

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СКАЧКООБРАЗНОГО СЛУЧАЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МОМЕНТОМ ПОЯВЛЕНИЯ

А. В. Захаров

*Воронежский государственный университет*

Выполнен синтез алгоритмов совместной оценки параметров гауссовского случайного возмущения по методу максимального правдоподобия. Найдены асимптотически точные выражения для характеристик оценок. Границы применимости этих выражений установлены экспериментально методом статистического моделирования на ЭВМ.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** случайное возмущение, метод максимального правдоподобия, совместная оценка, средняя ошибка, рассеяние.

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из задач теории автоматического контроля и управления является синтез и анализ алгоритмов обработки скачкообразных случайных возмущений диагностируемых процессов и систем [1]. На практике диагностируемые объекты могут иметь стохастическую природу, либо быть подвержены внешним случайным воздействиям. Скачкообразное возмущение таких объектов представляет собой случайный процесс, возникающий в некоторый априори неизвестный момент времени. Стохастические объекты со скачкообразными возмущениями можно интерпретировать как стохастические системы со случайной структурой [2].

Случайные скачкообразные возмущения имеют различную физическую природу и могут рассматриваться как информативные процессы, подлежащие измерению, либо как помехи в канале управления. В последнем случае измерение параметров возмущения оказывается полезным для своевременного его подавления.

В ряде практических приложений возмущение параметров объекта является результатом большого числа элементарных случайных воздействий. Тогда случайный процесс, характеризующий возмущение, можно рассматривать как гауссовский процесс. Примерами таких возмущений являются «вспышка» оптического шума [3], радиолокационный сигнал, отраженный объектом с множеством «блестящих» точек [4, 5], «взрывной» шум в полупроводниковых приборах с р-п-переходом [6], сигналы в гидроакустике [5], в каналах со случайными замираниями [7]. Гауссовские случайные возмущения встречаются в системах медицинской и технической

диагностики, при управлении технологическими процессами и в других системах, связанных с анализом случайных процессов [4].

Функционирование автоматизированных систем в реальных условиях сопровождается помехами в канале наблюдения, имеющими случайный характер. Это могут быть пассивные помехи, порожденные окружающей средой, аппаратные шумы приемников, помехи из-за паразитных отражений в канале передачи информации и др. Наиболее распространенной моделью флуктуационной помехи в каналах наблюдения является аддитивный гауссовский белый шум [8].

На практике обработка случайных возмущений обычно проводится в условиях априорной неопределенности, когда неизвестны момент появления и статистические характеристики возмущения. При этом может быть неизвестен сам факт наличия возмущения в пределах интервала наблюдения. Тогда на первом этапе обработки необходимо решить задачу обнаружения возмущения с неизвестными параметрами. После обнаружения возмущения возникает задача измерения (оценки) его неизвестных параметров. Оценка параметров возмущения необходима для получения дополнительной информации об источнике возмущения или о свойствах возмущенной системы, а также для эффективного подавления возмущения.

В [9] исследован алгоритм обнаружения скачкообразного гауссовского случайного возмущения, представляющего собой отрезок реализации гауссовского процесса с неизвестными параметрами, возникающего в априори неизвестный момент времени. Рассмотрим теперь задачу оценки параметров гауссовского случайного возмущения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Под скачкообразным случайным возмущением будем понимать сигнал [9]

$$s(t) = g(t - \lambda_0) \xi(t), \quad t \in [0; T], \quad (1.1)$$

где  $g(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $g(t) = 1$  при  $t \geq 0$  — функция единичного скачка,  $\lambda_0$  — момент появления возмущения,  $\xi(t)$  — реализация стационарного гауссовского случайного процесса с математическим ожиданием  $a_0$  и спектральной плотностью  $G(\omega)$ , а  $[0; T]$  — интервал наблюдения. Спектральную плотность  $G(\omega)$  случайного процесса  $\xi(t)$  аппроксимируем выражением  $G(\omega) = \gamma_0 I(\omega / \Omega_0)$  [9], где  $I(x) = 1$  при  $|x| \leq 1/2$ ,  $I(x) = 0$  при  $|x| > 1/2$ ,  $\gamma_0 > 0$  — интенсивность, а  $\Omega_0$  — ширина полосы частот флуктуаций возмущения. При этом считаем, что время корреляции возмущения значительно меньше его наблюдаемой длительности  $\tau_0 = T - \lambda_0$ , так что [9]

$$\mu_0 = \tau_0 \Omega_0 / 4\pi \gg 1. \quad (1.2)$$

На практике момент  $\lambda_0$  появления возмущения (1.1) обычно неизвестен, тогда неизвестна и наблюдаемая длительность возмущения  $\tau_0$ . Параметры  $a_0$ ,  $\gamma_0$  и  $\Omega_0$  случайного процесса  $\xi(t)$ , определяемые свойствами диагностируемого объекта и характеристиками канала наблюдения, также часто неизвестны. Поэтому далее полагаем, что неизвестны и подлежат оценке следующие параметры возмущения: момент появления  $\lambda_0$  (длительность  $\tau_0$ ), ширина полосы частот  $\Omega_0$ , среднее значение  $a_0$  и интенсивность  $\gamma_0$ . Пусть момент  $\lambda_0$  появления возмущения принимает значения из интервала  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ , где  $T > \Lambda_2 \geq \Lambda_1 > 0$ . Длительность  $\tau_0$  и ширина полосы частот  $\Omega_0$  принимают значения из интервалов  $[\Gamma_1; \Gamma_2]$  и  $[V_1; V_2]$  соответственно, где  $T > \Gamma_2 \geq \Gamma_1 > 0$ ,  $V_2 \geq V_1 > 0$ , причем  $\Gamma_1 = T - \Lambda_2$ ,  $\Gamma_2 = T - \Lambda_1$ . При этом, согласно (1.2), считаем, что

$$\mu_1 = \Gamma_1 V_1 / 4\pi \gg 1. \quad (1.3)$$

Тогда условие (1.2) выполняется для всех возможных значений  $\tau_0$  и  $\Omega_0$ .

Пусть случайное возмущение (1.1) наблюдается в течение времени  $t \in [0; T]$  на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . При этом возмущение  $s(t)$  и шум  $n(t)$  статистически независимы. В результате, выходной сигнал канала наблюдения имеет вид

$$x(t) = g(t - \lambda_0) \xi(t) + n(t), \quad t \in [0; T]. \quad (1.4)$$

На основе принимаемой реализации  $x(t)$  (1.4) и имеющейся априорной информации

необходимо оценить параметры наблюдаемого случайного возмущения  $s(t)$ .

Задача оценки параметров случайных процессов рассматривалась в ряде работ и стала уже «классической». В литературе [10, 11 и др.] рассмотрены алгоритмы оценки среднего значения и (или) дисперсии стационарного случайного процесса. В [12] рассмотрена оценка ширины полосы частот стационарного гауссовского случайного процесса. Однако в этих работах предполагается, что моменты появления и исчезновения измеряемого процесса априори известны, так что реализации процесса полностью расположены в пределах интервала наблюдения  $[0; T]$ . Это не позволяет использовать указанные результаты для решения задачи оценки параметров случайного возмущения (1.1) с неизвестным моментом появления.

Задача оценки момента появления (длительности) случайного возмущения (1.1) может быть интерпретирована как задача оценки момента разладки случайного процесса [1, 13 и др.]. Однако известные алгоритмы оценки момента разладки, как правило, требуют априорной информации о параметрах случайного процесса (математическом ожидании, дисперсии, ширине полосы частот) до и после разладки. Аналитические выражения для характеристик этих алгоритмов, за исключением ряда простейших случаев, неизвестны. Учет априорной неопределенности параметров измеряемого процесса до и после разладки приводит к значительному усложнению практической реализации этих алгоритмов оценки.

Далее выполнены синтез и анализ простого алгоритма совместной оценки длительности  $\tau_0$  (момента появления  $\lambda_0$ ), ширины полосы частот  $\Omega_0$ , среднего значения  $a_0$  и интенсивности  $\gamma_0$  случайного возмущения (1.1).

## 2. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Для синтеза алгоритма оценки воспользуемся методом максимального правдоподобия (МП) [1, 14, 15]. Согласно этому методу, по наблюдаемой реализации  $x(t)$  (1.4) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП)  $L(\tau, \Omega, a, \gamma)$  как функцию возможных значений  $\tau$ ,  $\Omega$ ,  $a$ ,  $\gamma$  неизвестных параметров  $\tau_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $a_0$ ,  $\gamma_0$  случайного возмущения. Согласно [9, 16], получаем

$$L(\tau, \Omega, a, \gamma) = \frac{2\gamma}{N_0(N_0 + 2\gamma)} \int_{T-\tau}^T y^2(t, \Omega) dt + \frac{2a}{N_0 + 2\gamma} \int_{T-\tau}^T x(t) dt - \frac{a^2\tau}{N_0 + 2\gamma} - \frac{\tau\Omega}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{2\gamma}{N_0} \right), \quad (2.1)$$

где  $y(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h(t-u, \Omega) du$  — отклик линейного фильтра с импульсной характеристикой  $h(t, \Omega)$  на реализацию наблюдаемых данных  $x(t)$  (1.4), причем передаточная функция  $H(\omega, \Omega)$  этого фильтра удовлетворяет условию  $|H(\omega, \Omega)|^2 = I(\omega / \Omega)$ . Тогда совместные оценки максимального правдоподобия (ОМП)  $\tau_m, \Omega_m, a_m, \gamma_m$  параметров  $\tau_0, \Omega_0, a_0, \gamma_0$  случайного возмущения (1.1) определяются как координаты  $\tau, \Omega, a, \gamma$  положения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП  $L(\tau, \Omega, a, \gamma)$  (2.1) в пределах априорной области значений оцениваемых параметров. Таким образом, МП алгоритм оценки параметров возмущения (1.1) можно записать в виде:

$$(\tau_m, \Omega_m, a_m, \gamma_m) = \arg \sup_{(\tau, \Omega \in \Theta), a, \gamma} L(\tau, \Omega, a, \gamma), \quad (2.2)$$

где  $\Theta$  — область возможных значений длительности и ширины полосы частот возмущения, задаваемая условиями  $\tau \in [\Gamma_1; \Gamma_2]$  и  $\Omega \in [V_1; V_2]$ . При этом оценку  $\lambda_m$  момента  $\lambda_0$  появления возмущения можно рассчитать по формуле  $\lambda_m = T - \tau_m$ .

