УДК 517.925.42

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. Ю. Макаренков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.03.2008 г.

В статье изучается скорость сходимости периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений при уменьшении амплитуды периодического возмущения. Предполагается, что линеаризованная на порождающем решении система допускает мультипликатор +1.

Ключевые слова: периодические решения, периодически возмущенные дифференциальные уравнения

This paper studies the rate of convergence of periodic solutions of systems of ordinary differential equations when the amplitude vanishes. It is assumed that the linearized system possesses a multiplicator +1 along the generating solution.

Keywords: periodic solutions, periodically perturbed differential equations

ВВЕДЕНИЕ

Пусть предложена система

$$\dot{x} = f(t,x) + \varepsilon g(t,x,\varepsilon), \tag{1}$$

где $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ — T-периодична по времени, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

В настоящей статье изучается задача, поставленная Дж. Хейлом и П. Тбоас в [11], о скорости сходимости и поведении T-периодических решений системы (1) при $\varepsilon \to 0$ для непрерывно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и непрерывной функции $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$.

Особенность исследования данной задачи состоит в том, что во многих случаях неизвестно, что порождающее T-периодическое решение $\tilde{x}$ системы

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{2}$$

удовлетворяет условиям невырожденности, то есть, что линеаризованная система

$$\dot{y} = f'_{(2)}(t, \tilde{x}(t)) \tag{3}$$

не имеет мультипликаторов +1. Более того, как следует из [11], случай, когда +1 является мультипликатором системы (3), представляет особый интерес.

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — сходящаяся к нулю последовательность значений параметра системы (1) и $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — соответствующая последовательность T-периодических решений этой системы такая, что

$$x_k(t) \to \tilde{x}(t) \text{ 345 } k \to \infty \tag{4}$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}$, где $\tilde{x}$ — T-периодическое решение порождающей системы (2). Цель работы — получить оценку нормы $\| x_k - \tilde{x} \|$.

В случае, когда дополнительно известно, что функция g непрерывно дифференцируема и линеаризованная система (3) не имеет единичных мультипликаторов, сходимость в (4) со скоростью $\varepsilon_k > 0$ следует из формулы разложения решений x_k в ряд по степеням ε_k, даваемой методом малого параметра Пуанкаре (см. Б. П. Демидович [1], Гл. III, § 24, М. Розо [10], Гл. 9, § 1). Если относительно системы (3) известно существование мультипликатора +1 алгебраической кратности 1, то сходимость в (4) со скоростью $\varepsilon_k > 0$ для случая аналитических и дважды непрерывно дифференцируемых правых частей системы (1) доказана соответственно И. Г. Малкиным (см. [9], формула 4.1) и В. С. Лудом (см. [12], формула 1.3 теоремы 1). Однако в работах указанных авторов не отмечался установленный в настоящей статье факт (следствие 3.8) о том, что скорость сходимости может иметь и больший, чем $\varepsilon_k > 0$ порядок. Также в классических работах не указаны свойство (8) и следствия 3.4—3.6, связанные с качественными свойствами поведения T-периодических решений системы (1) при $\varepsilon \to 0$. Если же возмущение всего лишь непрерывно, что является общим предположением теорем о существовании, доказанных в [4], [7], [6], [2], то результаты о скорости сходимости T-периодических решений системы (1) при $\varepsilon \to 0$ в литературе отсутствуют. Предложенные в настоящей статье теоремы частично заполняют этот пробел.

2. ОДНА АЛЬТЕРНАТИВА ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Пусть $\Omega(\cdot, t_0, \xi)$ — решение системы (2) с начальным условием $x(t_0) = \xi$. Следующая альтернатива утверждает, что либо начальные условия $x_k(0)$ сходятся к начальному условию $\tilde{x}(0)$ порождающего решения $\tilde{x}$ вдоль плоскости $\{l \in \mathbb{R}^n : (\Omega'_{(3)}(T, 0, \tilde{x}(0)) - I)l = 0\}$, либо сходимость имеет скорость $\varepsilon_k > 0$. При этом, в последнем случае описание поведения решений x_k при $k \to \infty$ может быть уточнено на основании обобщенного оператора усреднения

$$\Phi^s(\xi) = \int_{s-T}^{s} \Omega'_{(3)}(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \xi)) g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi), 0) d\tau$$

(см. [3]) соответствующего задаче о T-периодических решениях для системы (1).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (4) и*

$$\frac{\tilde{x}(0) - x_k(0)}{\left\| \tilde{x}(0) - x_k(0) \right\|} \to l \ 345 \ k \to \infty, \tag{5}$$

где $l \in \mathbb{R}^n$. *Тогда либо*

$$(\Omega'_{(3)}(T, 0, \tilde{x}(0)) - I)l = 0, \tag{6}$$

либо существует константа $c > 0$ *такая, что*

$$\left\| \tilde{x}(0) - x_k(0) \right\| \le c\varepsilon_k, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

В последнем случае для любой сходящейся последовательности $\left\{ \dfrac{\tilde{x}(0) - x_k(0)}{\varepsilon_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ *последовательность* $\left\{ \dfrac{\tilde{x}(0) - \Omega(0, t, x_k(t))}{\varepsilon_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ *также сходится, и справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} (\Omega'_{(3)}(T, 0, \tilde{x}(0)) - I) \lim_{k \to \infty} \frac{\tilde{x}(0) - \Omega(0, t, x_k(t))}{\varepsilon_k} &= \\ = 1cm = \Phi^t(\tilde{x}(0)), \ \ t \in [0, T]&. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Положим

$$v_k(t) = \Omega(0, t, x_k(t)). \tag{9}$$

Тогда

$$v_k(t) = \Omega(T, 0, v_k(T)) + \varepsilon_k \int_0^t \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, v_k(\tau)) d\tau, \tag{10}$$

где

$$\Upsilon_\varepsilon(t, \xi) = \Omega'_\xi(0, t, \Omega(t, 0, \xi)) g(t, \Omega(t, 0, \xi), \varepsilon).$$

Заметим, что $\tilde{x}(0) = \lim_{n \to \infty} v_k(0) = \lim_{n \to \infty} v_k(T)$ и из (10) при $k = \infty$ получаем $\tilde{x}(0) = \Omega(T, 0, \tilde{x}(0))$. Перепишем (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} -(\tilde{x}(0) - v_k(t)) &= \\ = (\Omega(T, 0, v_k(t)) - \Omega(T, 0, \tilde{x}(0))) &+ \\ + \Omega(T, 0, v_k(T)) - \Omega(T, 0, v_k(t)) &+ \\ + \varepsilon_k \int_0^t \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, v_k(\tau)) d\tau& \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -(\tilde{x}(0) - v_k(t)) &= \\ = -\Omega'_{(3)}(T, 0, \tilde{x}(0))(\tilde{x}(0) - v_k(t)) &+ \\ + o\left(\tilde{x}(0) - v_k(t)\right) &+ \\ + \Omega'_{(3)}(T, 0, v_k(T))\left(v_k(T) - v_k(t)\right) &+ \\ + o\left(v_k(T) - v_k(t)\right) + \varepsilon_k \int_0^t \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, v_k(\tau)) d\tau&. \end{aligned} \tag{11}$$

Существует две возможности: либо

$$\frac{\left\| \tilde{x}(0) - x_k(0) \right\|}{\varepsilon_k} \to \infty \text{ при } k \to \infty, \tag{12}$$

либо существует $c > 0$ такое, что

$$\frac{\left\| \tilde{x}(0) - x_k(0) \right\|}{\varepsilon_k} < c \text{ при } k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

В случае (12) имеем

$$\frac{\varepsilon_k}{\left\| \tilde{x}(0) - x_k(0) \right\|} \to 0 \ 345 \ k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому, учитывая, что

$$v_k(T) - v_k(t) = \varepsilon_k \int_t^T \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, v_k(\tau)) d\tau, \tag{14}$$

вправе перейти к пределу при $k \to \infty$ и $t = 0$ в (11), деленном на $\left\| \tilde{x}(0) - x_k(0) \right\|$, и получить

$$(\Omega'_{(3)}(T, 0, \tilde{x}(0)) - I)l = 0.$$

Таким образом, в случае (12) выполнено утверждение (6) теоремы 1, а в противном случае — утверждение (13). Значит альтернатива теоремы 1 справедлива.

Предположим теперь, что последовательность $\left\{ \dfrac{\tilde{x}(0) - x_k(0)}{\varepsilon_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}(0) - v_k(t)}{\varepsilon_k} = \frac{\tilde{x}(0) - x_k(0) + v_k(0) - v_k(t)}{\varepsilon_k} &= \\ = \frac{\tilde{x}(0) - x_k(0)}{\varepsilon_k} - \int_0^t \Upsilon(\tau, v_k(\tau)) d\tau&, \end{aligned} \tag{15}$$

то последовательность $\left\{\dfrac{\tilde{x}(0)-\Omega(0,t,x_k(t))}{\varepsilon_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ также сходится. Полагая $h(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\tilde{x}(0)-\Omega(0,t,x_k(t))}{\varepsilon_k}$ и учитывая формулу (14), перейдем к пределу в (11), деленном на ε_k, в результате получим

$$-h(t)=-\Omega'_{(3)}(T,0,\tilde{x}(0))h(t)+$$
$$+\Omega'_{(3)}(T,0,\tilde{x}(0))\int_t^T\Upsilon(\tau,\tilde{x}(0))d\tau+\int_0^t\Upsilon(\tau,\tilde{x}(0))d\tau,$$

что означает (8).

Теорема доказана полностью.

В случае, когда порождающая система (2) автономна, для T-периодических решений возмущенной системы

$$\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(t,x,\varepsilon) \tag{16}$$

получаем следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие (4) и цикл $\tilde{x}$ является простым. Пусть выполнено условие (5) и l — вектор, о котором говорится в этом условии. Тогда, либо $l=\lambda\dot{\tilde{x}}(0)$, где $\lambda\neq 0$, либо существует константа $c>0$ такая, что*

$$\left\|\tilde{x}(t)-x_k(t)\right\|\le c\varepsilon_k,\ \ k\in\mathbb{N}. \tag{17}$$

Для частного случая $t=T$ доказательство теоремы 1 было опубликовано автором в [5].

В следующем пункте главы предлагается оценка для расстояния между траекториями решений x_k и $\tilde{x}$, но при этом дополнительно предполагается, что цикл $\tilde{x}$ простой.

3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНОЕ T-ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПРОСТЫМ ЦИКЛОМ

В настоящем пункте предполагается, что цикл $\tilde{x}$ является простым. В сделанном предположении сопряженная система

$$\dot{z}=-(f'(\tilde{x}(t)))^*z \tag{18}$$

допускает $n-1$ линейно-независимых не T-периодических решений $z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}$, причем указанные решения всегда могут быть выбраны так, что (см. [9], формула 2.13)

$$\left\langle\dot{\tilde{x}}(0),z_i(0)\right\rangle=0,\ \ t\in\mathbb{R},\ \ i\in\overline{1,n-1}. \tag{19}$$

Пусть $Z_{n-1}(t)$ — $n\times n-1$-матрица задаваемая формулой $Z_{n-1}(t)=(z_1(t),z_2(t),\ldots,z_{n-1}(t))$. Введем функцию $M^{\perp}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n-1}$ как

$$M^{\perp}(s)=\int_{s-T}^{s}Z^*_{n-1}(\tau)g(\tau,\tilde{x}(\tau),0)d\tau.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (4). Тогда для любого $\theta\in[0,T]$ имеем*

$$\begin{aligned}&Z^*_{n-1}(\theta)(x_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))-\tilde{x}(\theta))=\\&=\varepsilon_k DM^{\perp}(\theta)+o(\varepsilon_k),\end{aligned} \tag{20}$$

где D — невырожденная $(n-1)\times(n-1)$-матрица и $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)\to 0$ при $k\to\infty$ равномерно по отношению к $\theta\in[0,T]$. Более того, ${}_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))\in$ $\in I(\theta,B_1^{n-1}(0))$, $\theta\in[0,T]$, где $I(\theta,\cdot):\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ — гладкая поверхность, трансверсально пересекающая цикл $\tilde{x}$ в точке $\tilde{x}(\theta)$.

Для доказательства теоремы 2 определим, во-первых, функцию $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)$, поверхность $I(\theta,\cdot)$ и установим некоторые их свойства.

Обозначим через $Y_{n-1}(t)=(y_1(t),\ldots,y_{n-1}(t))$ первые $n-1$ столбцов матрицы $\left((Z_{n-1}(t),\dot{\tilde{z}}(t))^{-1}\right)^*$, где $\tilde{z}$ — T-периодическое решение системы (18), удовлетворяющее

$$\left\langle\dot{\tilde{x}}(t),\tilde{z}(t)\right\rangle=1,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{21}$$

Последний выбор возможен (см. [9], формула 2.13).

Лемма 1. *Предположим (19) и (20). Тогда*

1) $\left((Z_{n-1}(t),\tilde{z}(t))^{-1}\right)^*=\left(Y_{n-1}(t),\dot{\tilde{x}}(t)\right)$, $t\in\mathbb{R}$;

2) *любая функция из* $\{y_1,\ldots,y_{n-1}\}$ *не* T*-периодична;*

3) $Z^*_{n-1}(t)=\tilde{D}Z^*_{n-1}(t+T)$, $t\in\mathbb{R}$,

где $\tilde{D}$ *— постоянная* $(n-1)\times(n-1)$*-матрица, собственные значения которой отличны от* $+1$.

Доказательство. Так как $\left((Z_{n-1}(t),\tilde{z}(t))^{-1}\right)^*$ — фундаментальная матрица T-периодической линейной системы $\dot{y}=f'(\tilde{x}(t))y$ (см. [1], Гл. III, лемма § 12), то, пользуясь теорией Флоке, возможно записать следующую формулу (см. [1], Гл. III, § 15)

$$\left((Z_{n-1}(t),\tilde{z}(t))^{-1}\right)^*=\Phi(t)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\Lambda t}&0\\0&1\end{pmatrix}S,\ \ t\in\mathbb{R}, \tag{22}$$

где $\Phi(t)$ — T-периодическая $n\times n$ матрица Флоке, Λ — $(n-1)\times(n-1)$ невырожденная матрица и S — подходящая невырожденная $n\times n$-матрица. В силу (19) и (21) последний столбец матрицы $\left((Z_{n-1}(t),\tilde{z}(t))^{-1}\right)^*$ — это $\dot{\tilde{x}}(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Из этого утверждения следует, что S имеет вид $S=\left(S_{n-1},\begin{pmatrix}0_{n-1\times 1}\\s_0\end{pmatrix}\right)$, где S_{n-1} — $n\times(n-1)$-матрица и $s_0\neq 0$. Из этого мы можем заключить, что матрица S_{n-1} не содержит линейно-зависимых с $\begin{pmatrix} 0_{n-1\times 1} \\ s_0 \end{pmatrix}$ столбцов. Следовательно, по крайней мере одна не n-я компонента любого столбца S_{n-1} является ненулевой, что, очевидно, завершает доказательство второго утверждения леммы.

Для доказательства третьего утверждения леммы заметим, что формула (22) позволяет утверждать, что

$$\begin{pmatrix} e^{\Lambda T} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S\left((Z_{n-1}(t+T), \tilde{z}(t+T))^{-1}\right)^* = = S\left((Z_{n-1}(t), \tilde{z}(t))^{-1}\right)^*, \ t \in \mathbb{R}.$$

Но из последней формулы следует, что

$$e^{\Lambda T} S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_{n-1}^*(t+T) = S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}} Z_{n-1}^*(t),$$

где через $S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ обозначена матрица, составленная из первых $n-1$ строк матрицы S_{n-1}. Таким образом, для завершения доказательства третьего утверждения достаточно положить

$$\tilde{D} := \left(S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right)^{-1} e^{\Lambda T} S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}},$$

при этом обращение матрицы $S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ возможно в силу обратимости матрицы S и установленного выше ее вида.

Лемма доказана.

Определим непрерывно дифференцируемые функции $h, I : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ как

$$h(\theta, r) = \tilde{x}(\theta) + Y_{n-1}(\theta) r,$$
$$I(\theta, r) = \Omega(T, 0, h(\theta, r)).$$

Лемма 2. *Предположим (19) и (21). Тогда* $\tilde{x}(\theta) \notin I_r'(\theta, 0)\mathbb{R}^{n-1}$ *при каждом* $\theta \in [0, T]$.

Доказательство. Предположим противное, тогда существует $r \in \mathbb{R}^{n-1}$, $r \neq 0$ такое, что $\tilde{x}(\theta) = I_r'(\theta, 0) r$. Имеем

$$\tilde{x}(\theta) = I_r'(\theta, 0) r =$$
$$= \Omega_{(3)}'(T, 0, h(\theta, 0)) Y_{n-1}(\theta) r = Y_{n-1}(\theta + T) r,$$
$$\tilde{x}(\theta - T) = Y_{n-1}(\theta) r.$$

Но $\tilde{x}(\theta) = \tilde{x}(\theta - T)$, и получаем противоречие с утверждением леммы 1.

Лемма доказана.

Следствие 2. *Предположим, что $T > 0$ — наименьший период цикла $\tilde{x}$. Тогда существует $r_0 > 0$ такое, что*

$$I\left(\theta, B_{r_0}(0)\right) \cap \tilde{x}\left([0, T]\right) = \left\{\tilde{x}(\theta)\right\}.$$

Следствие 3. *Предположим, что $T > 0$ — наименьший период цикла $\tilde{x}$. Тогда существует $k_0 > 0$ такое, что*

$$I\left(\theta, B_r(0)\right) \cap x_{\varepsilon_k}\left([0, T]\right) =$$
$$= \left\{x_{\varepsilon_k}(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta))\right\}, \ k > k_0,$$

где $\Delta_{\varepsilon_k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по отношению к $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 2. Сделаем в системе (1) замену переменных $v_k(t, \theta) = = \Omega(0, t, x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta))$, где $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)$ — числа, о которых говорится в следствии 3. Заметим, что $x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) = \Omega(t, 0, v_k(t, \theta))$ и, таким образом,

$$\dot{x}_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) = f(\Omega(t, 0, v_k(t, \theta)) + +\Omega_\xi'(t, 0, v_k(t, \theta))(v_k)_t'(t, \theta). \tag{23}$$

С другой стороны, из (1) имеем

$$\dot{x}_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) = = f(\Omega(t, 0, v_k(t, \theta))) + \varepsilon_k g(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + +\theta, \Omega(t, 0, v_k(t, \theta)), \varepsilon_k). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что

$$(v_k)_t'(t, \theta) = \varepsilon_k \left(\Omega_\xi'(t, 0, v_k(t, \theta))\right)^{-1} g(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + +\theta, \Omega(t, 0, v_k(t, \theta)), \varepsilon_k),$$

и так как

$$v_k(0, \theta) = x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) =$$
$$= x_k(T - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) = \Omega(T, 0, v_k(T, \theta)),$$

окончательно получаем

$$v_k(t, \theta) = \Omega(T, 0, v_k(T, \theta)) + +\varepsilon_k \int_0^t \left(\Omega_\xi'(\tau, 0, v_k(\tau, \theta))\right)^{-1} \circ \circ g(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta, \Omega(\tau, 0, v_k(\tau, \theta)), \varepsilon_k) d\tau. \tag{25}$$

Так как $v_k(t, \theta) \to \tilde{x}(\theta)$ при $k \to \infty$ можем записать $v_k(t, \theta)$ в виде

$$v_k(t, \theta) = \tilde{x}(\theta) + \varepsilon_k \mu_k(t, \theta). \tag{26}$$

Докажем теперь, что функции μ_k равномерно ограниченны по отношению к $k \in \mathbb{N}$. Для этого, во-первых, вычтем $\tilde{x}(\theta)$ из обеих частей (25), получив

$$\varepsilon_k \mu_k(t, \theta) = \varepsilon_k \Omega_\xi'(T, 0, \tilde{x}(\theta)) \mu_k(T, \theta) + +o(\varepsilon_k \mu_k(T, \theta)) + +\varepsilon_k \int_0^t \left(\Omega_\xi'(\tau, 0, v_k(\tau, \theta))\right)^{-1} g(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + +\theta, \Omega(\tau, 0, v_k(\tau, \theta)), \varepsilon_k) d\tau. \tag{27}$$

Так как $x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) \in I\left(\theta, B_{r_0}^{n-1}(0)\right)$, то по определению I существует $r_k(\theta) \in B_{r_0}^{n-1}(0)$ такое, что

$$x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) = \Omega(T,0,h(\theta, r_k(\theta))), \quad (28)$$

причем на основании (4) имеем

$$r_k(\theta) \to 0 \text{ 345 } k \to \infty. \quad (29)$$

Пользуясь равенством (28), получаем следующее представление для $\varepsilon_k\mu_k$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k\mu_k(T,\theta) &= \nu_k(T,\theta) - \tilde{x}(\theta) = \\ &= \Omega(0,T,x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta)) - \tilde{x}(\theta) = \\ &= \Omega(0,T,\Omega(T,0,h(\theta,r_k(\theta)))) - \tilde{x}(\theta) = \\ &= h(\theta,r_k(\theta)) - \tilde{x}(\theta) = Y_{n-1}(\theta)r_k(\theta). \end{aligned} \quad (30)$$

Следовательно, формула (27) при $t = T$ может быть переписана как

$$\begin{aligned} Y_{n-1}(\theta)r_k(\theta) &= Y_{n-1}(T+\theta)r_k(\theta) + \\ &+ o(Y_{n-1}(\theta)r_k(\theta)) + \\ &+ \varepsilon_k \int_0^T \left(\Omega'_\xi(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta))\right)^{-1} g(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \\ &+ \theta, \Omega(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta)),\varepsilon_k)d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

На основании (30) сейчас будет установлено существование такого $c > 0$, что

$$\| r_k(\theta) \| \le \varepsilon_k c, \ k \in \mathbb{N}, \ \theta \in [0,T]. \quad (31)$$

Предположим противное, тогда можем считать, что $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $\theta_k \to \theta_0$ при $k \to \infty$, — такая последовательность, что $\| r_k(\theta_k) \| = \varepsilon_k c_k$, где $c_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Положим $q_k = \dfrac{r_k(\theta_k)}{\| r_k(\theta_k) \|}$, тогда из (30) имеем

$$\begin{aligned} Y_{n-1}(\theta_k)q_k &= Y_{n-1}(T+\theta_k)q_k + \\ &+ \frac{o(Y_{n-1}(\theta_k)r_{\varepsilon_k}(\theta_k))}{\| r_{\varepsilon_k}(\theta_k) \|} + \\ &+ \frac{1}{c_k}\int_0^t \left(\Omega'_\xi(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta_k))\right)^{-1} g(\tau - \theta_0 + \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_k) + \\ &+ \theta_k, \Omega(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta_k)),\varepsilon_k)d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится, положим $q_0 = \lim_{k\to\infty} q_k$, тогда $\| q_0 \| = 1$. С другой стороны, из (32) имеем $Y_{n-1}(\theta_0)q_0 = Y_{n-1}(T+\theta_0)q_0$, то есть приходим к противоречию с утверждением 2 леммы 1. Таким образом, (31) выполнено для некоторого $c > 0$ и функции μ_k равномерно ограниченны по отношению к $k \in \mathbb{N}$. Из (26) также заключаем

$$x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \tilde{x}(t+\theta) = \varepsilon_k\mu_k(t,\theta). \quad (33)$$

Следовательно, $x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) \to \tilde{x}(\theta)$ со скоростью $\varepsilon_k > 0$.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается установить (20). Для этого введем новые функции $a_k : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $b_k : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$ согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_k(t,\theta) &= \tilde{z}^*(t+\theta)\mu_k(t,\theta), \\ b_k(t,\theta) &= Z_{n-1}^*(t+\theta)\mu_k(t,\theta). \end{aligned} \quad (34)$$

Пользуясь утверждением 1 леммы 1, можем представить $x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \tilde{x}(t+\theta)$ в виде

$$\begin{aligned} & x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \tilde{x}(t+\theta) = \\ &= \varepsilon_k \dot{\tilde{x}}(t+\theta)a_k(t,\theta) + \varepsilon_k Y_{n-1}(t+\theta)b_k(t,\theta). \end{aligned} \quad (35)$$

Вычитая (2), где $x(t)$ заменено функцией $\tilde{x}(t+\theta)$, из (1), где $x(t)$ заменено функцией $x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta)$, получаем

$$\begin{aligned} & \dot{x}_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \dot{\tilde{x}}(t+\theta) = \\ &= f'(\tilde{x}(t+\theta))(x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \tilde{x}(t+\theta)) + \\ &+ \varepsilon_k g(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \\ &+ \theta, x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta), \varepsilon_k) + \tilde{o}_t(\varepsilon_k), \end{aligned} \quad (36)$$

где функция $\tilde{o}_t(\cdot)$ имеет те же свойства, что и функция $o(\cdot)$, введенная ранее, более того $\tilde{o}_{t+T}(\cdot) = \tilde{o}_t(\cdot)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Подставляя (35) в (36) и учитывая, что

$$\begin{aligned} f'(\tilde{x}(t+\theta))\varepsilon_k \dot{\tilde{x}}(t+\theta)a_k(t,\theta) &= \\ = \varepsilon_k \ddot{\tilde{x}}(t+\theta)a_k(t,\theta) & \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f'(\tilde{x}(t+\theta))\varepsilon_k Y_{n-1}(t+\theta)b_k(t,\theta) &= \\ = \varepsilon_k \dot{Y}_{n-1}(t+\theta)b_k(t,\theta), & \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon_k \dot{\tilde{x}}(t+\theta)(a_k)'_t(t,\theta) + \\ &+ \varepsilon_k \dot{Y}_{n-1}(t+\theta)(b_k)'_t(t,\theta) = \\ &= g(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta, x_k(t - \\ &- \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta), \varepsilon_k) + \tilde{o}_t(\varepsilon_k). \end{aligned}$$

Из предыдущего равенства имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon_k \left(b_k\right)_t(t,\theta) = \\ &= \varepsilon_k Z_{n-1}(t+\theta)g(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \\ &+ \theta, x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta), \varepsilon_k) + \\ &+ Z_{n-1}(t+\theta)\tilde{o}_t(\varepsilon_k) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$b_k(0,\theta) = b_k(-T,\theta) + \int_{-T}^{0} Z_{n-1}^*(\tau+\theta)g(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta, x_k(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta), \varepsilon_k)d\tau + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}. \quad (37)$$

Из (37) и утверждения 3 леммы 1 получаем

$$b_k(0,\theta) = (I - \widetilde{D})^{-1} \int_{-T}^{0} Z_{n-1}^*(\tau+\theta) \times g(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta, x_k(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta), \varepsilon_k)d\tau + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \quad (38)$$

или, вводя замену переменных $\tau + \theta = s$ в интеграле,

$$b_k(0,\theta) = (I - \widetilde{D})^{-1} \int_{\theta-T}^{\theta} Z_{n-1}^* g(s, x_k(s), \varepsilon_k)d\tau + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}.$$

С другой стороны, из (35) имеем

$$\left\langle z_i(t+\theta), x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) - \tilde{x}(t+\theta)\right\rangle = \varepsilon_k b_k(t,\theta)$$

и, таким образом, для завершения доказательства достаточно положить $D := (I - \tilde{D})^{-1}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые приложения формулы (20) к описанию поведения решений x_k, когда $k \to \infty$. Ниже $\angle(a,b)$ — угол между векторами $a, b \in \mathbb{R}^n$, принадлежащий отрезку $[0,\pi]$.

Следствие 4. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Тогда для любых* $i \in \overline{1, n-1}$ *и* $\theta \in [0,T]$ *таких, что* $M_i^\perp(\theta) \neq 0$, *существует* $j \in \overline{1,n-1}$, *при котором*

$$\cos\angle(z_j(\theta), x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)) \neq 0$$

для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство следствия вытекает из формулы

$$\|z_i(\theta)\| \cdot \left\|x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right\| \times \cos\angle\left(z_i(\theta), x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right) = \left[\varepsilon_k DM^\perp(\theta)\right]^i + o(\varepsilon_k), \quad (38)$$

получаемой подстановкой выражения

$$\left\langle z_i(\theta), x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right\rangle = \|z_i(\theta)\| \cdot \left\|x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right\| \times \cos\angle\left(z_i(\theta), x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right)$$

в главную формулу (20). Действительно, если $M_i^\perp(\theta) \neq 0$, то существует $j \in \overline{1,n-1}$ такое, что $\left[DM^\perp(\theta)\right]^j \neq 0$.

Следующий результат является непосредственным следствием формулы (38).

Следствие 5. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Если существует по крайней мере одно* $i_* \in \overline{1,n-1}$ *такое, что* $M_{i_*}^\perp(\theta) \neq 0$, *то*

$$c_1\varepsilon_k \leq \left\|x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right\| \leq c_2\varepsilon_k$$

для некоторых $0 < c_1 \leq c_2$, *любых* $\theta \in [0,T]$ *и* $k \geq k_0$, *где* $k_0 \in \mathbb{N}$ *достаточно велико.*

Учитывая следствие 3, можем получить теперь следующий факт.

Следствие 6. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Если существует по крайней мере одно* $i_* \in \overline{1,n-1}$ *такое, что* $M_{i_*}^\perp(\theta) \neq 0$, *то*

$$x_k(t) \neq \tilde{x}(\theta) \text{ для любых } t, \theta \in [0,T]$$

при условии, что $k \in \mathbb{N}$ *достаточно велико.*

Доказательство. Пусть $k_0 > 0$ — то, о котором говорится в следствии 5, и предположим, что существуют ε_{k_*}, $k_* > k_0$, $\theta_*, t_* \in [0,T]$ такие, что $x_{k_*}(t_*) = \tilde{x}(\theta_*)$. Но, согласно следствию 3, должно быть $t_* = x_{k_*}(\theta_* - \Delta_{\varepsilon_{k_*}}(\theta_*))$, что противоречит утверждению следствия 5.

Следствие доказано.

Для того, чтобы получить теперь достаточные условия, обеспечивающие сходимость со скоростью большей, чем $\varepsilon_k > 0$, нам необходим следующий вспомогательный результат.

Лемма 3. *Пусть* $k_0 \in \mathbb{N}$ *достаточно велико. Тогда для любых* $k > k_0$ *и* $\theta \in [0,T]$, *удовлетворяющих условию*

$$x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) \neq \tilde{x}(\theta),$$

существует $i_* \in \overline{1,n-1}$ *такое, что*

$$\left|\cos\angle\left(z_{i_*}(\theta), x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right)\right| \geq \alpha_*,$$

где $\alpha_* > 0$ *не зависит от* k *и* θ.

Доказательство. Предположим противное, тогда можем считать, что последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $\theta_k \to \theta_0$ при $k \to \infty$, $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [-1,1]$, $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$, $r_k \to 0$ при $k \to \infty$ таковы, что

$$\cos\angle(z_i(\theta), I(\theta_k, r_k) - I(\theta_k, 0)) = \alpha_k, \ i \in \overline{1,n-1},$$

или равносильно

$$\frac{\langle z_i(\theta_k), I(\theta_k, r_k) - I(\theta_k, 0)\rangle}{\|z_i(\theta_k)\| \cdot \|I(\theta_k, r_k) - I(\theta_k, 0)\|} = \alpha_k,$$
$$i \in \overline{1, n-1},$$

поэтому

$$\frac{\left\langle z_i(\theta_n), I'_r(\theta_k, r_k)\frac{r_k}{\|r_k\|} + \frac{o(r_k)}{\|r_k\|}\right\rangle}{\|z_i(\theta_k)\| \cdot \left\| I'_r(\theta_k, r_k)\frac{r_k}{\|r_k\|} + \frac{o(r_k)}{\|r_k\|}\right\|} = \alpha_k, \quad (39)$$
$$i \in \overline{1, n-1}.$$

Без ограничения общности можем считать, что $\frac{r_k}{\|r_k\|}$ сходится при $k \to \infty$. Положим $q_0 = \lim_{k\to\infty} \frac{r_k}{\|r_k\|}$, тогда $\|q_0\| = 1$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (39), получаем

$\langle z_i(\theta_0), I'_r(\theta_0, 0)q_0\rangle = 0$ для любых $i \in \overline{1, n-1}$. (40)

Разложим $I'_r(\theta_0, 0)q_0$ следующим образом:

$$I'_r(\theta_0, 0)q_0 = y_1(\theta_0)a^1 + \ldots + y_{n-1}(\theta_0)a^{n-1} + \tilde{x}(\theta)a^n.$$

Из (40) имеем, что $a^1 = \ldots = a^{n-1} = 0$ и, таким образом, $I'_r(\theta, 0)q_0 = a^n \tilde{x}(\theta)$, что противоречит утверждению леммы 2.

Лемма доказана.

Объединив теорему 2 и лемму 3, получаем утверждение.

Следствие 7. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Предположим, что $M_i^{\perp}(\theta) = 0$ для любого $i \in \overline{0, n-1}$. Тогда*

$$\left\| x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \tilde{x}(\theta)\right\| = o(\varepsilon_k).$$

Доказательство. Предположим противное, тогда можем считать, что последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, T]$, $\theta_k \to \theta_0$ при $k \to \infty$ и $c_* > 0$ таковы, что

$$\frac{\left\| x_{\varepsilon_k}(\theta_k - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_k)) - \tilde{x}(\theta_k)\right\|}{\varepsilon_k} \geq c_*. \quad (41)$$

Из (41) имеем, что предположения леммы 3 удовлетворены, пусть $i_* \in \overline{1, n-1}$ — то число, о котором говорится в этой лемме. Но (41) противоречит соотношению (38), когда $i := i_*$, что завершает доказательство требуемого утверждения.

Следствие доказано.

Следствия 4 и 7 позволяют сформулировать следующую альтернативу.

Следствие 8. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Положим $\theta_* \in [0, T]$. Тогда либо существует $i_* \in \overline{1, n-1}$ такое, что*

$$\cos\angle\left(z_{i_*}(\theta), x_k(\theta_* - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_*)) - \tilde{x}(\theta_*)\right) \neq 0$$

для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$, либо

$$\left\| x_k(\theta_* - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_*)) - \tilde{x}(\theta_*)\right\| = o(\varepsilon_k).$$

Близкий теореме 2 результат предложен в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 480 с.
2. *Feckan M.* Bifurcation of periodic solutions in differential in clusions / M. Feckan // Appl. Math. — 1997. — Vol. 42. — P. 369—393.
3. *Hale J.K.* Bifurcation from families of periodic solutions / J. K. Hale, P. T'boas // Classical and celestial mechanics. — Princeton Univ. Press, 2002. — P. 351—382.
4. *Каменский М.И.* Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Каменский, О. Ю. Макаренков, П. Нистри // ДАН. — 2003. — Т. 388, № 4. — С. 439—442.
5. *Kamenskii M.* A continuation principle for a class of periodically perturbed autonomous systems / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Math. Nachr. — 2008. — Vol. 281, № 1. — P. 42—61.
6. *Loud W.S.* Periodic solutions of a perturbed autonomous system / W. S. Loud // Ann. of Math. — 1959. — Vol. 70. — P. 490—529.
7. *Макаренков О.Ю.* Об асимптотическом поведении периодических решений одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / О. Ю. Макаренков // Труды математического факультета ВГУ. — Воронеж, 2002. — № 7. — С. 83—86.
8. *Макаренков О.Ю.* Индекс Пуанкаре и периодические решения возмущенных автономных систем / О. Ю. Макаренков // Труды Моск. мат. общ., в печати.
9. *Makarenkov O.* Periodic solutions for planar autonomous systems with nonsmooth periodic perturbations / O. Makarenkov, P. Nistri // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 338, № 2. — P. 1401—1417.
10. *Makarenkov O.* On the rate of convergence of periodic solutions in perturbed autonomous systems as the perturbation vanishes / O. Makarenkov, P. Nistri // Commun. Pure Appl. Anal. — 2008. Vol. 7, № 1. — P. 49—61.
11. *Малкин И.Г.* К теории периодических решений Пуанкаре / И. Г. Малкин // ПММ. — 1949. — Т. 13, № 6. — С. 633—646.
12. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости / М. Розо. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

Макаренков Олег Юрьевич — к.ф.-м.н., научный сотрудник, НИИ математики ВГУ, т. 8 950 755 26 11, e-mail: omakarenkov@math.vsu.ru

Makarenkov Oleg Yu. — research assistant, Scientific Research Institute of Mathematics of Voronezh State University; tel.: 89507552611, e-mail: omakarenkov@math.vsu.ru