УДК 517.986

ОБ ОБРАТИМОСТИ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СЕМЕЙСТВОМ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ОТНОШЕНИЯ*

В. Б. Диденко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.03.2008 г.

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия обратимости и фредгольмовости операторов, порожденных семейством эволюционных операторов и краевыми условиями, заданными с помощью линейного отношения.

Ключевые слова: семейство эволюционных операторов, линейное отношение, краевые условия, обратимость, фредгольмовость.

Abstract. The necessary and sufficient conditions of reversibility and Fredholm property of operators, generated by evolutional operators family and boundary condition, given using the linear relation, are found.

Keywords: evolutional operators family, linear relation, boundary condition, Fredholm property, reversibility.

НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Пусть X — комплексное банахово пространство. Любое линейное подпространство $\Gamma \subseteq X \times X$ называется *линейным отношением* на пространстве X. Множество всех замкнутых линейных отношений на X будем обозначать $LRC(X)$. Каждое линейное отношение $\Gamma \in LRC(X)$ является графиком некоторого линейного многозначного отображения. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ Γ. Символом $EndX$ будем обозначать алгебру линейных ограниченных операторов, определенных на всем X. Используемые далее понятия из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) можно найти в монографии [1] и в статье [2].

Областью определения $D(\Gamma)$ отношения $\Gamma \in LRC(X)$ называется подпространство вида $D(\Gamma) = \{x \in X : \exists y : (x, y) \in \Gamma\}$.

Образом $\operatorname{Im}\Gamma$ отношения $\Gamma \in LRC(X)$ называется подпространство вида $\operatorname{Im}\Gamma = \{y \in X : \exists x : (x, y) \in \Gamma\}$.

Ядром линейного отношения Γ из $LRC(X, Y)$ называется множество $Ker\Gamma = \{x \in D(\Gamma) : (x, 0) \in \Gamma\}$.

Для отношения $\Gamma \in LR(X)$ и элемента $x \in X$ определим множество вида $\Gamma x = \{y : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. В частности, множество $\Gamma 0$ имеет вид $\Gamma 0 = \{y : (0, y) \in \Gamma\}$.

Суммой двух линейных отношений Γ_1, Γ_2 из $LRC(X)$ называется линейное отношение вида $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(\Gamma_1) \cap D(\Gamma_2), y \in \Gamma_1 x + \Gamma_1 x\}$. Здесь под $\Gamma_1 x + \Gamma_2 x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\Gamma_1 x, \Gamma_2 x$. Из этого определения следует, что $D(\Gamma_1 + \Gamma_2) = D(\Gamma_1) \cap D(\Gamma_2)$.

Обратным к линейному отношению $\Gamma \in LRC(X)$ называется линейное отношение $\Gamma^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in \Gamma\}$.

Отношение Γ из $LRC(X)$ называется *непрерывно обратимым,* если $\Gamma^{-1} \in EndX$, то есть $Ker\Gamma = \{0\}$ (отношение Γ инъективно) и $\operatorname{Im}\Gamma = X$ (отношение Γ сюрьективно).

Линейное отношение Γ из $LRC(X)$ называется *фредгольмовым,* если его ядро $Ker\Gamma$ конечномерно, образ $Im\Gamma$ замкнут и его коразмерность $\beta(\Gamma) = \operatorname{Codim}\operatorname{Im}\Gamma = \dim(X / \operatorname{Im}\Gamma)$ конечна. Число $ind\Gamma = \alpha(\Gamma) - \beta(\Gamma)$, где $\alpha(\Gamma) = \dim Ker\Gamma$, называется индексом фредгольмова отношения Γ.

ОПЕРАТОР $\mathcal{L}_\Gamma$ И ОТНОШЕНИЕ $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$

Символом Δ обозначим множество $[a, b] \times [a, b]$. Отображение $\mathcal{U} : \Delta \to EndX$ называется (сильно непрерывным) *семейством*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00131

эволюционных операторов на $[a,b]$, если выполнены следующие условия:

— $\mathcal{U}(t,t) = I$ — тождественный оператор для любого $t \in [a,b]$;

— $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$ $t,s,\tau \in [a,b]$;

— отображение $(t,s) \mapsto \mathcal{U}(t,s)x : \Delta \to X$ непрерывно для любого $x \in X$.

Символом $L_p = L_p([a,b],X)$, $1 \le p \le \infty$ будем обозначать (банахово) пространство измеримых по Бохнеру функций, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b \|x(\tau)\|^p \, d\tau\right)^{1/p},$$

$$p \ne \infty, \ \ \|x\|_\infty = ess\sup_{\tau\in[a,b]}\|x(\tau)\|.$$

Подробное описание пространства L_p можно найти в книге [3].

Пусть Γ — произвольное линейное отношение из $LRC(X)$. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}_\Gamma : D(\mathcal{L}_\Gamma) \subset L_p \to L_p,$$

который определяется следующим образом. Непрерывная функция x, для которой $(x(a),x(b)) \in \Gamma$, включается в $D(\mathcal{L}_\Gamma)$, если существует функция $f \in L_p$, такая что верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t,a)x(a) + \int_a^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds, \ \ t \in [a,b]. \quad (1)$$

Далее полагается $\mathcal{L}_\Gamma x = f$.

Лемма 1. *Оператор* $\mathcal{L}_\Gamma$ *определен корректно.*

Доказательство. Для доказательства корректности определения достаточно показать, что если пары функций (x,f_1), (x,f_2), где x непрерывна, $f_1, f_2 \in L_p$, удовлетворяют равенству 1, то $f_1 = f_2$. Пусть пары функций (x,f_1), (x,f_2) удовлетворяют равенству 1. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^t \mathcal{U}(t,s)(f_1(s) - f_2(s))ds = 0, \forall t \in [a,b].$$

Умножим последнее равенство на оператор $\mathcal{U}(b,t)$. Получим равенство

$$\int_a^t \mathcal{U}(b,s)(f_1(s) - f_2(s))ds = 0, \forall t \in [a,b].$$

Функция $g:[a,b] \to X$, определенная по правилу $g(t) = \int_a^t \mathcal{U}(b,s)(f_1(s) - f_2(s))ds, \ \ t \in [a,b]$, дифференцируема и ее производная почти всюду равна $\mathcal{U}(b,t)(f_1(t) - f_2(t))$. Поскольку $g(t) = 0$, то $\mathcal{U}(b,t)(f_1(t) - f_2(t)) = 0$ почти всюду. Так как $Ker\mathcal{U}(b,t) = \{0\}, \forall t \in [a,b]$, то $f_1(t) = f_2(t)$ почти всюду. Лемма доказана.

Пример 2. *Одним из примеров рассматриваемых операторов является дифференциальный оператор* $L : D(L) \subset L_p \to L_p$, *где* $D(L) = \{x \in W_p^1[a,b] : (x(a),x(b)) \in \Gamma\}$, $\Gamma \in LRC(X)$, *оператор определен по правилу* $Lx = \dot{x} - A(t)x$, *функция* $A:[a,b] \to EndX$ *принадлежит* $L_1([a,b],EndX)$. *Тогда существует оператор Коши* $U:[a,b] \to EndX$ (см. [4]), *удовлетворяющий уравнению*

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U$$

и условию $U(a) = I$. *Тогда любая пара* (x,f) *такая, что* $Lx = f$, *удовлетворяет равенствам 1, где эволюционное семейство определяется равенством* $\mathcal{U}(t,s) = U(t)U^{-1}(s), \forall (t,s) \in \Delta$.

Введем в рассмотрение следующие два оператора $\mathcal{B}: X \to L_p$, $\mathcal{C}: L_p \to X$ с помощью равенств

$$(\mathcal{B}x)(s) = \frac{1}{b-a}\mathcal{U}(s,b) \ x, s \in [a,b], \ \ x \in X. \quad (2)$$

$$\mathcal{C}f = \int_a^b \mathcal{U}(b,s)f(s)ds, \ \ f \in L_p. \quad (3)$$

Лемма 3. *Операторы* $\mathcal{B}$ *и* $\mathcal{C}$ *ограничены.*

Доказательство. По определению эволюционного семейства $\mathcal{U}$ для любого элемента x из X функция $(t,s) \mapsto U(t,s)x : \Delta \to X$ является непрерывной, а значит она ограничена на Δ. Из принципа равномерной ограниченности (см. [5] теорема 11, С. 64—65) получаем, что существует такое число M, для которого $\| \mathcal{U}(t,s) \| \le M$, для любой пары $(t,s) \in \Delta$. Отсюда следует ограниченность операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.

Непосредственно из определения операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, следует следующая

Лемма 4. *Произведение операторов* $\mathcal{CB}$ *является тождественным оператором в* X.

Лемма 5. *Для оператора* $\mathcal{L}_\Gamma$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} Ker\mathcal{L}_\Gamma = \{x \in L_p : x(t) = \\ = \mathcal{U}(t,a)x_0, x_0 \in Ker(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))t \in [a,b]\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma = \{f \in L_p : \mathcal{C}f \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))\}. \quad (5)$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства (4). Возьмем произвольную функцию x из $Ker\mathcal{L}_\Gamma$. Тогда по определению оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ справедливо равенство $x(t) = U(t,a)x_0$, $t \in [a,b]$, для некоторого элемента x_0 из X. Так как $(x(a), x(b)) \in \Gamma$, то получим, что $(x_0, \mathcal{U}(b,a)x_0) \in \Gamma$, а значит $x_0 \in Ker(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$.

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ следует, что функция $x(t) = \mathcal{U}(t,a)x_0$, $t \in [a,b]$, принадлежит $Ker\mathcal{L}_\Gamma$, где x_0 из $Ker(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$. Таким образом, мы доказали равенство (4).

Докажем справедливость равенства (5). Пусть функция f из $\operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$. Тогда найдется непрерывная функция x, для которой выполняется равенство (1), и кроме того, $(x(a), x(b)) \in \Gamma$. Отсюда следует, что $(x(a), \mathcal{U}(b,a)x(a) + \mathcal{C}f) \in \Gamma$, а значит $\mathcal{C}f \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$.

Пусть теперь $\mathcal{C}f \in Im(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$. Рассмотрим функцию $x(t) = \mathcal{U}(t,a)x_0 + \int_a^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds$, $t \in [a,b]$, где $x_0 \in (\Gamma - \mathcal{U}(b,a))^{-1}(\mathcal{C}f)$. Для построенной таким образом функции x справедливо равенство (1), и кроме того $(x(a), x(b)) \in \Gamma$, а значит $\mathcal{L}_\Gamma x = f$. Следовательно $f \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$. Таким образом, мы доказали равенство (5). Лемма доказана.

Теорема 6. *Образ* $\operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$ *оператора* $\mathcal{L}_\Gamma$ *замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ* $\operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$ *отношения* $\Gamma - \mathcal{U}(b,a)$.

Доказательство. Пусть замкнут образ оператора $\mathcal{L}_\Gamma$. Покажем замкнутость образа отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b,a)$. Пусть (x_n) — сходящаяся к x_0 последовательность из $\operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$. Рассмотрим последовательность функций (f_n) из L_p, определенных по правилу $f_n = \mathcal{B}x_n$, $n \geq 1$.

Поскольку $\mathcal{C}f_n = x_n \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$, то $f_n \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$. Так как (f_n) сходится к функции $f_0 = \mathcal{B}x_0$, то в силу леммы **5**, замкнутости образа оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ и равенства $\mathcal{C}f_0 = x_0$ следует, что $x_0 \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$.

Пусть замкнут образ отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b,a)$. Покажем замкнутость образа оператора $\mathcal{L}_\Gamma$. Рассмотрим последовательность функций (f_n) из $\operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$, сходящуюся к функции f_0. Последовательность $x_n = \mathcal{C}f_n$, в силу леммы **5**, принадлежит подпространству $\operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$. Заметим, что (x_n) сходится к элементу $x_0 = \mathcal{C}f_0$. В силу замкнутости подпространства $\operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$ элемент $x_0 \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a)$, а значит $f_0 \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$ по лемме **5**. Теорема доказана.

Теорема 7. *Если* $\operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$ *— замкнутое дополняемое подпространство в* L_p *и* $\mathcal{F}_0$ *— некоторое замкнутое подпространство из* L_p, *для которого*

$$L_p = \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma \oplus \mathcal{F}_0, \qquad (6)$$

то пространство X представимо в виде

$$X = \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a)) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{F}_0), \qquad (7)$$

причем $\mathcal{C}(\mathcal{F}_0)$ — замкнутое подпространство в X.

Доказательство. Покажем сначала, что любой вектор x из X представим в виде $x = x_0 + x_1$, где x_0 из $\mathcal{C}(\mathcal{F}_0)$, x_1 из $\operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$. Из разложения (6) следует, что функция $\mathcal{B}x$ представима в виде $\mathcal{B}x = f_0 + f_1$, где f_0 из $\mathcal{F}_0$, а f_1 из $\operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$. Тогда по лемме **4** получаем, что $x = \mathcal{C}\mathcal{B}x = \mathcal{C}f_0 + \mathcal{C}f_1$. Так как $\mathcal{C}f_0 \in \mathcal{C}\mathcal{F}_0$, $\mathcal{C}f_1 \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$ (по лемме **5**), то в качестве x_0, x_1 можно взять $x_0 = \mathcal{C}f_0$, $x_1 = \mathcal{C}f_1$.

Покажем единственность разложения. Пусть вектор x также представим в виде $x = x_0' + x_1'$, где x_0' из $\in \mathcal{C}\mathcal{F}_0$, x_1' из $\operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$. Тогда существует такая функция f_0' из $\mathcal{F}_0$, что $x_0' = \mathcal{C}f_0'$. Поскольку $\mathcal{C}f_0 - \mathcal{C}f_0' = x_0 - x_0' = x_1 - x_1' \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$, то по лемме **5** получаем, что $f_0 - f_0' \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$. Из разложения (6) следует, что $f_0 = f_1'$.

Замкнутость пространства $\mathcal{C}(\mathcal{F}_0)$ следует из критерия Като (см. [6]; теорема 7.4.20). Теорема доказана.

Теорема 8. *Если* $\operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$ *— замкнутое дополняемое подпространство в* X *и* X_0 *— некоторое замкнутое подпространство из* X, *для которого*

$$X = \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a)) \oplus X_0, \qquad (8)$$

то L_p представимо в виде

$$L_p = \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma \oplus \mathcal{B}(X_0), \qquad (9)$$

где $\mathcal{B}(X_0)$ является замкнутым подпространством из L_p.

Доказательство. Докажем сначала, что любая функция f из L_p представима в виде $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in \mathcal{B}(X_0)$, $f_1 \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$. Из разложения (8) следует, что $\mathcal{C}f = x_0 + x_1$, где $x_0 \in X_0$, $x_1 \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$. В качестве функции f_0 возьмем функцию $f_0 = \mathcal{B}x_0$. Так как для функции $f_1 = f - f_0$ справедливо $\mathcal{C}f_1 = \mathcal{C}f - \mathcal{C}f_0 = x_1 \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$, то по лемме **5** получаем, что $f_1 \in \operatorname{Im}\mathcal{L}_\Gamma$.

Покажем, что полученное представление единственно. Пусть $f = f_0' + f_1'$, где $f_0' = \mathcal{B}x_0$, $x_0' \in X_0$, $f_1' \in Im\mathcal{L}_\Gamma$. Так как $x_0 - x_0' = \mathcal{C}(f_0 - f_0') = \mathcal{C}(f_1 - f_1') \in \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$, то из разложения (8) следует, что $x_0 = x_0'$, а значит $f_0 = f_0'$.

Замкнутость подпространства $\mathcal{B}(X_0)$ следует из критерия Като (см. [6]; теорема 7.4.20). Теорема доказана.

Введем в рассмотрение следующий линейный оператор $B : Ker(\Gamma - \mathcal{U}(b,a)) \to Ker\mathcal{L}_\Gamma$, определенный равенствами

$$(Bx_0)(t) = \mathcal{U}(t,a)x_0,$$
$$t \in [a,b], \ x_0 \in Ker(\Gamma - \mathcal{U}(b,a)). \qquad (10)$$

Из доказательства леммы 3 следует, что оператор B ограничен.

Лемма 9. *Ядра оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ и отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b,a)$ изоморфны, а их изоморфизм осуществляет оператор B.*

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из леммы 5.

Из леммы 9 и теорем 7, 8 следуют следующие теоремы

Теорема 10. *Оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимо отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b,a)$, и обратный оператор представим в виде $(\mathcal{L}_\Gamma^{-1}f)(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$, для любой функции $f \in L_p([a,b],X)$, где*

$$G(t,s) = \begin{cases} \mathcal{U}(t,a)(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))^{-1}\mathcal{U}(b,s) + \mathcal{U}(t,s), & s \le t, \\ \mathcal{U}(t,a)(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))^{-1}\mathcal{U}(b,s), & s > t. \end{cases} \qquad (11)$$

Теорема 11. *Оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b,a)$. Если один из них фредгольмов, то $\dim Ker\mathcal{L}_\Gamma = \dim Ker(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$, $\operatorname{Codim} \operatorname{Im} \mathcal{L}_\Gamma = \operatorname{Codim} \operatorname{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b,a))$, а значит и их индексы совпадают.*

Замечание 12 *Из равенств* (1), *определяющих оператор $\mathcal{L}_\Gamma$, следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I$ задается (с помощью тех же равенств) по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_\lambda : [a,b]\times[a,b] \to EndX$ вида*

$$\mathcal{U}_\lambda(t,s) = e^{\lambda(t-s)}\mathcal{U}(t,s), t, s \in [a,b]. \qquad (12)$$

Обозначим символом $\rho(\Gamma, \mathcal{U}(b,a))$ множество вида

$$\rho(\Gamma, \mathcal{U}(b,a)) =$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\Gamma - \lambda\mathcal{U}(b,a))^{-1} \in EndX\}. \qquad (13)$$

Из замечания 12 и теоремы 10 следует следующая теорема

Теорема 13 *Резольвентное множество $\rho(\mathcal{L}_\Gamma)$ оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ имеет вид*

$$\rho(\mathcal{L}_\Gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda(b-a)} \in \rho(\Gamma, \mathcal{U}(b,a))\}. \qquad (14)$$

Автор выражает благодарность А. Г. Баскакову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cross R.* Multivalued linear operators // New York: M. Dekker, 1998.

2. *Баскаков А.Г.* Линейные отношения в исследовании дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами // Вестник ВГУ, серия физ.-мат. 2007, вып. 2, С. 51—82.

3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. // М.: Иностранная литература, 1962.

4. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука, 1970.

5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. // М.: Иностранная литература, Т. 1, 1962.

6. *Кутателадзе С.С.* Основы функционального анализа // Изд-во ин-та математики, Новосибирск, 1995.

Диденко Владимир Борисович — студент кафедры математических методов исследований операций факультета ПММ. Тел. 8-920-404-53-46. E-mail: dor@mail.ru

Didenko Vladimir B. — student of Voronezh State University; e-mail: _dor_@mail.ru