ФИЗИКА

УДК 621.3.015.4

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ С КОНДУКТИВНОЙ СВЯЗЬЮ. НЕРАВЕНСТВО ВАЖЕВСКОГО

С. Ю. Алехин, Н. Д. Бирюк, Ю. Б. Нечаев

[*]ОАО Концерн «Созвездие»
Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 6.10.2008 г.

Аннотация. Параметрические радиоцепи могут быть описаны системами линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для таких систем существует проблема устойчивости, в общем виде пока не решенная. Здесь эта проблема рассмотрена применительно к системе двух связанных контуров с положительными, изменяющимися во времени по любым функциям параметрами. Для этого использовано неравенство Важевского. Предлагается повышение эффективности этого неравенства использованием особой нормировки исходного уравнения.

Ключевые слова: Параметрическая радиоцепь, линейная система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, проблема устойчивости, система двух связанных контуров, неравенство Важевского, нормировка уравнения.

Abstract. Time varying circuits may be written with systems of differential equations with varying coefficients. For this systems it is existed a problem of stability, generally for the present unsettled. Here this problem is considered conformably to system of two coupled circuits with positive, time varying according to arbitrary function parameters. For this purpose it is used the inequality of Wazhewski. This is proposed increasing the effectiveness of inequality by means of special rate setting of initial equation.

Key words: Time varying circuit, linear system of differential equations with varying coefficients, problem of stability, system of two coupled circuits, inequality of Wazhewski, rate settion of equation.

Во многих физических системах с сосредоточенными параметрами свободные процессы могут быть представлены векторными уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} = colon(x_1, x_2, ..., x_n)$ — неизвестный вектор-столбец любого порядка (здесь порядок его обозначен через n), $\mathbf{A}(t)$ — матрица системы порядка n × n. Векторные уравнения такого типа особенно широко применяются при анализе параметрических радиоцепей [1, 2]. Для них характерна весьма трудная для решения проблема устойчивости. Известно, что в диссипативных радиоцепях с положительными постоянными параметрами свободные процессы всегда затухающие. В аналогичных радиоцепях с изменяющимися во времени параметрами свободные процессы также могут быть затухающими, но могут быть и безгранично возрастающими. Разграничить эти случаи можно, применяя теорию устойчивости Ляпунова [3, 4]. В любом случае это — трудная задача. Первый метод Ляпунова исходит из того, что фундаментальная система решений векторного уравнения (1) известна. Чтобы обойти трудности получения такого решения, усилиями многих математиков построена качественная теория линейных систем (1). Эта теория в систематизированном виде изложена в монографии [4], где приведено большое число лемм, теорем, следствий, замечаний, уточнений и т.д., которые направлены на: а) упорядочение и классификацию систем типа (1), б) упорядочение и характеристику бесконечного множества решений каждой системы. Качественная теория линейных систем типа (1) систематизирует и представляет в удобном для восприятия виде огромный массив информации. Однако, извлечь из нее конструктивные предложения для анализа конкретных систем типа (1) нелегко. Неравенство Важевского [4] является исключением из этого правила, так как оно удобно для применения и не использует свойства решений системы (1). Однако, применительно к параметрическим радиоцепям оно малоэффективно, т.е. охватывает относительно небольшое количество частных случаев. Оказывается, однако, что можно, используя физические соображения, повысить эффективность неравенства Важевского.

Теорема Важевского предполагает, что в общем случае матрица системы (1) комплексная и состоит из непрерывных элементов во временном интервале $t_0 \le t < \infty$, где t_0 — любое. Как частный случай, она охватывает системы (1) с действительной матрицей.

В этой теореме используется понятие нормы вектора. Как известно, норма вводится неоднозначно. Для конкретности будем понимать под нормой вектора $\mathbf{x}(t) = colon(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ положительную функцию времени $|\mathbf{x}(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \ldots + x_n^2(t)}$. Доказано, что для системы (1) с оговоренными ограничениями в интервале $t_0 \le t < \infty$ справедливо неравенство Важевского

$$|x(t_0)| \exp \int_{t_0}^{t} \lambda(t_1) dt_1 \le |x(t)| \le |x(t_0)| \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda(t_1) dt_1, \quad (2)$$

где $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ — наименьший и наибольший характеристические корни эрмитово-симметризованной матрицы:

$$\mathbf{A}^H(t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^*(t)\right],$$

где $\mathbf{A}^*(t)$ — эрмитово-сопряженная матрица по отношению к матрице $\mathbf{A}(t)$ системы (1). Для ее получения нужно матрицу системы (1) транспонировать, затем заменить все ее элементы комплексно сопряженными. Для нас представляет интерес система (1) с действительной матрицей. В таком случае эрмитово-сопряженная матрица совпадает с транспонированной, а эрмитово-симметризованная с симметризованной матрицей $\mathbf{A}_S$ системы (1), т.е.

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}_S = \frac{1}{2}\left[\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right], \quad (3)$$

Характеристические корни матрицы $\mathbf{A}_S$ являются корнями алгебраического уравнения с зависимыми от времени коэффициентами

$$\det\left[\mathbf{A}_S(t) - \lambda \mathbf{I}\right] = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица n-го порядка.

Неравенства (2) даны в предположении, что $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ — действительны. Если они комплексны, то неравенства (2) заменяются неравенствами более общего вида

$$\begin{gathered} |x(t_0)| \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \lambda(t_1) dt_1 \le |x(t)| \le \\ \le |x(t_0)| \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \Lambda(t_1) dt_1 \end{gathered} \quad (5)$$

где $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ — характеристические корни эрмитово-симметризованной матрицы, соответственно, с наименьшей и наибольшей действительной частью.

Переходим к анализу нашей физической системы, системы двух связанных контуров с кондуктивной связью. За основу здесь берется система с внутрикондуктивной связью. Аналогичная система с внешнекондуктивной связью приводится к выбранной нами системе известным из электротехники преобразованием «треугольник-звезда». На рис. представлена схема анализируемой радиоцепи. Предполагается, что все элементы системы (C_1, G_1, L_1, C_2 и т.д.) положительны и изменяются во времени по любым непрерывным функциям. Интересуемся свободным процессом в данной системе. Уравнения свободного процесса получаются наиболее простыми, если в качестве определяющих функций выбрать заряды q_1, q_2 конденсаторов и магнит-

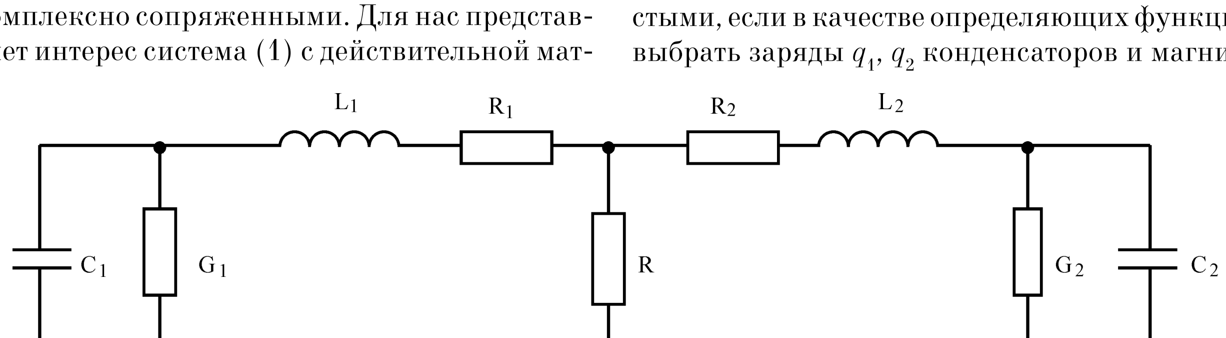

Рис. Система двух связанных контуров с внутрикондуктивной связью ные потоки ϕ_1, ϕ_2, сцепляющиеся с индуктивностями. Составленная на основе первого и второго законов Кирхгофа система уравнений свободных колебаний в радиоцепи по рисунку следующая:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= -\frac{G_1}{C_1}q_1 - \frac{1}{L_1}\phi_1\\
\frac{d\phi_1}{dt} &= \frac{1}{C_1}q_1 - \frac{R_1+R}{L_1}\phi_1 - \frac{R}{L_2}\phi_2\\
\frac{d\phi_2}{dt} &= -\frac{R}{L_1}\phi_1 - \frac{R_2+R}{L_2}\phi_2 + \frac{1}{C_2}q_2\\
\frac{dq_2}{dt} &= -\frac{1}{L_2}\phi_2 - \frac{G_2}{C_2}q_2
\end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Это — система уравнений типа (1), к ней можно применить неравенства Важевского (5) и на его основе получить достаточные условия устойчивости радиоцепи рис., которые дают гарантию того, что цепь не самовозбудится. Это достаточное условие вытекает из (5) и может быть выражено в виде неравенства

