

ОБНАРУЖЕНИЕ ОБЪЕКТА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДВИЖЕНИЯ ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЮ*

А. П. Трифонов, Р. В. Куцов

Воронежский государственный университет

Для аппликативной модели взаимодействия изображения движущегося объекта и фона выполнены синтез и анализ максимально правдоподобных алгоритмов обнаружения объекта в условиях априорной неопределенности относительно параметров движения. Рассмотрены случаи априорного незнания величины скорости, направления движения и вектора скорости. Исследовано влияние априорного незнания параметров движения и характера распределения интенсивности изображения движущегося объекта на эффективность обнаружения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: обнаружение, аппликативная модель, максимально правдоподобный алгоритм, неизвестные параметры, скорость, направление движения, вектор скорости, неоднородное изображение.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной проблемой при решении задач автоматического контроля и управления является обнаружение и распознавание объектов по их изображениям [1]. Одним из перспективных направлений в разработке таких систем является направление, использующее технологии «машинного зрения», которые находят применение в системах навигации и наведения летательных аппаратов [2], в самолетных, спутниковых и других системах контроля состояния охраняемых зон, природных объектов, окружающей среды, в системах контроля объектов вторжения [3], в системах медицинской и технической диагностики [4] и т. п. Функционирование автоматизированных систем в реальных условиях сопровождается помехами, имеющими случайный характер и различную физическую природу. Наиболее распространенной моделью флуктуационной помехи является аддитивный гауссовский белый шум.

Существенно возросшая разрешающая способность современных систем дистанционного наблюдения стимулировала в последнее время развитие теории обнаружения объектов по их изображениям с учетом затенения фона. Вопросы обнаружения пространственно-протяженных объектов (ППО) рассматриваются в [5–12] и других работах. В [5, 6] показано, что использование аддитивной модели взаимодействия ППО и фона может приводить к недостоверным результатам. В [7] проведена оценка статистических

характеристик субоптимального межкадрового обнаружителя образов, смещающихся с известной скоростью из заданного положения, в предположении, что смещающиеся образы на последовательных кадрах не перекрываются. В [8, 9] исследованы потенциальные возможности обнаружения ППО, движущегося в заданном направлении с известной скоростью. Однако часто возникают ситуации, когда параметры движения объекта неизвестны. В работах [10–12] рассмотрены различные случаи априорной неопределенности относительно величины и вектора скорости движения изображения объекта.

Целью данной работы является разработка единого методического подхода к решению задачи оценки эффективности функционирования обнаружителей движущихся объектов по их изображениям в условиях априорной неопределенности относительно параметров движения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в двумерной области Ω в течение интервала времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация гауссовского случайного поля $\Xi(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей Ω , а t — время. Положим [8–12], что при гипотезе H_1 поле $\Xi(\mathbf{r}, t)$ содержит изображение $s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t)$ движущегося со скоростью \mathbf{V}_0 объекта, неподвижный фон $v(\mathbf{r})$ и аддитивный гауссовский пространственно-временной белый шум $n(\mathbf{r}, t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle n(\mathbf{r}_1, t_1) n(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = N_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2) / 2$, где N_0 — односторонняя спектральная плотность белого шума.

В соответствии с аппликативной моделью [5, 6, 8–12], учитывающей эффекты затенения

© Трифонов А. П., Куцов Р. В., 2008

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Воронежской области (проекты 06-07-96301 и 07-01-00042).

объектом участка фона, полагаем, что изображение объекта занимает часть Ω_s области Ω , а фон — оставшуюся часть области наблюдения. При отсутствии объекта фон занимает всю область наблюдения. Будем считать, что разрешающая способность системы наблюдения достаточно высока, так что размеры неоднородностей объекта и фона велики по сравнению с размерами элемента разрешения в плоскости наблюдения. Тогда в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдению доступна реализация изображения в картинной плоскости:

$$\Xi(\mathbf{r}, t) = \gamma_0 [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) - v(\mathbf{r})] \times \\ \times I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) + v(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $\gamma_0 = 0$, если справедлива гипотеза H_0 , и $\gamma_0 = 1$, если справедлива гипотеза H_1 , $I_s(\mathbf{r}) = 1$ при $\mathbf{r} \in \Omega_s$ и $I_s(\mathbf{r}) = 0$, если $\mathbf{r} \notin \Omega_s$ — индикатор, описывающий форму изображения объекта. На основе наблюдаемых данных необходимо вынести решение о наличии или отсутствии объекта в области наблюдения.

Часто параметры движения объекта априори неизвестны. Рассмотрим далее случай, когда априорное незнание вектора параметров движения \mathbf{v}_0 приводит только к априорной неопределенности относительно вектора скорости \mathbf{V}_0 , то есть вектор скорости может быть задан как функция параметров движения: $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(\mathbf{v}_0)$, $\mathbf{v}_0 \in \Upsilon$. К параметрам движения такого вида можно отнести величину скорости при известном направлении движения, направление движения при известной скорости, а также вектор скорости или его компоненты.

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДВИЖЕНИЯ

Для решения задачи проверки гипотезы H_1 против альтернативы H_0 необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). В [13—15] приведены выражения для ФОП в случаях, когда при одной из гипотез наблюдаемое поле представляет собой реализацию гауссовского белого шума. Введем вспомогательную гипотезу H , при которой $\Xi(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, что ФОП при проверке гипотезы H_1 против альтернативы H_0 есть отношение ФОП при проверке гипотез H_1 и H_0 против простой альтернативы H , то есть $\Lambda[H_1 | H_0] = \Lambda[H_1 | H] / \Lambda[H_0 | H]$. Следова-

тельно, логарифм ФОП $L(\mathbf{v}) = \ln \Lambda[H_1 | H_0] = L_1(\mathbf{v}) - L_0$, где

$$L_0 = \ln \Lambda[H_0 | H] = \\ = \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} \Xi(\mathbf{r}, t) v(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} v^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dt, \\ L_1(\mathbf{v}) = \ln \Lambda[H_1 | H] = \\ = \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} \Xi(\mathbf{r}, t) \{s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) + \\ + v(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t)]\} d\mathbf{r} dt - \\ - \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} \{s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) + \\ + v^2(\mathbf{r}) [1 - I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t)]\} d\mathbf{r} dt$$

— логарифмы ФОП при проверке гипотез H_0 и H_1 против альтернативы H соответственно. Тогда [9]

$$L(\mathbf{v}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} \{ \Xi(\mathbf{r}, t) [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) - v(\mathbf{r})] - \\ - [s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) - v^2(\mathbf{r})] / 2 \} \times \\ \times I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) d\mathbf{r} dt. \quad (2)$$

Если параметры движения объекта априори известны, то решение о наличии или отсутствии объекта в области наблюдения выносится путем сравнения величины $L = L(\mathbf{v}_0)$ с порогом h , определяемым выбранным критерием оптимальности [14] в соответствии с правилом

$$L \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} h. \quad (3)$$

Для того, чтобы исключить влияние неизвестных параметров движения, заменим их неизвестные значения оценками максимально-го правдоподобия (МП) [15]. При этом решение о наличии или отсутствии объекта формируется в соответствии с правилом (3), где теперь $L = \sup L(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \Upsilon$.

Подставляя в (2) реализацию наблюдаемых данных (1), представим логарифм ФОП в виде суммы сигнальной и шумовой функций [15, 16]:

$$L(\mathbf{v}) = \gamma_0 \hat{S}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) + \hat{N}(\mathbf{v}) - \hat{S}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) / 2, \quad (4)$$

где

$$\hat{S}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_{\Omega} [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) - v(\mathbf{r})] \times \\ \times [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v}_0)t) - v(\mathbf{r})] \times \\ \times I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v})t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{v}_0)t) d\mathbf{r} dt \quad (5)$$

— сигнальная функция, а $\hat{N}(\mathbf{v})$ — шумовая функция, представляющая собой реализацию гауссовского случайного поля с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\langle \hat{N}(\mathbf{v}_1) \hat{N}(\mathbf{v}_2) \rangle = \hat{S}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Величина $z^2 = \hat{S}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0)$ представляет собой отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приемника МП [10, 15, 16]. В общем случае z^2 зависит от неизвестных параметров движения. Далее будем считать, что фон является однородным с интенсивностью $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0$. В этом случае ОСШ

$$z^2 = \frac{2T}{N_0} \iint_{\Omega_s} [s(x, y) - v_0]^2 dx dy \quad (6)$$

не зависит от параметров движения объекта, то есть эти параметры являются неэнергетическими [16]. При этом сигнальная функция (5) достигает своего максимального значения z^2 при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$.

Поскольку ОСШ z не зависит от \mathbf{v} , вместо $L(\mathbf{v})$ (4) введем нормированный член логарифма ФОП, зависящий от параметров движения:

$$L_z(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v})/z + z/2 = \gamma_0 z S(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) + N(\mathbf{v}), \quad (7)$$

где

$$S(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) = \hat{S}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)/z^2 \quad (8)$$

— нормированная сигнальная функция, а шумовая функция $N(\mathbf{v}) = \hat{N}(\mathbf{v})/z$ представляет собой реализацию гауссовского случайного поля с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle N(\mathbf{v}_1) N(\mathbf{v}_2) \rangle = S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (9)$$

При этом правило обнаружения (3) примет вид

$$\hat{L}_z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} u,$$

где $\hat{L}_z = \sup L_z(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \Upsilon$, а $u = h/z + z/2$ — нормированный порог.

Вероятности ошибок первого рода (ложной тревоги) α и второго рода (пропуска объекта) β в приемнике МП можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\sup L_z(\mathbf{v}) > u, \mathbf{v} \in \Upsilon | \gamma_0 = 0] = \\ &= P[M_0 > u], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \beta &= P[\sup L_z(\mathbf{v}) < u, \mathbf{v} \in \Upsilon | \gamma_0 = 1] = \\ &= P[M_1 < u]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь M_0 и M_1 — соответственно величины абсолютного (наибольшего) максимума $L_z(\mathbf{v})$ при отсутствии и наличии изображения объекта в наблюдаемой реализации.

Для определения характеристик обнаружения согласно (10), (11) необходимо найти функции распределения абсолютного максимума нормированного логарифма ФОП при наличии и отсутствии объекта. Согласно (7), логарифм ФОП является гауссовским случайным полем, поэтому его свойства полностью определяются математическим ожиданием и корреляционной функцией. Согласно (7), (9) нормированная сигнальная функция (8) определяет математическое ожидание и корреляционную функцию логарифма ФОП, а значит все его свойства. При этом характеристики обнаружения зависят от поведения нормированной сигнальной функции в окрестности ее максимума [13]. Для определения характеристик обнаружения достаточно исследовать свойства функции $S(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)$ (8) в малой окрестности точки \mathbf{v}_0 . При этом будем полагать, что функция $s(\mathbf{r})$, описывающая интенсивность изображения объекта, непрерывна и непрерывно дифференцируема. К сожалению, получить асимптотические разложения сигнальной функции и найти выражения для функций распределения абсолютного максимума нормированного логарифма ФОП в случае произвольного вектора неизвестных параметров движения не удастся. В связи с этим для дальнейшего анализа МП алгоритма обнаружения объекта с неизвестными параметрами движения конкретизируем физический смысл неизвестных параметров.

ОБНАРУЖЕНИЕ ОБЪЕКТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ СКОРОСТИ

Часто величина скорости движения объекта априори неизвестна, а направление движения можно считать заданным. Будем считать, что скорость движения V_0 принимает значения из априорного интервала $W = [0, V_{\max}]$. Введем систему координат XU , расположив ось X в направлении движения объекта. При этом в (2), (5) нужно положить $\mathbf{v} \equiv V$, так что $\mathbf{V}(\mathbf{v}) = V\mathbf{i}_x$, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(\mathbf{v}_0) = V_0\mathbf{i}_x$, где \mathbf{i}_x — орт оси X .

Будем считать, что Ω_s — односвязная конечная область с кусочно-гладкой границей Γ , и любая прямая, параллельная направлению движения, пересекает границу Γ не более, чем в двух точках, за исключением прямолинейных участков границы, параллельных направлению движения. Области такого вида назовем областями типа K_V [9]. Пусть отрезок $[y_{\min}; y_{\max}]$ оси

Y представляет собой проекцию области Ω_s (вместе с границей Γ) на эту ось (рис. 1). Проведем через точки y_{\min} и y_{\max} прямые, параллельные оси X так, как показано на рис. 1. Каждая из этих двух прямых пересекает границу Γ лишь в одной точке. Эти две точки A и B пересечения указанных прямых с границей Γ разделяют границу на две кривые Γ_- и Γ_+ , которые могут быть однозначно спроецированы на ось Y и описываются уравнениями $x(y) = \Gamma_-(y)$ и $x(y) = \Gamma_+(y)$ соответственно.

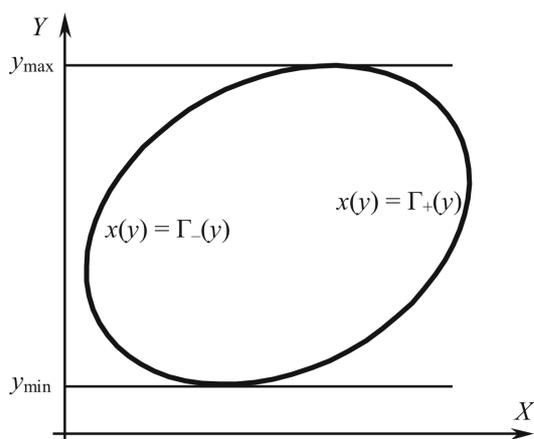


Рис. 1

Перепишем нормированную сигнальную функцию $S(V, V_0)$ (8) в виде

$$S(V, V_0) = S(\Delta V) = \frac{2}{N_0 z^2} \int_0^T \iint_{\Omega_s} [s(x, y) - v_0][s(x - \Delta Vt, y) - v_0] \times I_s(x - \Delta Vt, y) dx dy dt, \quad (12)$$

где $\Delta V = V - V_0$. В [12] показано, что при $|\Delta V| \rightarrow 0$ для нормированной сигнальной функции (12) справедливо асимптотическое разложение [12]

$$S(V, V_0) = 1 - \delta_V |V - V_0| + o(|V - V_0|), \quad (13)$$

где

$$\delta_V = \frac{T \left\{ \int_{\Gamma_-} [s(x, y) - v_0]^2 dy + \int_{\Gamma_+} [s(x, y) - v_0]^2 dy \right\}}{4 \iint_{\Omega} [s(x, y) - v_0]^2 I_s(x, y) dx dy}. \quad (14)$$

В числитель выражения (14) входит сумма криволинейных интегралов второго рода (интегралов по проекциям) [17] по левой Γ_- и по правой Γ_+ относительно прямой AB частям границы изображения объекта. Эти интегралы вычисляются от квадрата разности интенсив-

ностей изображения объекта и фона (скачка интенсивности) $s(x, y) - v_0$ на этих границах.

Аналогично тому, как это сделано в [10], можно показать, что $S(|\Delta V|) \rightarrow 0$ при $|\Delta V| \rightarrow \infty$.

В случае, когда сигнальная функция допускает в окрестности точки истинного значения скорости V_0 асимптотическое разложение вида (13), в [10, 12] получены асимптотические выражения для вероятностей ложной тревоги α_1 и пропуска объекта β_1 при неизвестной величине скорости его движения:

$$\alpha_1 \approx \begin{cases} 1 - \exp\left[-m_V u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}\right], & u \geq 1, \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (15)$$

$$\beta_1 \approx \exp\left[-m_V u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}\right] \left\{ \Phi(u - z) - 2 \exp(3z^2/2 - uz) \Phi(u - 2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u - 3z) \right\} \quad (16)$$

при $u \geq 1$ и $\beta_1 \approx 0$ при $u < 1$. Здесь $m_V = \delta_V V_{\max}$ — приведенная длина априорного интервала возможных значений скорости [10, 12, 13, 15], определяющая число разрешимых значений скорости в априорной области W , а

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-g^2/2) dg$ — интеграл вероятности. Точность формулы (15) растет с увеличением параметра m_V и нормированного порога u , а точность формулы (16) — с увеличением ОСШ z , параметра m_V и порога u .

ОБНАРУЖЕНИЕ ОБЪЕКТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ИЗВЕСТНОЙ СКОРОСТЬЮ В НЕИЗВЕСТНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Рассмотрим далее случай обнаружения объекта, движущегося с априори известной скоростью V_0 в неизвестном направлении, которое будем характеризовать углом φ_0 между вектором скорости \mathbf{V}_0 и осью X прямоугольной системы координат в плоскости Ω . При этом в (2), (5) нужно положить $v \equiv \varphi$, так что $\mathbf{V}(v) = V_0(\mathbf{i}_x \cos \varphi + \mathbf{i}_y \sin \varphi)$, $\mathbf{V}_0 = V_0(\mathbf{i}_x \cos \varphi_0 + \mathbf{i}_y \sin \varphi_0)$. Будем считать, что направление движения принимает значения из априорного интервала $U = [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$, причем $0 \leq \varphi_{\min} < \varphi_{\max} < 2\pi$.

Пусть объект отсутствует в области наблюдения, то есть $\gamma_0 = 0$. Тогда вероятность ложной тревоги можно записать в виде [10, 12]

$$\alpha_\varphi = 1 - F_N(u), \quad (17)$$

где $F_N(x) = P[\sup N(\varphi) < x, \varphi \in U]$.

Согласно (8), (9), в общем случае случайный процесс $N(\varphi)$ является неоднородным, что не позволяет воспользоваться результатами [13, 15] для расчета характеристик обнаружения. Аналогично тому, как это сделано в [18], разобьем априорную область U возможных значений угла φ на I отрезков $U_i = [\varphi_i, \varphi_i + \Delta\varphi_i]$ длиной $\Delta\varphi_i$, $i = \overline{1, I}$ так, что

$$d = \max_i \Delta\varphi_i \ll 1. \quad (18)$$

Тогда при $d \rightarrow 0$ на каждом отрезке U_i случайный процесс $N(\varphi)$ можно считать локально однородным. Потребуем кроме того, чтобы значения процесса $N(\varphi)$ на различных интервалах U_i были приближенно статистически независимы. Для этого достаточно, чтобы

$$\min_i (V_0 T \Delta\varphi_i) \gg l_{\max}, \quad (19)$$

где l_{\max} — максимальный размер объекта. При выполнении (18), (19) вероятность $F_N(x)$ можно записать в виде $F_N(x) \approx \prod_i F_{N_i}(x)$, где

$F_{N_i}(x) = P[\sup N(\varphi) < x, \varphi \in U_i]$ — функция распределения величины абсолютного максимума случайного процесса $N(\varphi)$ в подобласти U_i , $i = \overline{1, I}$.

Для определения функций $F_{N_i}(x)$ воспользуемся результатами, полученными в предыдущем разделе. Относительная скорость изображений, движущихся со скоростью V_0 под углами φ и φ_0 к оси X , равна $\Delta V = 2V_0 \sin(|\varphi - \varphi_0|/2)$, причем $\Delta V \rightarrow V_0|\varphi - \varphi_0|$ при $|\varphi - \varphi_0| \rightarrow 0$. Положим, что контур изображения объекта является выпуклым. Проведем касательные к границе изображения объекта, перпендикулярные направлению его движения, и обозначим через $\Gamma_-(\varphi_0)$ и $\Gamma_+(\varphi_0)$ части границы Γ , на которые она разделяется точками касания (рис. 2). Введем прямоугольную систему координат $X'Y'$, направив ось Y' в направлении движения. Используя (13) находим, что при $|\varphi - \varphi_0| \rightarrow 0$ нормированная сигнальная функция допускает асимптотическое представление $\hat{S}(\varphi, \varphi_0) = 1 - \delta_\varphi(\varphi_0)|\varphi - \varphi_0| + o(|\varphi - \varphi_0|)$, где

$$\delta_\varphi(\varphi_0) = \frac{TV_0 \left\{ \int_{\Gamma_-(\varphi_0)} [s(x', y') - v_0]^2 dy' + \int_{\Gamma_+(\varphi_0)} [s(x', y') - v_0]^2 dy' \right\}}{4 \iint_{\Omega} [s(x, y) - v_0]^2 I_s(x, y) dx dy}. \quad (20)$$

Используя результаты [13], получим:

$$F_{N_i}(x) \approx \exp\left[-\Delta\varphi_i \delta_\varphi(\varphi_i) x \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}\right]$$

при $x \geq 1$, и $F_{N_i}(x) \approx 0$ при $x < 1$, так что функция распределения абсолютного максимума нормированного логарифма ФОП при $\varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ и отсутствии объекта в области наблюдения может быть записана в виде

$$F_N(x) \approx \begin{cases} \exp\left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \sum_i \delta_\varphi(\varphi_i) \Delta\varphi_i\right], & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases} \quad (21)$$

При выполнении (18), (19) величина $\delta_\varphi(\varphi_i)$ мало изменяется в пределах любого из отрезков U_i , а вероятность $F_N(x)$ не зависит от способа разбиения априорного интервала U на отрезки U_i . Эти обстоятельства позволяют заменить в (21) сумму соответствующим интегралом:

$$F_N(x) \approx \exp\left[-xm_\Sigma \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}\right] \quad (22)$$

при $x \geq 1$, и $F_N(x) \approx 0$ при $x < 1$, где $m_\Sigma = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \delta_\varphi(\varphi) d\varphi$ — приведенная длина априорного интервала возможных значений угла φ .

Подставляя (22) в (17), получаем, что вероятность ложной тревоги при обнаружении изображения объекта, движущегося с известной скоростью V_0 в неизвестном направлении, определяется выражением

$$\alpha_\varphi \approx \begin{cases} 1 - \exp\left[-um_\Sigma \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}\right], & u \geq 1, \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (23)$$

Положим теперь, что изображение объекта присутствует в наблюдаемой реализации, то есть в (1), (7) $\gamma_0 = 1$. Вероятность пропуска изображения объекта при использовании МП алгорит-

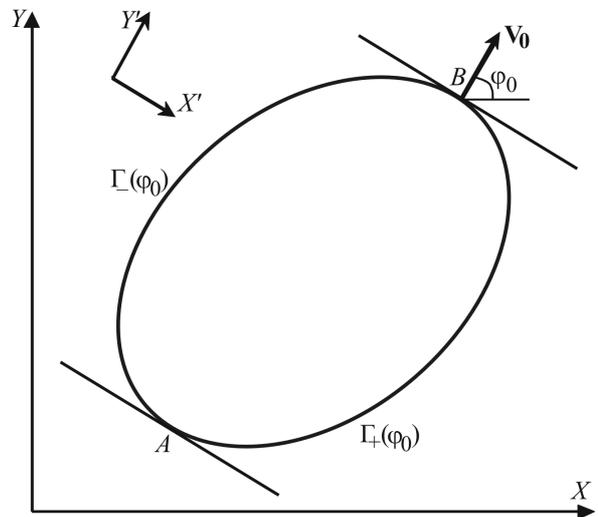


Рис. 2

ма обнаружения может быть записана в виде $\beta_\varphi = P(\sup L_z(\varphi) < u, \varphi \in U | \gamma_0 = 1)$.

Пусть на отрезке U_S , являющемся одним из множества отрезков $U_i, i = \overline{1, I}$, сигнальная функция $S(\varphi, \varphi_0)$ существенно отлична от нуля [15], а U_N — множество отрезков, дополняющее U_S до U . Обозначим $M_S = \sup_{\varphi \in U_S} L_z(\varphi) = L_z(\hat{\varphi})$ и

$M_N = \sup_{\varphi \in U_N} L_z(\varphi)$ — величины абсолютных максимумов случайного процесса $L_z(\varphi)$ (7) при $\gamma_0 = 1$ в подобластях U_S и U_N соответственно. Здесь $\hat{\varphi}$ — положение абсолютного максимума $L_z(\varphi)$. Согласно (9) при выполнении (18), (19) длина отрезка U_S существенно меньше суммарной длины отрезков из множества U_N , причем $S(\varphi, \varphi_0) \approx 0$ при $\varphi \in U_N$, так что $M_N \approx \sup_{\varphi \in U_N} N(\varphi) \approx$

$\sup_{\varphi \in U} N(\varphi)$, а величины M_S и M_N можно приближенно считать статистически независимыми. Тогда для вероятности пропуска объекта имеем:

$$\beta_\varphi \approx P[M_S < u]P[M_N < u] \approx F_N(u)F_S(u) = (1 - \alpha_\varphi)F_S(u), \quad (24)$$

где $F_N(u)$ определено в (22), а $F_S(u) = P[M_S < u]$.

Будем считать, что ОСШ z достаточно велико, так что абсолютный максимум нормированного логарифма ФОП $L_z(\varphi)$ (7) лежит в малой окрестности φ_0 . Поскольку $\hat{\varphi} \rightarrow \varphi_0$ в среднеквадратическом при $z \rightarrow \infty$ [15], для определения функции распределения $F_S(u)$ достаточно исследовать поведение абсолютного максимума нормированного логарифма ФОП в малой окрестности точки φ_0 . Воспользовавшись методом локально-марковской аппроксимации [13], получим приближенное выражение для функции распределения величины абсолютного максимума $L_z(\varphi)$ при $\varphi \in U_S$ в виде

$$F_S(u) \approx \Phi(u - z) - 2 \exp(3z^2/2 - uz) \Phi(u - 2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u - 3z). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получаем вероятность пропуска изображения, движущегося с известной скоростью в неизвестном направлении:

$$\beta_\varphi \approx \exp[-um_\Sigma \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}] \times \{ \Phi(u - z) - 2 \exp(3z^2/2 - uz) \Phi(u - 2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u - 3z) \}, \quad (26)$$

при $u \geq 1$, и $\beta_\varphi \approx 0$ при $u < 1$. Из (23), (26) следует, что характеристики обнаружения за-

висят от скорости движения объекта V_0 , причем эффективность обнаружения снижается при увеличении V_0 .

ОБНАРУЖЕНИЕ ОБЪЕКТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ ВЕКТОРОМ СКОРОСТИ

В реальных условиях часто возникают ситуации, когда наблюдателю априори неизвестны как скорость, так и направление движения объекта, то есть неизвестен вектор скорости. Положим, что объект движется из заданного положения с априори неизвестным вектором скорости $\mathbf{V}_0 = V_{0x}\mathbf{i}_x + V_{0y}\mathbf{i}_y$, где \mathbf{i}_x и \mathbf{i}_y — орты осей X и Y прямоугольной системы координат, а V_{0x} и V_{0y} — компоненты вектора \mathbf{V}_0 , которые представляют собой проекции этого вектора на оси X и Y . В этом случае в (2), (5) нужно положить $\mathbf{v} \equiv (V_x, V_y)$, так что $\mathbf{V}(\mathbf{v}) = V_x\mathbf{i}_x + V_y\mathbf{i}_y$. Будем считать, что компоненты вектора скорости принимают значения из априорных интервалов $W_x = [-V_{x\max}/2; V_{x\max}/2]$ и $W_y = [-V_{y\max}/2; V_{y\max}/2]$.

Рассмотрим случай обнаружения прямоугольного объекта со сторонами l_x и l_y , расположенными вдоль координатных осей X и Y соответственно, так что $I_s(x, y) = 1$ при $(x, y) \in \{[-l_x/2, l_x/2], [-l_y/2, l_y/2]\}$, иначе $I_s(x, y) = 0$. В этом случае нормированную сигнальную функцию $S(V_x, V_y; V_{0x}, V_{0y})$ (8) можно переписать в виде

$$S(V_x, V_y; V_{0x}, V_{0y}) = S(\Delta V_x, \Delta V_y) = \frac{2}{N_0 z^2} \int_0^T \int_{\max(-l_y/2, -l_y/2 + \Delta V_y t)}^{\min(l_y/2, l_y/2 + \Delta V_y t)} \int_{\max(-l_x/2, -l_x/2 + \Delta V_x t)}^{\min(l_x/2, l_x/2 + \Delta V_x t)} [s(x, y) - v_0] \times [s(x - \Delta V_x t, y - \Delta V_y t) - v_0] dx dy dt, \quad (27)$$

где $\Delta V_x = V_x - V_{0x}$, $\Delta V_y = V_y - V_{0y}$. В (27) предполагается, что $|\Delta V_x|t \leq l_x$, $|\Delta V_y|t \leq l_y$ при всех $t \in [0, T]$. Согласно (27) сигнальная функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки истинного значения вектора скорости (V_{0x}, V_{0y}) , за исключением этой точки, где производная терпит разрыв первого рода. Аналогично тому, как это было сделано в [12] при выводе формулы (13), находим, что при $\Delta_m = \max(|\Delta V_x|, |\Delta V_y|) \rightarrow 0$ для нормированной сигнальной функции (27) справедливо асимптотическое разложение

$$S(V_x - V_{0x}; V_y - V_{0y}) = 1 - \delta_x |V_x - V_{0x}| - \delta_y |V_y - V_{0y}| + o(\Delta_m), \quad (28)$$

где

$$\delta_x = \frac{T \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \left\{ \left[s\left(-\frac{l_x}{2}, y\right) - v_0 \right]^2 + \left[s\left(\frac{l_x}{2}, y\right) - v_0 \right]^2 \right\} dy}{4 \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \left[s(x, y) - v_0 \right]^2 dx dy}, \quad (29)$$

$$\delta_y = \frac{T \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \left\{ \left[s\left(x, -\frac{l_y}{2}\right) - v_0 \right]^2 + \left[s\left(x, \frac{l_y}{2}\right) - v_0 \right]^2 \right\} dx}{4 \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \left[s(x, y) - v_0 \right]^2 dx dy}. \quad (30)$$

В случае, когда нормированная сигнальная функция в окрестности точки истинного значения вектора скорости допускает асимптотическое разложение вида (28), в [11] с использованием метода локально аддитивной аппроксимации [19] получены выражения для вероятностей ошибок ложной тревоги α_2 и пропуска движущегося с неизвестным вектором скорости объекта β_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & 1 - \exp\left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(m_y \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + \right.\right. \\ & \left.\left. + m_x(u\sqrt{2} - 1) \exp\left(\frac{-(u\sqrt{2} - 1)^2}{2}\right)\right)\right] - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_y \int_1^{u\sqrt{2}-1} (x^2 - 1) \exp\left\{-\frac{x^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[m_y x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \right.\right. \\ & \left.\left. + m_x(u\sqrt{2} - x) \exp\left(\frac{-(u\sqrt{2} - 1)^2}{2}\right)\right]\right\} dx \quad (31) \end{aligned}$$

при $u > \sqrt{2}$, и $\alpha_2 = 1$ при $u \leq \sqrt{2}$,

$$\beta_2 \approx (1 - \alpha_2) \int_{-\infty}^{\infty} F(u\sqrt{2} - x) w(x) dx, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} F(x) = & \Phi\left(x - z/\sqrt{2}\right) - \\ & - 2 \exp\left(3z^2/4 - xz/\sqrt{2}\right) \Phi\left(x - \sqrt{2}z\right) + \\ & + \exp\left(2z^2 - \sqrt{2}xz\right) \Phi\left(x - 3z/\sqrt{2}\right), \\ w(x) = & z\sqrt{2} \left[\exp\left(3z^2/4 - xz/\sqrt{2}\right) \Phi\left(x - \sqrt{2}z\right) - \right. \\ & \left. - \exp\left(2z^2 - \sqrt{2}xz\right) \Phi\left(x - 3z/\sqrt{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $m_x = \delta_x V_{x \max}$ и $m_y = \delta_y V_{y \max}$ — приведенные длины априорных интервалов W_x и W_y , определяющие число разрешимых значений по

компонентам вектора скорости V_x и V_y соответственно. Точность выражения (31) повышается с увеличением u , m_x и m_y , а точность выражения (32) — с увеличением z , u , m_x и m_y .

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ОБЪЕКТА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ

Сравним значения ОСШ на выходе приемника МП для неоднородного и однородного изображений, имеющих одинаковые форму и энергию

$$E_s = T \iint_{\Omega_s} s^2(x, y) dx dy = T s_0^2 G_s, \quad (33)$$

где s_0 — интенсивность однородного изображения с энергией E_s . Для однородного изображения объекта ОСШ определяется формулой $z_H^2 = 2G_s T (s_0 - v_0)^2 / N_0$. Учитывая (33), из (6) находим: $z^2 - z_H^2 = \frac{4T v_0}{N_0} \iint_{\Omega_s} [s_0 - s(x, y)] dx dy$. В

[12] показано, что последний интеграл неотрицателен. Следовательно, при одинаковых форме и энергии изображений однородного и неоднородного объектов, ОСШ для неоднородного объекта не меньше, чем для однородного при любом распределении интенсивности $s(x, y)$, удовлетворяющем условию (33), т. е. $z^2 \geq z_H^2$.

Влияние степени неоднородности изображения объекта на характеристики обнаружения рассмотрим на примере обнаружения объекта, имеющего форму прямоугольника. Положим, что прямоугольник имеет стороны длиной l_x и l_y , причем интенсивность изображения объекта линейно возрастает в направлении, составляющем угол θ со стороной длины l_x , вдоль которой движется объект. Таким образом, полагаем, что интенсивность изображения прямоугольного объекта описывается функцией [12]

$$s(x, y) = s_0 A \left[\frac{(q-1)(x \cos \theta + y \sin \theta)}{l_x \cos \theta + l_y \sin \theta} + \frac{q+1}{2} \right], \quad (34)$$

$$\text{где } A = \left[(q-1)^2 \frac{l_x^2 \cos^2 \theta + l_y^2 \sin^2 \theta}{12(l_x \cos \theta + l_y \sin \theta)^2} + \frac{(q+1)^2}{4} \right]^{-1/2},$$

$q = s_{\max} / s_{\min}$ — отношение максимального значения интенсивности изображения объекта $s_{\max} = \max s(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_s$ к минимальному значению $s_{\min} = \min s(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_s$, величина s_0 характеризует амплитуду интенсивности,

а множитель A обеспечивает неизменность энергии изображения объекта при различных значениях q и θ . При этом предполагается, что начало системы координат расположено в точке пересечения диагоналей изображения прямоугольного объекта при $t = 0$, а координатные оси параллельны сторонам прямоугольника. Нетрудно убедиться, что распределение интенсивности (34) удовлетворяет условию (33). Заметим, что для однородного объекта $q = 1$, так что $s(x, y)|_{q=1} = s_0$, то есть s_0 — интенсивность изображения однородного объекта такой же формы, с теми же площадью и энергией, что у неоднородного объекта.

Подставляя (34) в (6), находим выражение для ОСШ на выходе приемника максимального правдоподобия при наличии в реализации наблюдаемых данных изображения неоднородного прямоугольного объекта (34), однородного фона и гауссовского белого шума [12]

$$z^2 = \frac{z_H^2}{(z_F - 1)^2} [z_F^2 + 1 - z_F(q+1)A], \quad (35)$$

где

$$z_H^2 = z_s^2 (1 - 1/z_F)^2 \quad (36)$$

— ОСШ для однородного изображения прямоугольного объекта при наличии фона, $z_s^2 = 2l_x l_y T s_0^2 / N_0$ — ОСШ для однородного изображения прямоугольного объекта при отсутствии фона и наличии только гауссовского белого шума, $z_F^2 = s_0^2 / v_0^2$ — ОСФ, а $\psi = l_y / l_x$ — отношение сторон прямоугольника.

На рис. 3 показана зависимость величины $\zeta = z/z_H$ от величины наклона q при $\theta = 0$. Кривая 1 соответствует $z_F = 1.5$, кривая 2 — $z_F = 1.2$, кривая 3 — $z_F = 1.1$, кривая 4 — $z_F = 0.9$, кривая 5 — $z_F = 0.8$, кривая 6 — $z_F = 0.5$. Из сравнения кривых на рис. 3 следует, что неоднородность изображения объекта приводит к существенному увеличению выигрыша в величине ОСШ по сравнению с однородным изображением при близких к единице значениях ОСФ z_F , причем этот выигрыш уменьшается по мере отклонения z_F от единицы [12].

На рис. 4 показаны зависимости отношения χ вероятностей пропуска неоднородного и однородного прямоугольных объектов, движущихся с неизвестным вектором скорости, при порогах, определенных на основании критерия Неймана—Пирсона для одинаковых значений вероятностей ложных тревог 10^{-2} с использованием формулы (31) при отношении сторон

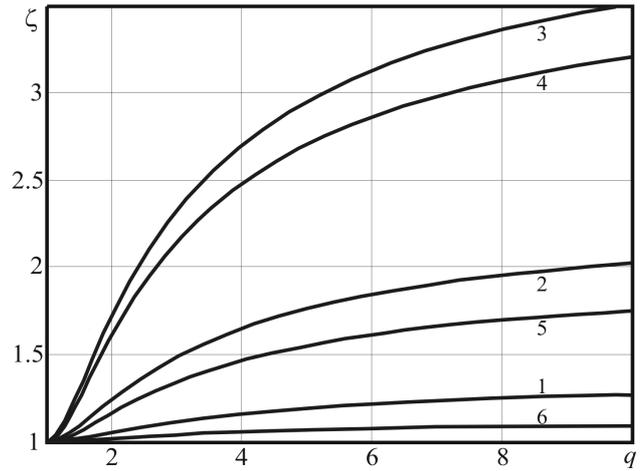


Рис. 3

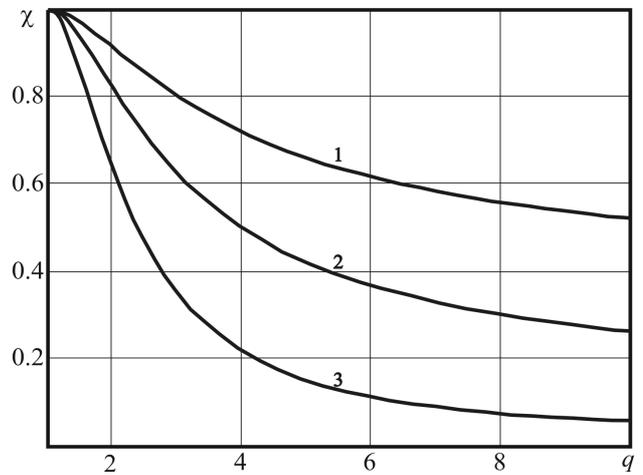


Рис. 4

$\psi = 2$, $\theta = \arctg \psi$, числе элементов разрешения по компонентам вектора скорости для однородного объекта (при $q = 1$) $m_{xH} = m_{yH} = 5$ и ОСФ $z_F = 2$. При этом число элементов разрешения по неизвестным компонентам вектора скорости для неоднородного объекта рассчитывались как $m_x = m_{xH} \delta_x / \delta_x^{(H)}$, $m_y = m_{yH} \delta_y / \delta_y^{(H)}$, где $\delta_x^{(H)}$ и $\delta_y^{(H)}$ определяются формулами (29) и (30) соответственно при $s(x, y) = s_0$, а δ_x и δ_y — этими же формулами при распределении интенсивности изображения объекта (34). Кривая 1 соответствует значению ОСШ для однородного изображения прямоугольного объекта в отсутствии фона $z_s = 10$, кривая 2 — $z_s = 12$, кривая 3 — $z_s = 15$. Аналогичные зависимости имеют место в случаях, когда неизвестна только величина скорости или только направление движения объекта [12].

Из сравнения кривых на рис. 4 следует, что при не слишком малых значениях ОСШ z_s для однородного изображения прямоугольного

объекта при отсутствии фона, когда вероятность пропуска не превышает 0.4, вероятность пропуска неоднородного объекта всегда меньше, чем однородного, т. е. $\beta < \beta_H$. Это объясняется тем, что при одинаковых энергиях изображений однородного и неоднородного объектов, неоднородный объект в большей степени отличается по текстуре от однородного фона [12].

ВЛИЯНИЕ АПРИОРНОГО НЕЗНАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ

Влияние априорного незнания параметров движения объекта на характеристики обнаружения рассмотрим на примере однородного изображения квадратного объекта со сторонами длины l [11], ориентированными вдоль координатных осей. Будем полагать, что $V_{x\max} = V_{y\max}$, так что число элементов разрешения по каждой компоненте вектора скорости одинаково и равно $m_x = m_y = TV_{x\max}/2l$.

Если направление движения объекта известно и составляет угол φ с осью X , то число разрешимых значений скорости [11]

$$m_1 = m_x (1 + \operatorname{tg} \varphi)/2 \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \pi/4, \tag{37}$$

$$m_1 = m_x (1 + \operatorname{ctg} \varphi)/2 \text{ при } \pi/4 < \varphi \leq \pi/2.$$

В случае, когда величина скорости движения объекта V_0 задана, а направление движения неизвестно, число разрешимых значений угла φ равно $m_\Sigma = 4TV_0/l$. В частном случае, когда скорость движения объекта принимает максимально возможное значение $V_0 = V_{x\max}/\sqrt{2}$, имеем: $m_\Sigma = 4\sqrt{2}m_x$.

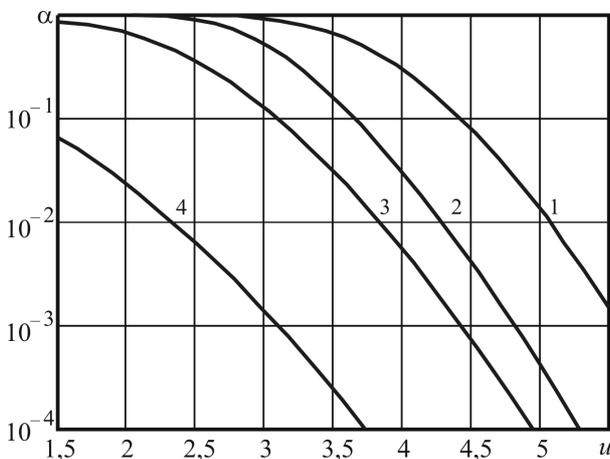


Рис. 5

Положим теперь, что скорость движения объекта априори известна. В этом случае вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска объекта определяются формулами [9, 10]

$$\alpha_0 = 1 - \Phi(u), \tag{38}$$

$$\beta_0 = \Phi(u - z). \tag{39}$$

На рис. 5 показаны зависимости вероятности ложной тревоги от нормированного порога u при $m_x = m_y = 10$. Кривая 1 соответствует случаю, когда неизвестны величина скорости и направление движения изображения объекта, и рассчитывалась по формуле (31). Кривая 2 соответствует случаю, когда величина скорости известна и равна $V_0 = V_{x\max}/\sqrt{2}$, а направление движения априори неизвестно, и рассчитывалась по формуле (23) при $m_\Sigma = 4\sqrt{2}m_x$. Кривая 3 соответствует случаю, когда величина скорости неизвестна, а направление движения известно и составляет угол $\varphi = \pi/4$ со стороной длины l_x , и рассчитывалась по формуле (15) при $m_v = m_1$ (37). Кривая 4 соответствует случаю, когда величина скорости и направление движения априори известны, и рассчитывалась по формуле (38).

На рис. 6 показаны зависимости вероятности пропуска изображения объекта от ОСШ z_H (36). Порог выбирался по заданной вероятности ложной тревоги на основании критерия Неймана—Пирсона при вероятности ложной тревоги 10^{-2} с использованием формул (15), (23), (31), и (38). Кривая 1 соответствует случаю, когда неизвестны величина скорости и направление движения изображения объекта, и рассчитывалась по формуле (32).

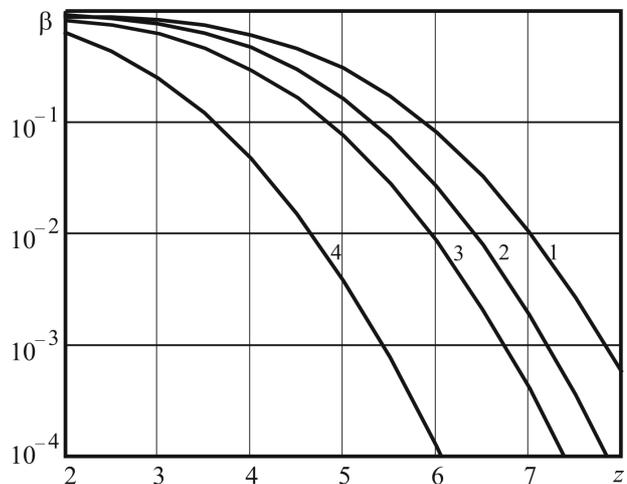


Рис. 6

Кривая 2 соответствует случаю, когда величина скорости известна и равна $V_0 = V_{x\max}/\sqrt{2}$, а направление движения априори неизвестно, и рассчитывалась по формуле (26) при $m_\Sigma = 4\sqrt{2}m_x$. Кривая 3 соответствует случаю, когда величина скорости неизвестна, а объект движется вдоль одной из диагоналей, и рассчитывалась по формуле (16) при $m_V = m_1$ (37). Кривая 4 соответствует случаю, когда величина скорости и направление движения априори известны, и рассчитывалась по формуле (39).

Согласно рис. 5, 6, априорное незнание направления движения объекта может привести к существенному проигрышу в эффективности обнаружения его изображения. При этом потери в эффективности обнаружения возрастают с увеличением числа элементов разрешения по скорости в априорной области возможных значений неизвестных параметров движения и с увеличением ОСШ [11, 12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, априорное незнание параметров движения объекта может привести к существенному проигрышу в эффективности его обнаружения, который возрастает с увеличением отношения сигнал/шум и с увеличением числа элементов разрешения в априорной области возможных значений неизвестных параметров движения. Неравномерность распределения интенсивности изображения движущегося объекта приводит к выигрышу в эффективности обнаружения, так что вероятность пропуска изображения объекта с неравномерным распределением интенсивности всегда меньше, чем с равномерным распределением при заданной вероятности ложной тревоги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Странгуль О. Н. Корреляционно-экстремальные системы навигации и локации подвижных объектов / О. Н. Странгуль, В. П. Тарасенко // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 7. — С. 201—210.
2. Инсаров В. В. Структурно-лингвистический алгоритм обработки изображений и распознавания образов наземных сцен в системе наведения летательного аппарата / В. В. Инсаров // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 1. — С. 145—154.
3. Виленчик Л. С. Минимаксный метод оценки параметров изображения / Л. С. Виленчик, М. Ф. Ма-

левинский, А. Н. Катулев // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 2. — С. 120—123.

4. Попова Г. М. Анализ и обработка изображений медико-биологических микрообъектов / Г. М. Попова, В. Н. Степанов // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 1. — С. 131—142.

5. Трифонов А. П. Обнаружение случайных изображений пространственно-протяженных объектов, затеняющих фон / А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков // Автотметрия. — 2000. — Т. 36, № 4. — С. 14—25.

6. Бычков А. А. Обнаружение изображений пространственно-протяженных затеняющих фон объектов / А. А. Бычков, В. А. Понькин // Автотметрия. — 1992. — Т. 28, № 4. — С. 33—40.

7. Субоптимальная процедура обнаружения смещающихся образов на сложных сценах / В. М. Лисицын [и др.] // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1994. — № 1. — С. 100—109.

8. Потенциальные возможности обнаружения и маскирования движущихся объектов на неравномерных фонах / В. В. Ефремов [и др.] // Информационно-измерительные и управляющие системы. — 2003. — № 4. — С. 24—29.

9. Трифонов А. П. Обнаружение движущегося пространственно-протяженного объекта на фоне с неизвестной интенсивностью / А. П. Трифонов, Р. В. Куцов // Автотметрия. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 3—18.

10. Куцов Р. В. Алгоритмы обнаружения движущегося объекта на изображении / Р. В. