\mathcal{L}x=f$. При этом функцию x будем считать непрерывной. Отметим, что корректность определения оператора $\mathcal{L}$ и его замкнутость следуют из работы [1].

Таким образом, $\mathcal{L}=-\dfrac{d}{dt}+A(t):D(\mathcal{L})\subset \subset\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ — абстрактный параболический оператор, если $\mathcal{U}$ — семейство эволюционных операторов для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),\ \ t\in\mathbb{R},$$

где $A(t):D(A(t))\subset X\to X$ — семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши (см. [1]).

В работе приводятся условия наличия экспоненциальной дихотомии у возмущенного оператора, а также исследуются проекторы Рисса. В частности, если $A:D(A)\subset X\to X$ — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы операторов $T:\mathbb{R}_+\to \to EndX$, то для обратимости дифференциального оператора $\mathcal{L}$ необходимо и достаточно выполнения условия $\sigma(T(1))\cap\mathbb{T}=\varnothing$, где $\mathbb{T}=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$ — единичная окружность.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U}:\Delta\to EndX$ и $\mathcal{V}:\Delta\to EndX$ два семейства эволюционных операторов. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$ с показателем $\gamma>0$ и коэффициентом $M>0$ и, кроме того, выполнено неравенство*

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\|\mathcal{U}(s+t,s)-\mathcal{V}(s+t,s)\|\leq\frac{1}{M}\frac{(1-e^{\gamma t})^2}{1-e^{-2\gamma t}},\ t>0, \quad (3)$$

то $\mathcal{V}$ также допускает экспоненциальную дихотомию.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(t,s)=\mathcal{U}(\alpha t+\beta,\alpha s+\beta)$, $\alpha,\beta>0$. Так как $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию, то $\mathcal{U}_{\alpha,\beta}$ также будет допускать экспоненциальную дихотомию, поэтому будет обратим соответствующий линейный оператор $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ (см. теорему 4 статьи [1]), а значит обратим разностный оператор

$$(D_{\alpha,\beta}x)(n)=x(n)-\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(n,n-1)x(n-1)=$$
$$x(n)-\mathcal{U}(\alpha n+\beta,\alpha n+b-\alpha)x(n-1),$$

причем

$$(D^{-1}_{\alpha,\beta}f)(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}G_{\alpha,\beta}(n,m)f(m),$$

где

$$G_{\alpha,\beta}(n,m)=\begin{cases}\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(n,m)P_{\alpha,\beta}(m), & n\leq m,\\ -\mathcal{U}_{\alpha,\beta}(n,m)Q_{\alpha,\beta}(m), & n>m,\end{cases}$$

с оценкой $\|G_{\alpha,\beta}(n,m)\|\leq Me^{-\gamma\alpha|n-m|}$ (см. [1]).

Значит,

$$\|D^{-1}_{\alpha,\beta}\|\leq M\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\gamma\alpha|k|}=M\frac{1+e^{-\gamma\alpha}}{1-e^{-\gamma\alpha}}=M'.$$

Таким образом, из теоремы 7 статьи [1] следует, что условием наличия экспоненциальной дихотомии у оператора $\mathcal{V}$ будет условие

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{U}(\alpha n+\beta,\alpha n+\beta-\alpha)-\mathcal{V}(\alpha n+\beta,\alpha n+\beta-\alpha)\|\leq$$
$$\leq\frac{1}{M'},$$

откуда выбрав $\alpha=t$ и $\beta=s+t(1-n)$, получаем условие (3). Выбор параметров α и β осуществляется таким образом, чтобы стало возможным сравнение полученных результатов с результатами Шнаубельта [2].