$$\operatorname{Re}\Lambda(t) < 0 \qquad (7)$$

при $t_0 \le t < \infty$, t_0 — любое, т.е. все характеристические корни симметризованной матрицы (1) имеют отрицательные действительные части (у корня Λ она наибольшая). Однако, исследование показало, что уравнение (6) неудобно для применения неравенства Важевского. Эффективность этого неравенства можно значительно усилить, если представить систему (6) в особым способом нормированном виде. Введем для каждого заряда q_1, q_2 и каждого магнитного потока ϕ_1, ϕ_2 свой индивидуальный масштабный делитель q_{M1}, q_{M2}, ϕ_{M1}, ϕ_{M2}. Это постоянные именованные числа, имеющие размерности, соответственно, заряда и магнитного потока, которыми при случае можно распорядиться по своему усмотрению. Если перейти к безразмерным неизвестным функциям

$$x_1 = \frac{q_1}{q_{M1}},\ x_2 = \frac{\phi_1}{\phi_{M1}},\ x_3 = \frac{\phi_2}{\phi_{M2}},\ x_4 = \frac{q_2}{q_{M2}},$$

то вместо системы (6) получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{G_1}{C_1}x_1 - \frac{r}{L_1}x_2\\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{rC_1}x_1 - \frac{R_1+R}{L_1}x_2 - \frac{R}{aL_2}x_3\\
\frac{dx_3}{dt} &= -\frac{aR}{L_1}x_2 - \frac{R_2+R}{L_2}x_3 + \frac{g}{C_2}x_4\\
\frac{dx_4}{dt} &= -\frac{1}{gL_2}x_3 - \frac{G_2}{C_2}x_4
\end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

где $r = \dfrac{\phi_{M1}}{q_{M1}}$ — нормирующее сопротивление, $g = \dfrac{q_{M2}}{\phi_{M2}}$ — нормирующая проводимость, $a = \dfrac{\phi_{M1}}{\phi_{M2}}$ — нормирующая безразмерная константа.

Покажем в развернутом виде матрицу $\mathbf{A}$ и симметризованную матрицу $\mathbf{A}_S$ системы (6):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline
-\dfrac{G_1}{C_1} & -\dfrac{r}{L_1} & 0 & 0\\ \hline
\dfrac{1}{rC_1} & -\dfrac{R_1+R}{L_1} & -\dfrac{R}{aL_2} & 0\\ \hline
0 & -\dfrac{aR}{L_1} & -\dfrac{R_2+R}{L_2} & \dfrac{g}{C_2}\\ \hline
0 & 0 & -\dfrac{1}{gL_2} & -\dfrac{G_2}{C_2}\\ \hline
\end{array},$$

$$\mathbf{A}_S = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline
-\dfrac{G_1}{C_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{rC_1}-\dfrac{r}{L_1}\right) & 0 & 0\\ \hline
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{rC_1}-\dfrac{r}{L_1}\right) & -\dfrac{R_1+R}{L_1} & -\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{a}{L_1}+\dfrac{1}{aL_2}\right) & 0\\ \hline
0 & -\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{a}{L_1}+\dfrac{1}{aL_2}\right) & -\dfrac{R_2+R}{L_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g}{rC_2}-\dfrac{1}{gL_2}\right)\\ \hline
0 & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g}{C_2}-\dfrac{1}{gL_2}\right) & -\dfrac{G_2}{C_2}\\ \hline
\end{array},$$

Характеристические корни симметризованной матрицы находятся из уравнения

$$\det(\mathbf{A}_s - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица четвертого порядка. Определитель четвертого порядка левой части (8) раскроем посредством разложения его на определители третьего порядка —

$$\det\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline
-\dfrac{G_1}{C_1}-\lambda & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{rC_1}-\dfrac{r}{L_1}\right) & 0 & 0\\ \hline
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{rC_1}-\dfrac{r}{L_1}\right) & -\dfrac{R_1+R}{L_1}-\lambda & -\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{a}{L_1}+\dfrac{1}{aL_2}\right) & 0\\ \hline
0 & -\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{a}{L_1}+\dfrac{1}{aL_2}\right) & -\dfrac{R_2+R}{L_2}-\lambda & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g}{rC_2}-\dfrac{1}{gL_2}\right)\\ \hline
0 & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g}{C_2}-\dfrac{1}{gL_2}\right) & -\dfrac{G_2}{C_2}-\lambda\\ \hline
\end{array} =$$

$$= -\left(\frac{G_1}{C_1}+\lambda\right)\det\begin{array}{|c|c|c|}\hline
-\dfrac{R_1+R}{L_1}-\lambda & -\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{a}{L_1}+\dfrac{1}{aL_2}\right) & 0\\ \hline
-\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{a}{L_1}+\dfrac{1}{aL_2}\right) & -\dfrac{R_2+R}{L_2}-\lambda & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g}{C_2}-\dfrac{1}{gL_2}\right)\\ \hline
0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g}{C_2}-\dfrac{1}{gL_2}\right) & -\dfrac{G_2}{C_2}-\lambda\\ \hline
\end{array} =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right)\det\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{R}{2}\left(\frac{a}{L_1}+\frac{1}{aL_2}\right) & -\frac{R_2+R}{L_2}-\lambda & \frac{1}{2}\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right) \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right) & -\frac{G_2}{C_2}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{G_1}{C_1}+\lambda\right)\left(\frac{R_1+R}{L_1}+\lambda\right)\left(\frac{R_2+R}{L_2}+\lambda\right)\left(\frac{G_2}{C_2}+\lambda\right)-$$
$$-\frac{R^2}{4}\left(\frac{a}{L_1}+\frac{1}{aL_2}\right)\left(\frac{G_1}{C_1}+\lambda\right)\left(\frac{G_2}{C_2}+\lambda\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right)^2\left(\frac{G_1}{C_1}+\lambda\right)\left(\frac{R_1+R}{L_1}+\lambda\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right)^2\left(\frac{R_2+R}{L_2}+\lambda\right)\left(\frac{G_2}{C_2}+\lambda\right)+$$
$$+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right)^2\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right)^2.$$

После упорядочения последнего выражения вековое уравнение может быть представлено в нормальном развернутом виде

$$\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0, \qquad (8)$$

где

$$a_0(t)=-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{a}{L_1}-\frac{1}{aL_2}\right)^2\frac{G_1G_2}{C_1C_2}R^2+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right)^2\frac{G_2}{C_2}\frac{R_2+R}{L_2}+\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right)^2\frac{G_1}{C_1}\frac{R_1+R}{L_1}-$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right)^2\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right)^2\right]+\frac{G_1G_2}{C_1C_2}\frac{R_1R_2+R(R_1+R_2)}{L_1L_2},$$
$$a_1(t)=-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{a}{L_1}-\frac{1}{aL_2}\right)\left(\frac{G_1}{C_1}+\frac{G_2}{C_2}\right)R^2+\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right)^2\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{G_2}{C_2}+\frac{R_2+R}{L_2}\right)+\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right)\left(\frac{G_1}{C_1}+\frac{R_1+R}{L_1}\right)\right]+$$
$$+\frac{G_1G_2}{C_1C_2}\left(\frac{R_1+R}{L_1}+\frac{R_2+R}{L_2}\right)+$$
$$+\frac{R_1R_2+R(R_1+R_2)}{L_1L_2}\left(\frac{G_1}{C_1}+\frac{G_2}{C_2}\right), \qquad (9)$$
$$a_2(t)=-\frac{1}{4}\left[R^2\left(\frac{a}{L_1}-\frac{1}{aL_2}\right)^2+\left(\frac{1}{rC_1}-\frac{r}{L_1}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{g}{C_2}-\frac{1}{gL_2}\right)^2\right]+\frac{G_1G_2}{C_1C_2}+$$
$$+\left(\frac{G_1}{C_1}+\frac{G_2}{C_2}\right)\left(\frac{R_1+R}{L_1}+\frac{R_2+R}{L_2}\right)+$$
$$+\frac{R_1R_2+R(R_1+R_2)}{L_1L_2},$$
$$a_3(t)=\frac{G_1}{C_1}+\frac{G_2}{C_2}+\frac{R_1+R}{L_1}+\frac{R_2+R}{L_2},$$
$$a_4(t)\equiv 1.$$