Аппаратурная или программная реализация совместных ОМП (2.2) оказывается сложной. Действительно, формирование логарифма ФОП  $L(\tau, \Omega, a, \gamma)$  (2.1) для всех возможных значений параметров  $\tau, \Omega, a$  и  $\gamma$ , а также реализация процедуры (2.2) поиска положения абсолютного максимума логарифма ФОП по всем четырем переменным требуют больших вычислительных и аппаратурных затрат.

Для преодоления этих трудностей учтем, что логарифм ФОП (2.1) достигает абсолютного максимума по переменным  $a$  и  $\gamma$  при

$$a = L_0(\tau) / \tau, \quad \gamma = \frac{2\pi}{\tau\Omega} \left[ L_1(\tau, \Omega) - \frac{L_0^2(\tau)}{\tau} \right] - \frac{N_0}{2},$$

где

$$L_0(\tau) = \int_{T-\tau}^T x(t) dt, \quad L_1(\tau, \Omega) = \int_{T-\tau}^T y^2(t, \Omega) dt. \quad (2.3)$$

Величина максимума логарифма ФОП по переменным  $a$  и  $\gamma$  равна

$$L_m(\tau, \Omega) = \sup_{a, \gamma} L(\tau, \Omega, a, \gamma) = \frac{L_1(\tau, \Omega)}{N_0} - \frac{\tau\Omega}{4\pi} \left[ 1 + \ln \left\{ \frac{4\pi}{\tau\Omega N_0} \left[ L_1(\tau, \Omega) - \frac{L_0^2(\tau)}{\tau} \right] \right\} \right]. \quad (2.4)$$

Тогда оценки  $\tau_m$  и  $\Omega_m$  длительности и полосы частот возмущения определяются как координаты  $\tau$  и  $\Omega$  положения абсолютного максимума функционала (2.4):

$$(\tau_m, \Omega_m) = \arg \sup_{(\tau, \Omega) \in \Theta} L_m(\tau, \Omega). \quad (2.5)$$

При этом оценки  $a_m$  и  $\gamma_m$  среднего значения и интенсивности флуктуаций возмущения вычисляются по формулам

$$a_m = L_0(\tau_m) / \tau_m, \quad \gamma_m = \frac{2\pi}{\tau_m \Omega_m} \left[ L_1(\tau_m, \Omega_m) - \frac{L_0^2(\tau_m)}{\tau_m} \right] - \frac{N_0}{2}. \quad (2.6)$$

Для формирования оценок (2.5), (2.6) необходимо реализовать процедуру поиска положения абсолютного максимума функционала  $L_m(\tau, \Omega)$  (2.4) только по двум переменным. Такая процедура требует значительно меньших вычислительных и аппаратурных затрат, чем процедура (2.2) поиска положения максимума логарифма ФОП (2.1) по четырем переменным.

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ

Характеристики ОМП (2.2), (2.5), (2.6) определяются статистическими свойствами логарифма ФОП (2.1) и функционалов (2.3), (2.4).

Рассмотрим вначале логарифм ФОП (2.1). Введем нормированные параметры  $\chi = \tau / \tau_0, \eta = \Omega / \Omega_0, \kappa = a / a_0, \vartheta = \gamma / \gamma_0$ , а также вектора параметров  $\mathbf{l} = \|\chi, \eta\|$  и  $\mathbf{r} = \|\kappa, \vartheta\|$ . Обозначим  $S(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = \langle L(\mathbf{l}, \mathbf{r}) \rangle$  — регулярная составляющая логарифма ФОП  $L(\mathbf{l}, \mathbf{r}) \equiv L(\tau, \Omega, a, \gamma)$  [10, 15], а  $N(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = L(\mathbf{l}, \mathbf{r}) - \langle L(\mathbf{l}, \mathbf{r}) \rangle$  — его флуктуационная составляющая. Здесь и далее  $\langle \rangle$  означает усреднение по реализациям  $x(t)$  (1.4) при фиксированных значениях  $\tau_0, \Omega_0, a_0, \gamma_0$  параметров возмущения.

Учтем, что логарифм ФОП (2.1) является асимптотически гауссовским (при  $\mu = \tau\Omega / 4\pi \rightarrow \infty$ ) случайным полем [9, 16]. Поэтому при выполнении (1.2), (1.3) можно ограничиться анализом лишь первых двух моментов логарифма ФОП: регулярной составляющей  $S(\mathbf{l}, \mathbf{r})$  и корреляционной функции

$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2) = \langle N(\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1)N(\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2) \rangle$ . При выполнении (1.2), (1.3) аналогично [9, 16] находим

$$S(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = [A_{11}(\mathbf{r}) \min(\eta, 1) + A_{12}(\mathbf{r})] \min(\chi, 1) - [A_{01}(\mathbf{r})\eta + A_{02}(\mathbf{r})]\chi, \quad (3.1)$$

$$A_{11}(\mathbf{r}) = \mu_0 q_0^2 \vartheta / (1 + q_0 \vartheta),$$

$$A_{12}(\mathbf{r}) = z_0^2 (\kappa + q_0 \vartheta / 2) / (1 + q_0 \vartheta),$$

$$A_{01}(\mathbf{r}) = \mu_0 \left[ \ln(1 + q_0 \vartheta) - \frac{q_0 \vartheta}{1 + q_0 \vartheta} \right],$$

$$A_{02}(\mathbf{r}) = \frac{z_0^2 \kappa^2}{2(1 + q_0 \vartheta)},$$

$$K(\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2) = [B_{01}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \min(\eta_1, \eta_2) + B_{02}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \min(\chi_1, \chi_2) + [B_{11}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \min(\eta_1, \eta_2, 1) + B_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \min(\chi_1, \chi_2, 1), \quad (3.2)$$

$$B_{11}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 q_0^3 \vartheta_1 \vartheta_2 (2 + q_0)}{(1 + q_0 \vartheta_1)(1 + q_0 \vartheta_2)},$$

$$B_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{z_0^2 [(1 + q_0)(\kappa_1 + q_0 \vartheta_1)(\kappa_2 + q_0 \vartheta_2) - \kappa_1 \kappa_2]}{(1 + q_0 \vartheta_1)(1 + q_0 \vartheta_2)},$$

$$B_{01}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 q_0^2 \vartheta_1 \vartheta_2}{(1 + q_0 \vartheta_1)(1 + q_0 \vartheta_2)},$$

$$B_{02}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{z_0^2 \kappa_1 \kappa_2}{(1 + q_0 \vartheta_1)(1 + q_0 \vartheta_2)},$$

где  $\mathbf{l}_i = \|\chi_i, \eta_i\|$ ,  $\mathbf{r}_i = \|\kappa_i, \vartheta_i\|$ ,  $\chi_i = \tau_i / \tau_0$ ,  $\eta_i = \Omega_i / \Omega_0$ ,  $\kappa_i = a_i / a_0$ ,  $\vartheta_i = \gamma_i / \gamma_0$ ,  $i = 1, 2$ . Здесь  $z_0^2 = 2a_0^2 \tau_0 / N_0$  — отношение энергии постоянной составляющей возмущения к спектральной плотности шума, а  $q_0 = 2\gamma_0 / N_0$  — отношение спектральных плотностей флуктуационной составляющей возмущения и шума.

Из (3.1) следует, что регулярная составляющая  $S(\mathbf{l}, \mathbf{r})$  логарифма ФОП достигает абсолютного максимума при  $\chi = 1$  ( $\tau = \tau_0$ ),  $\eta = 1$  ( $\Omega = \Omega_0$ ),  $\kappa = 1$  ( $a = a_0$ ) и

$$\vartheta = \vartheta_s = 1 - (1 + q_0) / 2\mu_0 q_0, \quad \gamma = \gamma_s = \gamma_0 \vartheta_s. \quad (3.3)$$

При этом  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ ,  $\mathbf{l} = \mathbf{J}$ , где  $\mathbf{r}_s = \|1, \vartheta_s\|$ , а  $\mathbf{J} = \|1, 1\|$  — единичный вектор.

Если отношение  $q_0$  не слишком мало, так что при выполнении (1.2) справедливо условие  $\mu_0 q_0 \gg 1$ , то в (3.3) можно пренебречь слагаемым порядка  $1 / \mu_0 q_0$  и получить, что  $\vartheta_s \approx 1$ ,  $\gamma_s \approx \gamma_0$ . Тогда регулярная составляющая логарифма ФОП при выполнении (1.2) и  $\mu_0 q_0 \gg 1$  достигает абсолютного максимума в точке истинных значений оцениваемых параметров возмущения.