Замечание 1. В статье [2] были получены следующие условия наличия у $\mathcal{V}$ экспоненциальной дихотомии

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \| \mathcal{U}(s+t,s) - \mathcal{V}(s+t,s) \| \le$$
$$\le \frac{1}{8M^2}(1-e^{\gamma t})^2,\ \ t \ge 0,$$

Поскольку $M \ge 1$, то $\frac{1}{8M} < \frac{1}{1-e^{-2\gamma t}}$ и, следовательно,

$$\frac{1}{8M^2}(1-e^{\gamma t})^2 < \frac{1}{M}\frac{(1-e^{\gamma t})^2}{1-e^{-2\gamma t}}.$$

А это означает, что полученная теорема усиливает результат Шнаубельта [2].

Далее введем в рассмотрение полугруппу $\{T_u(t),\ t \ge 0\}$ разностных операторов из банаховой алгебры $End\ l_p$ вида

$$(T_u(t)x)(s) = \mathcal{U}(s,s-t)x(s-t),$$
$$x \in \mathcal{F},\ s \in \mathbb{R},\ t \ge 0.$$

Оператор $\mathcal{L}_u$ считается обратимым, поэтому из статьи [1] следует, что $\sigma(T_u(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$, где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ — единичная окружность.

Теорема 2. *Пусть оператор $\mathcal{L}_u$ обратим и семейство $\mathcal{V} : \Delta \to EndX$ таково, что выполнено $\|\mathcal{U}-\mathcal{V}\|_\infty \le \frac{(1-e^{-\gamma t})^2}{4M^2+M}$. Тогда оператор $\mathcal{L}_v$ обратим и $\| \mathcal{P}_u - \mathcal{P}_v \| \le 1$ для проекторов, определенных формулами $\mathcal{P}_u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}(\gamma I - T_u(1))^{-1}d\gamma \in End\mathcal{F}$, $\mathcal{P}_v = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}(\gamma I - T_v(1))^{-1}d\gamma \in End\mathcal{F}$.*

Доказательство. Из теоремы 5 статьи [1] следует, что проекторы $\mathcal{P}_u$ и $\mathcal{P}_v$ являются операторами умножения на соответствующие операторозначные функции P_u и P_v, участвующие в определении экспонициальной дихотомии семейств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Значит,

$$\|\mathcal{P}_u - \mathcal{P}_v\| = \|P_u - P_v\|_\infty =$$
$$= \left\| -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}(R(\lambda,T_u(1)) - R(\lambda,T_v(1)))d\lambda \right\| \le \quad (4)$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{\lambda\in\mathbb{T}}\|R(\lambda,K_u)\|\|R(\lambda,K_v)\|\|K_u - K_v\|,$$

где $(K_u x)(n) = U(n,n-1)x(n-1)$, $(K_v x)(n) = \mathcal{V}(n,n-1)x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z},X)$ — разностные операторы из $End\mathcal{F}(\mathbb{Z},X)$.

Дальше используется представление

$$D_v = D_u + (D_v - \mathcal{D}_u) = \mathcal{D}_u(I + \mathcal{D}_u^{-1}(\mathcal{D}_v - \mathcal{D}_u)), \quad (5)$$

где $\mathcal{D}_u = I - \mathcal{K}_u$ и $\mathcal{D}_v = I - \mathcal{K}_v$.

Поскольку оператор D_v^{-1} подобен операторам $\gamma R(\gamma,\mathcal{K}_v)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, где R — резольвента оператора $\mathcal{K}_v$ (см. [3]), то имеет место равенство $\|D_v^{-1}\| = \sup_{\lambda\in\mathbb{T}}\|R(\lambda,\mathcal{K}_v)\|$.

Откуда из (5) получаем оценку

$$\| D_v^{-1} \| \le \| D_u^{-1} \| \frac{1}{1 - \| \mathcal{D}_u^{-1} \| \| \mathcal{D}_u - \mathcal{D}_v \|}. \quad (6)$$

Учитывая, что $\|\mathcal{K}_u - \mathcal{K}_v\| = \|U - V\|_\infty = \|\mathcal{D}_u - \mathcal{D}_v\|$, из оценок (4) и (6) следует, что

$$\|P_u - P_v\|_\infty \le$$
$$\le \|\mathcal{D}_u^{-1}\|^2 \frac{1}{1 - \|\mathcal{D}_u^{-1}\|\|\mathcal{D}_u - \mathcal{D}_v\|}\|U - V\|_\infty =$$
$$= \|\mathcal{D}_u^{-1}\|^2 \frac{1}{1 - \|\mathcal{D}_u^{-1}\|\|U - V\|_\infty}\|U - V\|_\infty.$$