Алгебраическое уравнение четвертой степени (8) представляет собой уравнение максимальной степени, которое решается в квадратурах. Однако, это решение весьма громоздко и физически мало прозрачно, особенно, если учесть, что коэффициенты многочлена громоздким способом (9) связаны с элементами нашей физической системы. Кроме того, для наших целей нет необходимости вычисления корней векового уравнения (8), нам нужна лишь информация о том, что действительные части этих корней отрицательны. Для этого можно применить любой критерий этого свойства, наиболее известным из таких критериев является критерий Гурвица (мы пользуемся терминологией монографии Б. П. Демидовича [4], в других руководствах он называется критерием Рауса—Гурвица). Попытаемся применить этот критерий в нашем случае.

Строим матрицу Гурвица —

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Согласно критерию Гурвица все корни векового уравнения (8) имеют отрицательные действительные части, если все главные диагональные миноры матрицы Гурвица (10) положительны, т.е.

$$\Delta_1=a_1>0,$$
$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0,$$
$$\Delta_3=\det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix}=a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2>0, \qquad (11)$$
$$\Delta_4=\Delta_3.$$

Проверить выполнение этих неравенств в нашем случае затруднительно в силу громоздкости коэффициентов векового уравнения. Однако, в данном случае можно использовать особое нормирование исходной системы дифференциальных уравнений. Предположим, что реактивности нашей физической системы рис. постоянны:

$$C_1, L_1, C_2, L_2=const.$$

В таком случае константы нормирования r, g, a можно подобрать так, что коэффициенты векового уравнения радикально упростятся и примут вид

$$a_0(t) = \frac{G_1G_2}{C_1C_2}\frac{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}{L_1L_2},$$

$$a_1(t) = +\frac{G_1G_2}{C_1C_2}\left(\frac{R_1 + R}{L_1} + \frac{R_2 + R}{L_2}\right) + $$
$$+\frac{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}{L_1L_2}\left(\frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2}\right),$$

$$a_2(t) = \left(\frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2}\right)\left(\frac{R_1 + R}{L_1} + \frac{R_2 + R}{L_2}\right) + \quad (12)$$
$$+\frac{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}{L_1L_2},$$

$$a_3(t) = \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2} + \frac{R_1 + R}{L_1} + \frac{R_2 + R}{L_2},$$

$$a_4(t) \equiv 1.$$

В данном случае критерий Гурвица проверить значительно проще, чем в общем случае. Оказывается, что в реальных случаях параметрических усилителей реактивности изменяются с весьма малым коэффициентом модуляции, т.е. близки к постоянным величинам. Типичный пример аппроксимации изменяющейся во времени емкости в параметрическом усилителе

$$C(t) = C_0\left[1 + m\cos(\Omega t + \varphi_C)\right],$$

где m обратно пропорционально добротности усредненного контура, т.е. $m \cong 0{,}01$.

В таких случаях в первом приближении можно положить коэффициенты модуляции реактивностей равными нулю и воспользоваться неравенством Важевского при упрощенных формулах (12) вместо (9). Заметим, что применение неравенства Важевского для оценки устойчивости параметрических систем много проще, чем применение других, более строгих методов. Поэтому его целесообразно применять для оперативных, ориентировочных оценок устойчивости рассмотренной здесь физической системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тафт В.А.* Спектральные методы расчета нестационарных цепей и систем. — М.: Энергия, 1978. — 271 с.

2. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, — 1966. — 530 с.

3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Т.2. Издательство АН СССР, 1956 — 470 с.

4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Алехин Сергей Юрьевич — начальник отдела ОАО Концерн «Созвездие»

Alehin Sergey Yurevich — department-chief of with Joint Stock Company Concern “Sozvezdie”

Бирюк Николай Данилович – профессор физического факультета ВГУ

Biriuk Nikolay Danilovich — Professor of Physical Faculty of Voronezh State University

Нечаев Юрий Борисович – профессор факультета компьютерных наук ВГУ

Nechaev Yuri Borisovich — Professor of Computer Science Faculty of Voronezh State University