Рассмотрим теперь характеристики функционалов  $L_0(\tau)$ ,  $L_1(\tau, \Omega)$  (2.3) и  $L_m(\tau, \Omega)$  (2.4). Введем функционалы  $M_0(\chi, \eta) = L_0(\chi \tau_0) / \chi \sqrt{\mu_0 \eta N_0 \tau_0}$  и  $M_1(\chi, \eta) = L_1(\chi \tau_0, \eta \Omega_0) / \mu_0 \eta \chi N_0$ . Обозначим  $S_i(\chi, \eta) = \langle M_i(\chi, \eta) \rangle$  — регулярные составляющие,  $N_i(\chi, \eta) = \sqrt{\mu_1 [M_i(\chi, \eta) - \langle M_i(\chi, \eta) \rangle]}$  — нормированные флуктуационные составляющие функционалов  $M_i(\chi, \eta)$ ,  $i = 0, 1$ . Тогда, согласно (2.4),

$$L_m(\tau, \Omega) = \mu_0 \eta \chi \{ S_1(\chi, \eta) - 1 + \varepsilon N_1(\chi, \eta) - \ln[S_1(\chi, \eta) + \varepsilon N_1(\chi, \eta) - \{S_0(\chi, \eta) + \varepsilon N_0(\chi, \eta)\}^2] \}, \quad (3.4)$$

где  $\varepsilon = 1 / \sqrt{\mu_1}$  — малый параметр в силу (1.3). При выполнении (1.2), (1.3) аналогично [9, 16] получаем

$$\begin{aligned} S_1(\chi, \eta) &= \\ &= 1 + q_0 \min(\eta, 1) \min(\chi, 1) / \chi \eta + \\ &\quad + E^2 \min(\chi, 1) / 2 \chi \eta, \\ S_0(\chi, \eta) &= \\ &= E \min(\chi, 1) / \chi \sqrt{2\eta}, \quad E^2 = z_0^2 / \mu_0, \\ &\quad \langle N_1(\chi_1, \eta_1) N_1(\chi_2, \eta_2) \rangle = \\ &= \mu_1 \{ q_0 (2 + q_0) \min(\eta_1, \eta_2, 1) \min(\chi_1, \chi_2, 1) + \\ &\quad + \min(\eta_1, \eta_2) \min(\chi_1, \chi_2) + \\ &\quad + E^2 (1 + q_0) \min(\chi_1, \chi_2, 1) \} / \mu_0 \chi_1 \chi_2 \eta_1 \eta_2, \\ &\quad \langle N_0(\chi_1, \eta_1) N_0(\chi_2, \eta_2) \rangle = \\ &= \mu_1 \{ \min\{\chi_1, \chi_2\} + \\ &\quad + q_0 \min(\chi_1, \chi_2, 1) \} / 2 \mu_0 \chi_1 \chi_2 \sqrt{\eta_1 \eta_2}, \\ &\quad \langle N_1(\chi_1, \eta_1) N_0(\chi_2, \eta_2) \rangle = \\ &= \mu_1 E (1 + q_0) \min(\chi_1, \chi_2, 1) / \mu_0 \chi_1 \chi_2 \eta_1 \sqrt{2\eta_2}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Будем считать, что величины  $q_0$  и  $E^2 = z_0^2 / \mu_0$  ограничены сверху. Тогда, согласно (3.5), дисперсии флуктуационных составляющих  $N_i(\chi, \eta)$  также ограничены сверху при любых  $(\tau, \Omega) \in \Theta$ . Из (3.5) также следует, что  $S_1(\chi, \eta) > 1$  для всех  $(\tau, \Omega) \in \Theta$ . Тогда функционал (3.4) при выполнении (1.3) можно разложить в ряд Маклорена по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Удерживая в разложении слагаемые, содержащие параметр  $\varepsilon$  в степени не выше первой, получаем

$$L_m(\tau, \Omega) \approx \mu_0 \eta \chi \left\{ S_1(\chi, \eta) - 1 - \ln[S_1(\chi, \eta) - S_0^2(\chi, \eta)] + \varepsilon \left[ N_1(\chi, \eta) - \frac{N_1(\chi, \eta) - 2S_0(\chi, \eta)N_0(\chi, \eta)}{S_1(\chi, \eta) - S_0^2(\chi, \eta)} \right] \right\}. \quad (3.6)$$

Обозначим  $S_m(\chi, \eta) = \langle L_m(\chi\tau_0, \eta\Omega_0) \rangle$  — регулярная, а  $N_m(\chi, \eta) = L_m(\chi\tau_0, \eta\Omega_0) - \langle L_m(\chi\tau_0, \eta\Omega_0) \rangle$  — флуктуационная составляющие функционала (2.4). Тогда, согласно (3.6), при выполнении (1.3) имеем

$$\begin{aligned} S_m(\chi, \eta) &\approx \mu_0 \eta \chi \{S_1(\chi, \eta) - 1 - \\ &\quad - \ln[S_1(\chi, \eta) - S_0^2(\chi, \eta)]\}, \\ N_m(\chi, \eta) &\approx \frac{\mu_0 \eta \chi}{\sqrt{\mu_1}} \left[ N_1(\chi, \eta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_1(\chi, \eta) - 2S_0(\chi, \eta)N_0(\chi, \eta)}{S_1(\chi, \eta) - S_0^2(\chi, \eta)} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Точность аппроксимаций (3.6), (3.7) возрастает с увеличением  $\mu_1(\mu_0)$ .

Учтем, что функционал  $L_0(\tau)$  является гауссовским случайным процессом, а функционал  $L_1(\tau, \Omega)$ , как и логарифм ФОП (2.1), является асимптотически (при  $\mu = \tau\Omega / 4\pi \rightarrow \infty$ ) гауссовским случайным полем [9,16]. При этом составляющие  $N_0(\chi, \eta)$  и  $N_1(\chi, \eta)$  являются соответственно гауссовским и асимптотически гауссовским полями. Тогда, согласно (3.6), функционал  $L_m(\tau, \Omega)$  (2.4) также является асимптотически гауссовским при  $\mu \rightarrow \infty$ . Поэтому при выполнении (1.2), (1.3) можно ограничиться анализом первых двух моментов функционала (2.4): регулярной составляющей  $S_m(\chi, \eta)$  и корреляционной функцией  $K_m(\chi_1, \eta_1, \chi_2, \eta_2) = \langle N_m(\chi_1, \eta_1)N_m(\chi_2, \eta_2) \rangle$ .

Из (3.5), (3.7) следует, что составляющая  $S_m(\chi, \eta)$  достигает абсолютного максимума при  $\chi = 1$  ( $\tau = \tau_0$ ) и  $\eta = 1$  ( $\Omega = \Omega_0$ ). Используя (3.5), (3.7), получаем аппроксимации первых двух моментов функционала (2.4) в окрестности точки  $(\chi = 1, \eta = 1)$  при  $\delta = \max(|\chi - 1|, |\eta - 1|) \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} S_m(\chi, \eta) &= [A_{11}^* \min(\eta, 1) + A_{12}^*] \min(\chi, 1) - \\ &\quad - (A_{01}^* \eta + A_{02}^*) \chi + o(\delta), \\ A_{11}^* &= \mu_0 q_0^2 / (1 + q_0), \\ A_{12}^* &= z_0^2 (1 + q_0 / 2) / (1 + q_0), \\ A_{01}^* &= \mu_0 [\ln(1 + q_0) - q_0 / (1 + q_0)], \\ A_{02}^* &= z_0^2 / [2(1 + q_0)], \\ K_m(\chi_1, \eta_1, \chi_2, \eta_2) &= \\ &= [B_{11}^* \min(\eta_1, \eta_2, 1) + B_{12}^*] \min(\chi_1, \chi_2, 1) + \\ &\quad + [B_{01}^* \min(\eta_1, \eta_2) + B_{02}^*] \min(\chi_1, \chi_2) + \\ &\quad + U(\eta_1, \chi_1) + U(\eta_2, \chi_2) + o(\delta), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} U(\eta, \chi) &= [A_{11}^* \min(\eta, 1) + \\ &\quad + A_{12}^*] \min(\chi, 1) - (A_{11}^* \eta + A_{12}^*) \chi, \\ B_{11}^* &= \mu_0 q_0^3 (2 + q_0) / (1 + q_0)^2, \\ B_{12}^* &= z_0^2 [(1 + q_0)^3 - 1] / (1 + q_0)^2, \\ B_{01}^* &= \mu_0 q_0^2 / (1 + q_0)^2, \\ B_{02}^* &= z_0^2 / (1 + q_0)^2. \end{aligned}$$

Здесь  $o(\delta)$  — величина большего порядка малости, чем  $\delta$ .