Таким образом, условие $\|\mathcal{P}_u - \mathcal{P}_v\| < 1$ будет выполнятся в случае, если верно

$$\|U - V\|_\infty \le \frac{\|\mathcal{D}_u^{-1}\|^2}{1 + \|\mathcal{D}_u^{-1}\|},$$

то есть

$$\|U - V\|_\infty \le \frac{(1-e^{-\gamma t})^2}{M^2(1+e^{-\gamma t})^2 + M(1-e^{-2\gamma t})} \le \frac{(1-e^{-\gamma t})^2}{4M^2+M}.$$

Замечание 2. При выполнении условия $\|\mathcal{P}_u - \mathcal{P}_v\| < 1$ имеют место изоморфизм образов $\operatorname{Im}\mathcal{P}_u$ и $\operatorname{Im}\mathcal{P}_v$ и изоморфизм ядер $Ker\mathcal{P}_u$ и $Ker\mathcal{P}_v$ (см. [4]).

2. ОЦЕНКИ НОРМ ОБРАТНЫХ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ ЧЕРЕЗ НОРМЫ РАЗНОСТНЫХ

Теорема 3. *Из обратимости оператора $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ следует обратимость разностного оператора $\mathcal{D} : \mathcal{F}(\mathbb{Z},X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z},X)$, $\mathcal{D}x(n) = x(n) - \mathcal{U}(n,n-1)x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z},X)$, действующего в ассоциированном с $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ пространстве и верна оценка*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^{-1}\| &\le 1 + C(\mathcal{F})K(1 + K\|\mathcal{L}^{-1}\|) = \\ &= 1 + C(\mathcal{F})(K + K^2\|\mathcal{L}^{-1}\|) = æ(\mathcal{L}),\end{aligned} \quad (7)$$

где постоянная K определяется равенством (1), $C(\mathcal{F}) = 1$, если $\mathcal{F}(\mathbb{R},X) = L_\infty(\mathbb{R},X)$ или $\mathcal{F}(\mathbb{R},X) = C_b(\mathbb{R},X)$ и $C(\mathcal{F}) = 2^{1-\frac{1}{p}}$, если $\mathcal{F}(\mathbb{R},X) = L_p(\mathbb{R},X)$ или $\mathcal{F}(\mathbb{R},X) = S^p(\mathbb{R},X)$, $p \in [1,\infty)$.

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{L}$ обратим. Докажем инъективность оператора $\mathcal{D}$. Если x_0

принадлежит ядру $Ker\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) : \mathcal{D}x = 0\}$ оператора $\mathcal{D}$, то $x_0(n) = \mathcal{U}(n, n-1)x_0(n-1)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, определенная равенствами $x(t) = \mathcal{U}(t, n)x_0(n)$, $t \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежит ядру $Ker\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}$, т.е. $x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s)$ для всех $s \le t$ из $\mathbb{R}$. Принадлежность функции x пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ следует из определения ассоциированного пространства. Поэтому $x = 0$ и, следовательно, $x_0 = 0$.

Докажем сюръективность оператора $\mathcal{D}$. Для этого введем в рассмотрение последовательность непрерывных периодических периода 1 скалярных функций $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m \ge 2$, определенных на $[0,1]$ равенствами: $\varphi_m(s) = \dfrac{m}{m-1}$, $s \in (1/m, 1-1/m)$; $\varphi_m(s) = \dfrac{m^2 s}{m-1}$, $s \in [0, 1/m]$; $\varphi_m(s) = \dfrac{-m^2 s}{m-1} + \dfrac{m^2}{m-1}$, $s \in [1-1/m, 1]$. Отметим используемые далее свойства этих функций: $\max\limits_{0 \le s \le 1} |\varphi_m(s)| = \dfrac{m}{m-1}$, $\int\limits_0^1 \varphi_m(s)ds = 1$, $\varphi_m(0) = \varphi_m(1) = 0$. Построим по этим функциям операторы $B_m : \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, $m \ge 2$, с помощью соотношений:

$$(B_m x)(s) = -\varphi_m(s)\mathcal{U}(s, n-1)x(n-1),$$
$$s \in [n-1, n), \; n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ является ассоциированным с $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ пространством, то операторы B_m, $m \ge 2$, корректно определены и равномерно ограничены, причем $\| B_m \| \le \dfrac{m}{m-1} K$ для всех $m \ge 2$. Пусть g — произвольная последовательность из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Положим $f = B_m g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и $x = \mathcal{L}^{-1} f \in D(\mathcal{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, X)$. Из равенств (2) получаем

$$x(n) = \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1) +$$
$$+ \int\limits_{n-1}^{n} \varphi_m(s)\mathcal{U}(n, s)\mathcal{U}(s, n-1)g(n-1)ds =$$
$$= \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1) +$$
$$+ \mathcal{U}(n, n-1)g(n-1), \; n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $\mathcal{D}(\tilde{x} + g) = g$, если только будет установлено, что сужение $\tilde{x} : \mathbb{Z} \to X$ функции x на $\mathbb{Z}$ принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Из равенств (2) получаем оценки

$$\|\tilde{x}(n)\| = \|x(n)\| \le$$
$$\le \frac{m}{m-1} K(\|x(s)\| + \|g(n-1)\|),$$
$$s \in [n-1, n], \; n \in \mathbb{Z}, \; m \ge 2.$$

Ввиду произвольности $m \ge 2$, в итоге получаем, что

$$\|\tilde{x}(n)\| \le K(\|x(s)\| + \|g(n-1)\|),$$
$$s \in [n-1, n), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Поэтому $[n-1, n]$ $\tilde{x} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, если $\mathcal{F} = L_\infty(\mathbb{R}, X)$ или $\mathcal{F} = C_b(\mathbb{R}, X)$. При этом получаем оценку

$$\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\| \le K(\|x\|_\infty + \|g\|_\infty). \tag{9}$$

Пусть теперь $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, или $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$. Поскольку $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ для любых чисел $a, b \ge 0$, то интегрируя по отрезку обе части неравенства (8), возведённые в степень p, получаем неравенство

$$\|x(n)\|^p \le$$
$$\le 2^{p-1} K^p \left(\int\limits_{n-1}^{n} \|x(s)\|^p \, ds + \|g(n-1)\|^p \right), n \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Поэтому при $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = L_p(\mathbb{R}, X)$ имеет место оценка (при этом далее используется неравенство $(a+b)^{1/p} \le a^{1/p} + b^{1/p}$)

$$\|\tilde{x}\|_p \le 2^{1-1/p} K(\|x\|_p + \|g\|_p). \tag{11}$$

Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = S^p(\mathbb{R}, X)$, то из (10) следует, что

$$\|\tilde{x}\|_\infty \le 2^{1-1/p} K(\|x\|_{S^p} + \|g\|_\infty). \tag{12}$$

Таким образом, из оценок (9)—(12) получаем, что при любом выборе пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ функция $\tilde{x}$ принадлежит ассоциированному с ним пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Следовательно, оператор $\mathcal{D}$ обратим, $\tilde{x} + g = \mathcal{D}^{-1} g$, и из приведенных оценок и равенства $x = \mathcal{L}^{-1} B_m g$ вытекает, что

$$\|\mathcal{D}^{-1} g\| \le \|\tilde{x}\| + \|g\| \le C(\mathcal{F})K(\|x\|_{\mathcal{F}} + \|g\|) + \|g\| \le$$
$$\le C(\mathcal{F})K(\|\mathcal{L}^{-1}\| \|B_m\| \|g\| + \|g\|) + \|g\| \le$$
$$\le (C(\mathcal{F})K\left(1 + \frac{m}{m-1} K \|\mathcal{L}^{-1}\|\right) + 1)\|g\|, \; m \ge 2.$$

Учитывая произвольность $m \ge 2$, из только что приведенных оценок следует доказываемая оценка (7). Теорема доказана.

Теорема 4. *Из обратимости разностного оператора* $\mathcal{D} \in End\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ *следует обратимость оператора* $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ *и верна оценка*

$$\| \mathcal{L}^{-1} \| \le C(\mathcal{F})(K + K^2 \| \mathcal{D}^{-1} \|), \qquad (13)$$

где постоянная $C(\mathcal{F})$ *взята из условия леммы 1.*

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{D}$ обратим. Из его инъективности следует (см. лемму 3 из [1]) инъективность оператора $\mathcal{L}$. Докажем сюръективность оператора $\mathcal{L}$ и получим оценку (13). Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим последовательность $f_d(n) = -\int_{n-1}^{n} \mathcal{U}(n,\tau)f(\tau)d\tau,\ \ n \in \mathbb{Z}$. Тогда существует последовательность $x_0(n) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, такая, что $\mathcal{D}x_0 = f_d$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функция x, определённая на каждом промежутке $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$ соотношениями

$$x(t) = \mathcal{U}(t,n)x_0(n) - \\ -\int_{n}^{t}\mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ \ t \in [n, n+1],\ \ n \in \mathbb{Z}, \qquad (14)$$

принадлежит $D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}x = f$, т.е. выполнены равенства (2). Итак, $\mathcal{L}$ — обратимый оператор. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = L_\infty(\mathbb{R}, X)$ или $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$, то из (14) получаем оценку

$$\|x\|_\infty \le K(\|x_0\|_\infty + \|f\|_\infty) = \\ = K(\|\mathcal{D}^{-1}f_d\|_\infty + \|f\|_\infty) \le (K^2 \|\mathcal{D}^{-1}\| + K)\|f\|_\infty . \qquad (15)$$

При этом учитывалось неравенство $\|\mathcal{D}^{-1}\|\|f_d\|_\infty \le K\|\mathcal{D}^{-1}\|\|f\|_\infty$.

Пусть теперь $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = L_p(\mathbb{R}, X)$ или $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$. Тогда из соотношений (14) получаем, что

$$\|x(t)\| \le K(\|x_0(n)\| + \int_{n}^{n+1} \|f(\tau)\| d\tau) \le \\ \le K(\|x_0(n)\| + \left(\int_{n}^{n+1} \|f(\tau)\|^p \, d\tau)^{1/p} \right), \\ t \in [n, n+1],\ \ n \in \mathbb{Z},$$

поэтому верна оценка (см. доказательство леммы 1)

$$\|x\|_p \le 2^{1-1/p} K(\|x_0\|_p + \|f\|_p) \le \\ \le 2^{1-1/p}(K^2 \|\mathcal{D}^{-1}\| + K)\|f\|. \qquad (16)$$

Здесь было использовано неравенство $\|x_0\|_p \le \|\mathcal{D}^{-1}\|\|f_d\|_p \le K\|\mathcal{D}^{-1}\|\|f\|_p$.

Теперь из оценок (15)—(16) следует доказываемая оценка (13). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Функциональный анализ и его приложения — 1996. — Т. 30. — № 3. — С. 1—11.

2. *Schnaubelt R.* Asymptotically autonomous parabolic evolution equations // Journal of Evolution equations — 2001. — Vol. 1. — P. 19—37.

3. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов // Сибирский математический журнал — 2001. — Т. 42. — № 6. — С. 1231—1243.

4. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като // М., 1972. — С. 48—49.

Синтяев Юрий Николаевич, аспирант факультета ПММ, тел.: 60-44-05, 8-910-242-53-24, e-mail: SintJuri@yandex.ru

Sintyaev Yu. N. — postgraduate student; tel: 60-44-05, 8-910-242-53-24, e-mail: SintJuri@yandex.ru