Из (3.1), (3.2) следует, что регулярная составляющая  $S(\mathbf{l}, \mathbf{r})$  и корреляционная функция  $K(\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2)$  логарифма ФОП (2.1) непрерывно дифференцируемы по параметрам  $\mathbf{r} = \|\mathbf{k}, \vartheta\|$  ( $a, \gamma$ ). Однако, производные этих функций по параметрам  $\mathbf{l} = \|\chi, \eta\|$  ( $\tau, \Omega$ ) имеют разрывы первого рода в точке  $(\chi = 1, \eta = 1)$  максимума регулярной составляющей. Из (3.8), (3.9) следует, что производные регулярной составляющей  $S_m(\chi, \eta)$  и корреляционной функции  $K_m(\chi_1, \eta_1, \chi_2, \eta_2)$  функционала (2.4) по параметрам  $\chi, \eta$  также имеют разрывы первого рода в точке  $(\chi = 1, \eta = 1)$ . Это не позволяет использовать метод малого параметра [10, 14, 15] для расчета характеристик ОМП (2.2), (2.5), (2.6), так как этот метод требует непрерывной дифференцируемости моментов логарифма ФОП по всем оцениваемым параметрам. При этом формула для дисперсии эффективной оценки (граница Крамера—Рао) [14,15] дает тривиальную нулевую нижнюю границу дисперсий ОМП длительности и ширины полосы частот возмущения.

В [17(п. 5.3), 18(гл. 6)] найдены асимптотические характеристики ОМП одного параметра сигнала, когда производные моментов логарифма ФОП по этому параметру имеют разрывы 1-го рода. Однако, эти результаты получены в предположении, что остальные параметры сигнала априори известны.

В [18(гл. 6), 21] получены асимптотические выражения для характеристик совместных ОМП нескольких параметров сигнала. При этом предполагается, что производные моментов логарифма ФОП по одному из оцениваемых параметров имеют разрывы 1-го рода в точке максимума регулярной составляющей. По остальным параметрам моменты логарифма ФОП непрерывно дифференцируемы. Однако результаты [18, 21] неприменимы в случае, когда моменты логарифма ФОП непрерывно не дифференцируемы по нескольким оцениваемым параметрам.

Отметим, что характеристики ОМП в [17, 18, 21] получены для случая квазидетерминированных сигналов, форма которых априори известна. Результаты [17, 18, 21] непосредственно неприменимы при анализе оценок параметров стохастических сигналов, представляющих собой реализации случайных процессов.

Далее на основе обобщения методов [17, 18, 21] получены асимптотически точные выражения для характеристик совместных ОМП (2.2), (2.5), (2.6).

#### 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ, МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ И ШИРИНЫ ПОЛОСЫ ЧАСТОТ ВОЗМУЩЕНИЯ

Используем представление (2.5) оценок  $\tau_m$ ,  $\Omega_m$  длительности и ширины полосы частот возмущения. Учтем, что регулярная составляющая  $S_m(\chi, \eta)$  функционала (2.4) достигает абсолютного максимума при  $\chi = 1$ ,  $\eta = 1$ , а реализации флуктуационной составляющей  $N_m(\chi, \eta)$  непрерывны с вероятностью 1. Тогда с учетом (3.8), (3.9) апостериорные (выходные) отношения сигнал/шум (ОСШ)  $z_1$  и  $z_2$  для оценок  $\tau_m$  и  $\Omega_m$  запишутся в виде [9, 15, 17, 18]

$$z_1 = \frac{S_m(\mathbf{J}, \mathbf{J})}{\sqrt{\langle N_m^2(\mathbf{J}, \mathbf{J}) \rangle}} = \frac{A_{11}^* + A_{12}^* - A_{01}^* - A_{02}^*}{\sqrt{B_{11}^* + B_{12}^* + B_{01}^* + B_{02}^*}} =$$

$$= \frac{\mu_0[q_0 - \ln(1 + q_0)] + z_0^2 / 2}{\sqrt{\mu_0 q_0^2 + z_0^2(1 + q_0)}}, \quad (4.1)$$

$$z_2 = \frac{A_{11}^* - A_{01}^*}{\sqrt{B_{11}^* + B_{01}^*}} = \sqrt{\mu_0} \frac{q_0 - \ln(1 + q_0)}{q_0},$$

причем  $z_1^2 \rightarrow \infty$ ,  $z_2^2 \rightarrow \infty$  при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ,  $q_0 > 0$  и  $z_1^2 \rightarrow \infty$  при  $z_0^2 \rightarrow \infty$ .

Аналогично [9, 12, 14, 15, 17, 18 и др.], считаем, что ОСШ  $z_i$  (4.1) настолько велики, что кроме (1.2) выполняются условия

$$z_1^2 \gg 1, \quad z_2^2 \gg 1 \quad (4.2)$$

высокой апостериорной точности оценок. Условия (4.2) выполняются, если  $\mu_0 \gg 1$  (1.2) и отношение  $q_0$  не слишком мало. Аналогично [9], при выполнении (4.2) оценки  $\tau_m, \Omega_m$  (2.5), являющиеся координатами положения абсолютного максимума функционала (2.4), находятся в малой окрестности точки  $(\tau_0, \Omega_0)$ . При  $z_i \rightarrow \infty$  величины  $\tau_m$  и  $\Omega_m$  сходятся к  $\tau_0$  и  $l_{mi}$  в среднеквадратическом [9, 14, 15]. Поэтому для нахождения характеристик ОМП (2.5) при вы-

полнении условий (1.2), (4.2) достаточно учитывать поведение моментов функционала (2.4) в малой  $\delta$ -окрестности  $\chi, \eta \in [1 - \delta; 1 + \delta]$  точки ( $\eta = 1, \kappa = 1$ ), причем при  $z_i \rightarrow \infty$  величина этой окрестности  $\delta \rightarrow 0$ . Для моментов (3.8), (3.9) в пределах этой  $\delta$ -окрестности при  $\delta \rightarrow 0$  справедливы аппроксимации

$$S_m(\chi, \eta) = S_1(\chi) + S_2(\eta) + o(\delta), \quad (4.3)$$

$$S_1(\chi) = S_m(\chi, 1) - A_{S1} / 2,$$

$$S_2(\eta) = S_m(1, \eta) - A_{S1} / 2,$$

$$A_{S1} = S_m(1, 1),$$

$$K_m(\chi_1, \eta_1, \chi_2, \eta_2) =$$

$$= K_1(\chi_1, \chi_2) + K_2(\eta_1, \eta_2) + o(\delta), \quad (4.4)$$

$$K_1(\chi_1, \chi_2) = K_m(\chi_1, 1, \chi_2, 1) - D_{11} / 2,$$

$$D_{11} = K_m(1, 1, 1, 1),$$

$$K_2(\eta_1, \eta_2) = K_m(1, \eta_1, 1, \eta_2) - D_{11} / 2.$$

Введем в рассмотрение статистически независимые совместно гауссовские случайные процессы  $M_1(\chi)$ ,  $M_2(\eta)$ , с математическими ожиданиями  $S_1(\chi)$ ,  $S_2(\eta)$  и с корреляционными функциями  $K_1(\chi_1, \chi_2)$ ,  $K_2(\eta_1, \eta_2)$  соответственно. Тогда асимптотически гауссовское случайное поле  $L_m(\chi\tau_0, \eta\Omega_0)$  (2.4) сходится по распределению к сумме  $M_1(\chi) + M_2(\eta)$  при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Следовательно, при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ,  $z_i \rightarrow \infty$  нормированные ОМП  $\chi_m = \tau_m / \tau_0$ ,  $\eta_m = \Omega_m / \Omega_0$  сходятся по распределению к соответствующим оценкам

$$l_{m1} = \arg \sup_{\chi \in [1-\delta; 1+\delta]} M_1(\chi), \quad l_{m2} = \arg \sup_{\eta \in [1-\delta; 1+\delta]} M_2(\eta). \quad (4.5)$$

При этом ОМП  $\tau_m$  и  $\Omega_m$  сходятся по распределению к оценкам  $\tau_0 l_{m1}$  и  $\Omega_0 l_{m2}$ .

Будем считать, что ОСШ  $z_i$  (4.1) настолько велики, а величина  $\delta$  рассматриваемой окрестности точки (1,1) настолько мала, что на интервалах  $\chi, \eta \in [1 - \delta; 1 + \delta]$  справедливы представления (4.3), (4.4). Тогда статистические характеристики ОМП  $\chi_m$  и  $\eta_m$  при выполнении (1.2), (4.2) совпадают с характеристиками оценок  $l_{m1}$  и  $l_{m2}$  (4.5) соответственно.

Для нахождения распределений оценок (4.5) введем в рассмотрение гауссовские случайные процессы  $\Delta_i(l) = M_i(l) - M_i(\zeta)$ , где  $\zeta$  — фиксированная величина из интервала  $[1 - \delta; 1 + \delta]$ . Тогда функцию распределения оценки  $l_{mi}$  (4.5),  $i = 1, 2$  можно представить в виде  $F_i(\zeta) = P[l_{mi} < \zeta] = P\left[\sup_{l \in [1-\delta; \zeta]} \Delta_i(l) > \sup_{l \in [\zeta; 1+\delta]} \Delta_i(l)\right]$

[17, 18], где  $P[A]$  — вероятность события  $A$ . Используя выражения (3.8), (3.9), находим математические ожидания  $S_{\Delta_i}(l) = S_i(l) - S_i(\zeta)$  и корреляционные функции  $K_{\Delta_i}(l_1, l_2) = K_i(l_1, l_2) - K_i(\zeta, l_2) - K_i(l_1, \zeta) + K_i(\zeta, \zeta)$  случайных процессов  $\Delta_i(l)$ :

$$S_{\Delta_i}(l) = A_{S_i}[R_i(l) - R_i(\zeta)],$$

$$R_i(l) = \begin{cases} 1 - |l - 1|, & \text{при } l \leq 1; \\ 1 - d_i |l - 1|, & \text{при } l \geq 1, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$K_{\Delta_i}(l_1, l_2) = \begin{cases} \begin{cases} D_{1i} \min(|l_1 - \zeta|, |l_2 - \zeta|) + C_{1i}, \\ \text{при } l_1, l_2 \leq 1; \\ D_{2i} \min(|l_1 - \zeta|, |l_2 - \zeta|) + C_{2i}, \\ \text{при } l_1, l_2 \geq 1; \end{cases} \\ \text{если } (l_1 - \zeta)(l_2 - \zeta) \geq 0; \\ 0, \text{ если } (l_1 - \zeta)(l_2 - \zeta) < 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$A_{S1} = A_{11}^* + A_{12}^* - A_{01}^* - A_{02}^* =$$

$$= \mu_0[q_0 - \ln(1 + q_0)] + z_0^2 / 2,$$

$$A_{S2} = A_{11}^* - A_{01}^* = \mu_0[q_0 - \ln(1 + q_0)],$$

$$d_1 = (A_{01}^* + A_{02}^*) / A_{S1}, \quad d_2 = A_{01}^* / A_{S2},$$

$$D_{11} = B_{11}^* + B_{12}^* + B_{01}^* + B_{02}^* =$$

$$= \mu_0 q_0^2 + z_0^2(1 + q_0),$$

$$D_{22} = B_{01}^*,$$

$$D_{21} = B_{01}^* + B_{02}^* = (\mu_0 q_0^2 + z_0^2) / (1 + q_0)^2,$$

$$D_{12} = B_{11}^* + B_{01}^* = \mu_0 q_0^2,$$

где  $C_{ji}$  — несущественные константы, которые могут зависеть от параметра  $\zeta$ .

Из (4.7) следует, что отрезки реализаций случайных процессов  $\Delta_i(l)$  на интервалах  $[1 - \delta; \zeta]$  и  $[\zeta; 1 + \delta]$  некоррелированы и, в силу гауссовости процессов  $\Delta_i(l)$ , статистически независимы. Тогда [17, 18]

$$F_i(\zeta) = \int_0^{\infty} P_{2i}(u) dP_{1i}(u) = 1 - \int_0^{\infty} P_{1i}(u) dP_{2i}(u), \quad (4.8)$$

где  $P_{1i}(u) = P\left[\sup_{l \in [1-\delta; \zeta]} \Delta_i(l) < u\right]$  и  $P_{2i}(u) =$

$P\left[\sup_{l \in [\zeta; 1+\delta]} \Delta_i(l) < u\right]$  — функции распределения абсолютного максимума процесса  $\Delta_i(l)$  на интервалах  $[1 - \delta; \zeta]$  и  $[\zeta; 1 + \delta]$  соответственно. В (4.8) учтено, что  $P_{1i}(u) = 0$ ,  $P_{2i}(u) = 0$  при  $u < 0$ , так как  $\Delta_i(\zeta) = 0$ .

Для нахождения функций  $P_{2i}(u)$ ,  $u \geq 0$ ,  $i = 1, 2$  введем в рассмотрение случайные процессы  $r_i(l) = u - \Delta_i(l)$ . Используя теорему Дуба

[19] в формулировке Кайлатца [20] и учитывая (4.6), (4.7), можно показать, что случайные процессы  $\Delta_i(l)$  и  $r_i(l)$  на интервале  $[\zeta; 1 + \delta]$  являются гауссовскими марковскими процессами диффузионного типа [19]. Согласно (4.6), (4.7), коэффициенты сноса  $\Gamma_{1i}$  и диффузии  $\Gamma_{2i}$  процессов  $r_i(l)$  при  $l > \zeta$  равны

$$\Gamma_{1i}(l) = A_{S_i} \begin{cases} d_i & \text{при } l \geq 1; \\ -1 & \text{при } l < 1; \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{2i}(l) = \begin{cases} D_{2i} & \text{при } l \geq 1; \\ D_{1i} & \text{при } l < 1. \end{cases}$$

Воспользовавшись марковскими свойствами процесса  $r_i(l)$ , вероятность  $P_{2i}(u)$  можно записать в виде [19]

$$P_{2i}(u) = P\left[r_i(l) > 0\right] = \int_0^{\infty} W_{ri}(x, 1 + \delta) dx, \quad (4.10)$$

где  $W_{ri}(x, l)$  — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова

$$\frac{\partial W_{ri}(x, l)}{\partial l} + \Gamma_{1i}(l) \frac{\partial W_{ri}(x, l)}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{2} \Gamma_{2i}(l) \frac{\partial^2 W_{ri}(x, l)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.11)$$

с коэффициентами (4.9) при начальном  $W_{ri}(x, \zeta) = \delta(x - u)$  и граничных  $W_{ri}(0, l) = 0$ ,  $W_{ri}(\infty, l) = 0$  условиях. Здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция. Решая уравнение (4.11) аналогично [12, 17, 18] и подставляя решение в (4.10), находим выражение для функции  $P_{2i}(u)$ . Аналогично получаем и выражение для функции  $P_{1i}(u)$ .

Подставляя полученные выражения для вероятностей  $P_{1i}(u)$  и  $P_{2i}(u)$  в (4.8), находим условные (при фиксированных параметрах возмущения) функции распределения  $F_i(l)$  оценок  $l_{mi}$  (4.5):

$$F_i(l) = \begin{cases} \Psi(|l - 1|, z_i, z_{ni}, \rho_i) & \text{при } 1 - \delta \leq l < 1; \\ 1 - \Psi(|l - 1|, z_{ni}, z_i, 1 / \rho_i) & \text{при } 1 \leq l \leq 1 + \delta; \end{cases} \quad (4.12)$$

$$i = 1, 2,$$

$$\Psi(l, z_1, z_2, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(u - z_1 l - v)^2}{2l}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp(2z_1 u) \exp\left[-\frac{(u + z_1 l + v)^2}{2l}\right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi\left(\frac{z_2 \delta + v \rho}{\sqrt{\delta}}\right) - \exp(-2z_2 \rho v) \Phi\left(\frac{z_2 \delta - v \rho}{\sqrt{\delta}}\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\delta-l)}} \exp\left[-\frac{[z_1(\delta-l)+u]^2}{2(\delta-l)}\right] + 2z_1 \exp(-2z_1 u) \Phi\left(\frac{z_1(\delta-l)-u}{\sqrt{\delta-l}}\right) \right\} du dv,$$

где  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  — интеграл вероятности, ОСШ  $z_i = A_{Si} / \sqrt{D_{i1}}$ ,  $i=1,2$  определяются из (4.1), а

$$z_{n1} = \frac{A_{S1} d_1}{\sqrt{D_{21}}} = \frac{A_{01}^* + A_{02}^*}{\sqrt{B_{01}^* + B_{02}^*}} = \frac{\mu_0[(1+q_0)\ln(1+q_0) - q_0] + z_0^2/2}{\sqrt{\mu_0 q_0^2 + z_0^2}},$$

$$z_{n2} = \frac{A_{S2} d_2}{\sqrt{D_{22}}} = \frac{A_{01}^*}{\sqrt{B_{01}^*}} = \sqrt{\mu_0} \frac{(1+q_0)\ln(1+q_0) - q_0}{q_0},$$

$$\rho_i = \sqrt{D_{i1} / D_{2i}}.$$

Выражение (4.12) громоздко и неудобно для практических расчетов. Учтем, что отношения  $z_{ni}$ ,  $i=1,2$  при выполнении (1.2), (4.2) являются величинами порядка ОСШ  $z_i$  (4.1), причем  $z_{ni} \rightarrow \infty$  при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ,  $q_0 > 0$  ( $z_i \rightarrow \infty$ ). Будем считать, что ОСШ  $z_i$  настолько велики, что кроме (4.2) выполняются условия  $z_{ni}^2 \gg 1$ ,  $i=1,2$ . Тогда из (4.12) аналогично [17, 18] находим асимптотические выражения для условных плотностей вероятности  $W_i(l) = dF_i(l)/dl$  оценок  $l_{mi}$ :

$$W_i(l) = \begin{cases} 2z_i^2 W_0[2z_i^2(1-l), 1/R_i] & \text{при } l < 1; \\ 2z_{ni}^2 W_0[2z_{ni}^2(l-1), R_i] & \text{при } l \geq 1, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$R_i = \frac{D_{i1} d_i}{D_{2i}} = \frac{\rho_i z_{ni}}{z_i},$$

$$W_0(x, u) = \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right) - 1 +$$

$$+ \frac{2+u}{u} \exp\left(|x| \frac{1+u}{u^2}\right) \left\{ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}} \left[\frac{2+u}{u}\right]\right) \right\}.$$

Формулы (4.12), (4.13) при  $i=1$  являются асимптотическими аппроксимациями распределений нормированных ОМП  $\chi_m = \tau_m / \tau_0$  длительности  $\tau_0$  возмущения, а при  $i=2$  — ОМП  $\eta_m = \Omega_m / \Omega_0$  ширины полосы частот  $\Omega_0$ . Точность таких аппроксимаций возрастает с увеличением ОСШ  $z_i$  (4.1) и  $\mu_0$  (1.2). При фиксированных значениях  $z_i$  и  $\mu_0$  точность выражения (4.12) выше, чем выражения (4.13). Однако

формула (4.12) более сложна для практических расчетов.

Используя распределения (4.12), (4.13), можно рассчитать условные смещения  $b_\chi = \langle \chi_m - 1 \rangle$ ,  $b_\eta = \langle \eta_m - 1 \rangle$  и рассеяния  $V_\chi = \langle (\chi_m - 1)^2 \rangle$ ,  $V_\eta = \langle (\eta_m - 1)^2 \rangle$  нормированных оценок  $\chi_m, \eta_m$  по формулам

$$b_\chi = \int_{\Gamma_1/\tau_0}^{\Gamma_2/\tau_0} l W_1(l) dl, \quad b_\eta = \int_{V_1/\tau_0}^{V_2/\tau_0} l W_2(l) dl, \quad (4.14)$$

$$V_\chi = \int_{\Gamma_1/\tau_0}^{\Gamma_2/\tau_0} l^2 W_1(l) dl, \quad V_\eta = \int_{V_1/\tau_0}^{V_2/\tau_0} l^2 W_2(l) dl.$$

Расчет интегралов (4.14) возможен только численными методами. Поэтому, аналогично [17, 18], запишем более простые асимптотические (при  $z_i \rightarrow \infty$ ) выражения для смещений и рассеяний оценок. Полагая, что истинные значения  $\tau_0$  и  $\Omega_0$  длительности и ширины полосы частот возмущения являются внутренними точками априорных интервалов  $[\Gamma_1; \Gamma_2]$  и  $[V_1; V_2]$  и расширяя пределы интегрирования в (4.14) до бесконечности при  $z_i \rightarrow \infty$ , получаем

$$b_\chi = b(z_1, z_{n1}, R_1), \quad b_\eta = b(z_2, z_{n2}, R_2),$$

$$b(z_1, z_2, R) = \frac{2R+1}{2z_2^2(R+1)^2} - \frac{R(R+2)}{2z_1^2(R+1)^2},$$

$$V_\chi = V(z_1, z_{n1}, R_1), \quad V_\eta = V(z_2, z_{n2}, R_2), \quad (4.15)$$

$$V(z_1, z_2, R) = \frac{R(2R^2+6R+5)}{2z_1^4(R+1)^3} + \frac{5R^2+6R+2}{2z_2^4(R+1)^3}.$$

Точность формул (4.15) возрастает с увеличением  $\mu_0$  (1.2) и  $z_i$  (4.1).

Воспользовавшись выражениями для характеристик ОМП  $\chi_m$ , можно рассчитать характеристики ОМП  $l_m = \lambda_m / \tau_0 = T / \tau_0 - \chi_m$  нормированного момента  $l_0 = \lambda_0 / \tau_0$  появления случайного возмущения. В частности, смещение и рассеяние ОМП  $l_m$  равны  $b_l = \langle l_m - l_0 \rangle = -b_\chi$  и  $V_l = \langle (l_m - l_0)^2 \rangle = V_\chi$ .

### 5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЗМУЩЕНИЯ

Найдем асимптотически точные (с ростом  $\mu_0$  и ОСШ  $z_i$ ) выражения для характеристик ОМП  $a_m$  и  $\gamma_m$  (2.2), (2.6). Представим эти оценки в виде

$$(a_m, \gamma_m) = \arg \sup L_R(a, \gamma), \quad (5.1)$$

$$L_R(a, \gamma) = L(\tau_m, \Omega_m, a, \gamma) / A_S,$$

где  $L(\tau, \Omega, a, \gamma)$  — логарифм ФОП (2.1), а  $(\tau_m, \Omega_m)$  — ОМП (2.5) длительности и ширины полосы частот возмущения. Здесь  $A_S = S(\mathbf{J}, \mathbf{r}_S) =$

$= A_{11}(\mathbf{r}_S) + A_{12}(\mathbf{r}_S) - A_{01}(\mathbf{r}_S) - A_{02}(\mathbf{r}_S)$  — максимум регулярной составляющей логарифма ФОП, где коэффициенты  $A_{ij}(\mathbf{r})$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  определяются из (3.4),  $\mathbf{J} = \|\mathbf{1}, \mathbf{1}\|$ ,  $\mathbf{r}_S = \|\mathbf{1}, \vartheta_S\|$ . Оценки (5.1) являются решением системы уравнений правдоподобия [15,17]

$$\begin{aligned} \partial L_R(a, \gamma) / \partial a \Big|_{a=a_m, \gamma=\gamma_m} &= 0, \\ \partial L_R(a, \gamma) / \partial \gamma \Big|_{a=a_m, \gamma=\gamma_m} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Обозначим  $\sigma^2 = K(\mathbf{J}, \mathbf{r}_S, \mathbf{J}, \mathbf{r}_S) = B_{11}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S) + B_{12}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S) + B_{01}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S) + B_{02}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S)$  — дисперсия логарифма ФОП (2.1), вычисляемая в точке  $(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = (\mathbf{J}, \mathbf{r}_S)$  максимума регулярной составляющей  $S(\mathbf{l}, \mathbf{r})$ . Здесь коэффициенты  $B_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  при  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  определяются из (3.2). Тогда отношение

$$z = A_S / \sigma, \quad (5.3)$$

аналогично (4.1), можно интерпретировать как апостериорное ОСШ для оценок (5.1) [18,21]. При выполнении (1.2), (4.2) справедлива оценка  $z = O(z_1)$ , где  $O(z)$  — величина порядка  $z$ . Если  $q_0 > 0$ , то  $\vartheta_S \rightarrow 1$ ,  $\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{J}$  при  $\mu_0 \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $z \rightarrow z_1$  при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ .

Будем считать, что параметр  $\mu_0$  и ОСШ  $z_i$  (4.1) настолько велики, что кроме (1.2), (4.2) выполняется условие высокой апостериорной точности ОМП (5.1) :

$$z^2 \gg 1. \quad (5.4)$$

При выполнении (5.4) оценки  $(a_m, \gamma_m)$  (5.1) находятся в малой окрестности точки  $(a_0, \gamma_S)$  максимума регулярной составляющей логарифма ФОП (2.1), причем с ростом ОСШ  $z$  величина этой окрестности уменьшается. Поэтому для нахождения асимптотически точного (с ростом ОСШ  $z$ ) решения системы (5.2) можно использовать аппроксимацию функционала  $L_R(a, \gamma)$  (5.1) при  $\delta_R = \max(|a - a_0|/a_0, |\gamma - \gamma_S|/\gamma_0) = \max(|\kappa - 1|, |\vartheta - \vartheta_S|) \rightarrow 0$ . Для нахождения такой аппроксимации, аналогично [18,21], выполним двумерное разложение нормированного логарифма ФОП  $L_N(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = L(\tau, \Omega, a, \gamma) / A_S$  в ряд Тейлора по переменным  $\kappa = a/a_0$  и  $\vartheta = \gamma/\gamma_0$  в окрестности точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_S$  при фиксированных значениях  $\mathbf{l} = \|\chi, \eta\|$  :

$$\begin{aligned} L_N(\mathbf{l}, \mathbf{r}) &= S_0(\mathbf{l}) + \rho N_0(\mathbf{l}) + [S'_\kappa(\mathbf{l}) + \\ &+ \rho N'_\kappa(\mathbf{l})](\kappa - 1) + [S'_\vartheta(\mathbf{l}) + \rho N'_\vartheta(\mathbf{l})](\vartheta - \vartheta_S) + \\ &+ [S''_{\kappa\vartheta}(\mathbf{l}) + \rho N''_{\kappa\vartheta}(\mathbf{l})](\kappa - 1)(\vartheta - \vartheta_S) + \\ &+ [S''_{\kappa\kappa}(\mathbf{l}) + \rho N''_{\kappa\kappa}(\mathbf{l})](\kappa - 1)^2 / 2 + \\ &+ [S''_{\vartheta\vartheta}(\mathbf{l}) + \rho N''_{\vartheta\vartheta}(\mathbf{l})](\vartheta - \vartheta_S)^2 / 2 + o(\delta_R^2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь  $\rho = \sigma / A_S = 1/z \ll 1$  — малый параметр в силу (5.4),

$$\begin{aligned} S_0(\mathbf{l}) &= S(\mathbf{l}, \mathbf{r}_S) / A_S, \quad N_0(\mathbf{l}) = N(\mathbf{l}, \mathbf{r}_S) / \sigma, \\ S'_u(\mathbf{l}) &= [\partial S(\mathbf{l}, \mathbf{r}) / \partial u] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_S} / A_S, \\ N'_u(\mathbf{l}) &= [\partial N(\mathbf{l}, \mathbf{r}) / \partial u] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_S} / \sigma, \\ S''_{uv}(\mathbf{l}) &= [\partial^2 S(\mathbf{l}, \mathbf{r}) / \partial u \partial v] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_S} / A_S, \\ N''_{uv}(\mathbf{l}) &= [\partial^2 N(\mathbf{l}, \mathbf{r}) / \partial u \partial v] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_S} / \sigma, \end{aligned}$$

а индексы  $u$  и  $v$  принимают значения  $u = \kappa, \vartheta$ ;  $v = \kappa, \vartheta$ . При  $\delta_R \rightarrow 0$  ограничимся в разложении (5.5) явно записанными слагаемыми, имеющими порядок малости не выше  $\delta_R^2$ .

Из (4.12) — (4.15) следует, что при больших ОСШ  $z_i$  (4.1) справедливы аппроксимации [18,21]

$$\begin{aligned} \chi_m &= 1 + v_\tau / z_1^2 + o(1/z_1^2), \\ \eta_m &= 1 + v_\Omega / z_2^2 + o(1/z_2^2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $v_\tau$  и  $v_\Omega$  — случайные величины, первые два момента которых конечны и не зависят от  $z_1$  и  $z_2$ . При выполнении (4.2) ограничимся в (5.6) слагаемыми, имеющими порядок малости не выше  $z_i^{-2}$ . Подставляя эти выражения в (5.5) вместо переменных  $\chi$  и  $\eta$ , находим разложение функционала  $L_R(a, \gamma)$  (5.1) при  $\delta_R \rightarrow 0$ . Подставляя это разложение в (5.2), получаем систему из двух уравнений правдоподобия для нормированных ОМП  $\kappa_m = a_m/a_0$ ,  $\vartheta_m = \gamma_m/\gamma_0$  :

$$\begin{aligned} S''_{u\vartheta}(\mathbf{l}_e)(\vartheta_m - \vartheta_S) + S''_{u\kappa}(\mathbf{l}_e)(\kappa_m - 1) + S'_u(\mathbf{l}_e) + \\ + (1/z)[N'_u(\mathbf{l}_e) + N''_{u\vartheta}(\mathbf{l}_e)(\vartheta_m - \vartheta_S) + \\ + N''_{u\kappa}(\mathbf{l}_e)(\kappa_m - 1)] = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$u = \kappa, \vartheta,$$

где  $\mathbf{l}_e = \|\chi_e, \eta_e\|$ ,  $\chi_e = 1 + v_\tau / z_1^2$ ,  $\eta_e = 1 + v_\Omega / z_2^2$ .

Найдем решение системы уравнений (5.7) при выполнении (4.2). Обозначим

$$\begin{aligned} K'_u(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) &= \langle N'_u(\mathbf{l}_1) N(\mathbf{l}_2) \rangle = \\ &= [\partial K(\mathbf{l}_1, \mathbf{r}, \mathbf{l}_2, \mathbf{r}_S) / \partial u] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_S} / \sigma^2, \\ K''_{uv}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) &= \langle N'_u(\mathbf{l}_1) N'_v(\mathbf{l}_2) \rangle = \\ &= [\partial^2 K(\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2) / \partial u_1 \partial v_2] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_S} / \sigma^2 \end{aligned}$$

при  $u, v = \kappa, \vartheta$ .

Учтем, что, согласно (3.1), (3.2), при  $\delta \rightarrow 0$  справедливы представления

$$\begin{aligned} S'_u(\mathbf{l}) &= o(\delta^{\alpha_1}), \quad S''_{uv}(\mathbf{l}) = S''_{uv}(\mathbf{J}) + o(\delta^{\alpha_2}), \\ K'_u(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) &= K'_u(\mathbf{J}, \mathbf{J}) + o(\delta^{\alpha_3}), \\ K''_{uv}(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) &= K''_{uv}(\mathbf{J}, \mathbf{J}) + o(\delta^{\alpha_4}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $\alpha_i > 1/2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $u, v = \kappa, \vartheta$ . Учитывая, что  $S''_{\kappa\vartheta}(\mathbf{J}) = 0$ , и решая систему (5.7) аналогич-

но [18, 21], с точностью до слагаемых порядка  $o(1/z)$  находим

$$\begin{aligned} \kappa_m &= 1 - N'_\kappa(\mathbf{J}) / zS''_{\kappa\kappa}(\mathbf{J}), \\ \vartheta_m &= \vartheta_S - N''_{\vartheta}(\mathbf{J}) / zS''_{\vartheta\vartheta}(\mathbf{J}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Отметим, что представления (5.8) являются обобщением условий применимости асимптотического метода [18, 21] решения системы (5.7) на случай стохастических сигналов. Если флуктуационная составляющая возмущения отсутствует ( $q_0 = 0$ ), то условия (5.8) эквивалентны соответствующим условиям из [18, 21].

В силу асимптотической гауссовости логарифма ФОП (2.1), случайные величины  $N'_u(\mathbf{J})$  в (5.9) являются асимптотически гауссовскими при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ . Тогда из (5.9) получаем, что ОМП  $\kappa_m, \vartheta_m$  ( $a_m, \gamma_m$ ) при выполнении (1.2), (5.4) являются приближенно гауссовскими. Точность гауссовской аппроксимации распределений этих оценок возрастает с увеличением  $\mu_0$  и  $z(z_i)$ . Условные смещения  $b_\kappa = \langle \kappa_m - 1 \rangle$ ,  $b_\vartheta = \langle \vartheta_m - \vartheta_S \rangle$  и рассеяния  $V_\kappa = \langle (\kappa_m - 1)^2 \rangle$ ,  $V_\vartheta = \langle (\vartheta_m - \vartheta_S)^2 \rangle$  нормированных оценок  $\kappa_m = a_m / a_0$ ,  $\vartheta_m = \gamma_m / \gamma_0$ , согласно (5.9), равны

$$\begin{aligned} b_\kappa &= 0, \quad V_\kappa = \frac{K''_{\kappa\kappa}(\mathbf{J}, \mathbf{J})}{z^2 S''_{\kappa\kappa}(\mathbf{J})} = \frac{1 + q_0}{z_0^2}, \\ b_\vartheta &= \vartheta_S - 1 = -\frac{1 + q_0}{2\mu_0 q_0}, \\ V_\vartheta &= \frac{K''_{\vartheta\vartheta}(\mathbf{J}, \mathbf{J})}{z^2 S''_{\vartheta\vartheta}(\mathbf{J})} = \frac{(1 + q_0)^2}{\mu_0 q_0^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

При этом в выражении для  $V_\vartheta$  (5.10), в силу (1.2), отброшены слагаемые порядка  $1/\mu_0^2 q_0^2$  и менее. Точность формул (5.10) возрастает с увеличением  $\mu_0$  и  $z(z_i)$ .

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНКИ

С целью проверки работоспособности алгоритма ОМП (2.5), (2.6) и установления границ применимости асимптотически точных формул (4.12)–(4.15), (5.10) для характеристик ОМП выполнялось статистическое моделирование алгоритма оценки на ЭВМ. В ходе моделирования для различных реализаций наблюдаемых данных (1.4) формировались отсчеты случайных процессов  $\xi^*(t)$  и  $y(t, \Omega)$  с шагом дискретизации  $\Delta t = 0.2 / \eta^* \chi^* \mu_1$ , где  $\eta^* = V_2 / V_1$ ,  $\chi^* = \Gamma_2 / \Gamma_1$ . Затем вычислялись отсчеты  $L_{ij} = L_1(i\Delta\chi\tau_0, j\Delta\eta\Omega_0)$ ,  $L_{0i} = L_0(i\Delta\chi\tau_0)$  и  $L_{mj} = L_m(i\Delta\chi\tau_0, j\Delta\eta\Omega_0)$  случайных полей  $L_1(\chi\tau_0, \eta\Omega_0)$ ,  $L_0(\chi\tau_0)$  (2.3) и  $L_m(\chi\tau_0, \eta\Omega_0)$  (2.4) на интервалах  $\chi \in [\Gamma_1 / \tau_0; \Gamma_2 / \tau_0]$ ,

$\eta \in [V_1 / \Omega_0; V_2 / \Omega_0]$  с шагом дискретизации  $\Delta\chi = \Delta\eta = 0.005$  по переменным  $\chi$  и  $\eta$ . Реализации функционалов (2.3), (2.4) аппроксимировались ступенчатыми функциями на основе сформированных отсчетов. Относительная среднеквадратическая погрешность такой аппроксимации определялась по методике [9] и не превышала 0.1 для выбранного шага дискретизации. Дальнейшее уменьшение этого шага практически не влияло на результаты моделирования.

При моделировании ОМП (2.5) для каждой реализации  $x(t)$  определялись номера  $i = i_m$  и  $j = j_m$  наибольшего отсчета  $L_{mij}$  функционала (2.4) и вычислялись нормированные ОМП  $\chi_m = i_m \Delta\chi$ ,  $\eta_m = j_m \Delta\eta$  длительности и ширины полосы частот. Затем на основе оценок  $\chi_m, \eta_m$  и отсчетов  $L_{0i_m}, L_{1i_m j_m}$ , согласно (2.6), формировались нормированные оценки  $\kappa_m, \vartheta_m$  среднего значения и интенсивности возмущения. На основе ряда оценок, полученных в результате  $N$  циклов таких вычислений, рассчитаны выборочные смещения  $b_\chi, b_\eta, b_\kappa, b_\vartheta$  и рассеяния  $V_\chi, V_\eta, V_\kappa, V_\vartheta$  оценок, а также моменты ошибок оценок высших порядков.

Некоторые результаты моделирования показаны на рис. 1–4. Здесь знаками нанесены экспериментальные значения рассеяний оценок  $\chi_m, \eta_m, \kappa_m, \vartheta_m$  в зависимости от  $q_0$  при фиксированных параметрах  $\mu_0, z_0$  и при  $\Gamma_2 / \tau_0 = V_2 / \Omega_0 = 2$ ,  $\Gamma_1 / \tau_0 = V_1 / \Omega_0 = 0.5$ . Рис. 1 соответствует оценке  $\chi_m$  длительности, рис. 2 — оценке  $\eta_m$  ширины полосы частот, рис. 3 — оценке  $\kappa_m$  среднего значения, а рис. 4 — оценке  $\vartheta_m$  интенсивности возмущения. Сплошными линиями на рис. 1–4 нанесены соответствующие теоретические зависимости рассеяний, рассчитанные по формулам (4.15), (5.10). Штриховыми линиями на рис. 1, 2 показаны теоретические зависимости рассеяний оценок длительности и ширины полосы частот, рассчитанные по более точным формулам (4.14) с использованием (4.13). Кривые 1 и ромбы на рис. 1–4 получены при  $\mu_0 = 50, z_0 = 0$ , кривые 2 и крестики —  $\mu_0 = 100, z_0 = 0$ , кривые 3 и квадраты —  $\mu_0 = 50, z_0 = 7$ , а кривые 4 и кружочки —  $\mu_0 = 100, z_0 = 7$ .

Приведенные на рис. 1–4 результаты моделирования получены на основе обработки не менее, чем  $N = 10^3$ , реализаций наблюдаемых данных  $x(t)$ . В результате границы доверительных интервалов для рассеяний оценок откло-

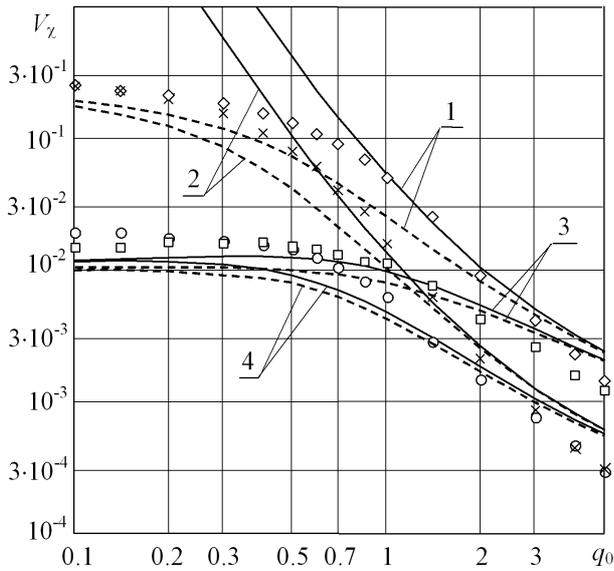


Рис. 1. Рассеяние нормированной оценки длительности возмущения

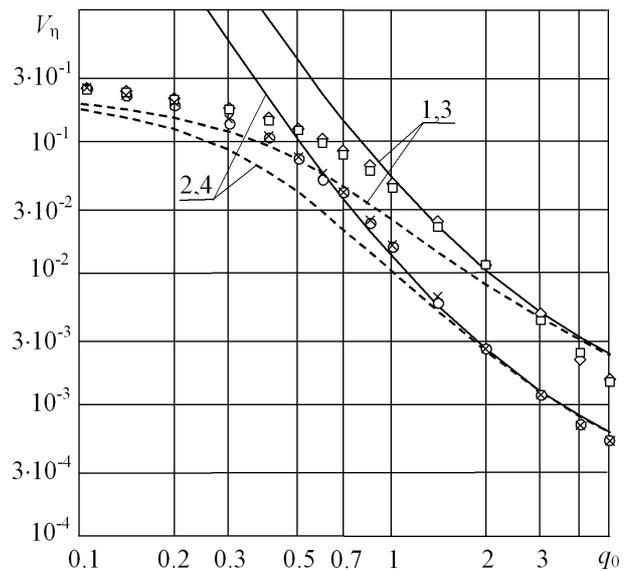


Рис. 2. Рассеяние нормированной оценки ширины полосы частот возмущения

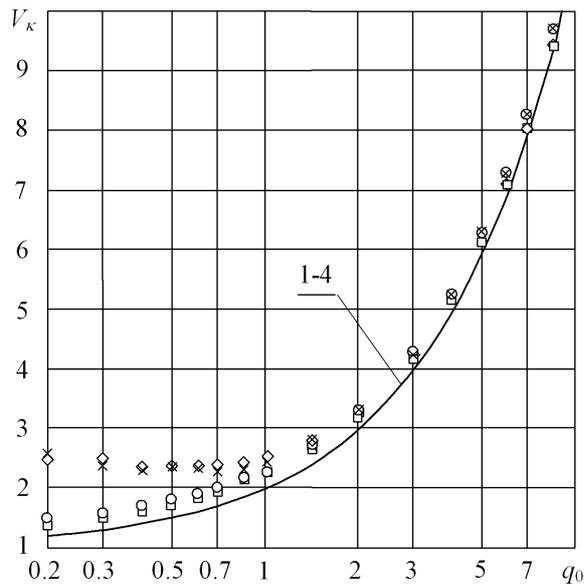


Рис. 3. Рассеяние нормированной оценки среднего значения возмущения

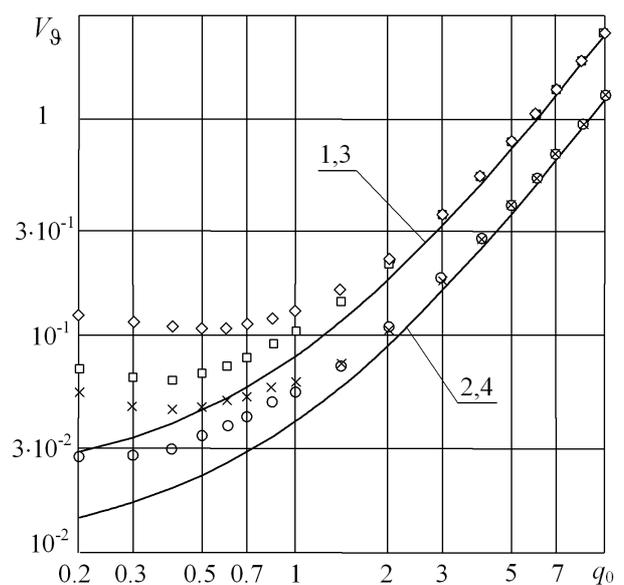


Рис. 4. Рассеяние нормированной оценки интенсивности возмущения

няются от экспериментальных значений не более, чем на 30 % с вероятностью 0.9.

Из рис. 1, 2 и других результатов моделирования следует, что теоретические асимптотические формулы для рассеяний ОМП длительности и ширины полосы частот возмущения удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные уже при  $\mu_0 \geq 40 \dots 50$  и  $z \geq 3 \dots 4$  (формулы (4.15)) или при  $\mu_0 \geq 40 \dots 50$ ,  $z \geq 0.7 \dots 1$

(формулы (4.13), (4.14)). Аппроксимация считалась удовлетворительной, если расхождение теоретических и экспериментальных значений не превышало 75 %. При  $q_0 > 5 \dots 10$  теоретические зависимости для рассеяний  $V_z$ ,  $V_n$  начинают отклоняться от экспериментальных, так как асимптотический (при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ) метод вычисления моментов функционала (2.4) в п. 3 приводит к абсолютной погрешнос-

ти расчета дисперсий оценок  $\chi_m$  и  $\eta_m$  порядка  $1/\mu_0^2$ .

Из рис. 3, 4 и других результатов моделирования следует, что теоретические асимптотические формулы (5.10) для рассеяний ОМП среднего значения и интенсивности возмущения удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные уже при  $\mu_0 \geq 40 \dots 50$  и  $z(z_i) \geq 3 \dots 4$ . При этом точность теоретических формул возрастает с увеличением  $\mu_0$  (4.2) и  $z_i$  (4.4),  $z$  (5.3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. — М.: Мир, 1989. — 278 с.
2. Казаков И. Е. Оптимизация динамических систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев. — М.: Наука, 1980. — 381 с.
3. Ахманов С. А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин — М.: Наука, 1981. — 640 с.
4. Вопросы статистической теории радиолокации / П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; под ред. Г. П. Тартаковского. — М.: Сов. радио, 1963. — Т. 1. — 424 с.
5. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Г. Ван-Трис. — М.: Сов. радио, 1977. Т. 3. — 644 с.
6. Hsu S. T. Physical Model for Burst Noise in Semiconductor Devices / S. T. Hsu, R. J. Whittier, C. A. Mead // Solid-State Electron. — 1970. — Vol. 13. July. — P. 51—57.
7. Кловский Д. Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам / Д. Д. Кловский. — М.: Радио и связь, 1982. — 304 с.
8. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
9. Захаров А. В. Обнаружение скачкообразного случайного возмущения / А. В. Захаров, Е. В. Прохнев, А. П. Трифонов // Теория и системы управления. — 2001. — № 6. — С. 29—37.
10. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов / Е. И. Куликов — М.: Радио и связь, 1986. — 272 с.
11. Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов / Г. Я. Мирский. — М.: Энергия, 1972. — 456 с.
12. Трифонов А. П. Прием случайного сигнала с неизвестной шириной спектра мощности / А. П. Трифонов, С. А. Галун // Радиотехника и электроника. — 1982. — Т. 27, № 11. — С. 1554—1562.
13. Клигене Н. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов / Н. Клигене, Л. Телькснис // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 10. — С. 17—34.
14. Ибрагимов И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский — М.: Наука, 1979. — 527 с.
15. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М.: Сов. Радио, 1978. — 296 с.
16. Трифонов А. П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Е. П. Нечаев, В. И. Парфенов. — Воронеж: ВГУ, 1991. — 246 с.
17. Трифонов А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
18. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К. К. Васильева, В. А. Омельченко. — Ульяновск: УЛГТУ, 1995. — 256 с.
19. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
20. Kailath T. Some Integral Equations with Non-rational Kernels / T. Kailath // IEEE Trans. on Inform. Theory. — 1966. — Vol. IT-12, № 4. — P. 442—447.
21. Трифонов А. П. Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности / А. П. Трифонов, В. К. Бутейко // Радиотехника и электроника. — 1991. — Т. 36, № 2. — С. 319—327.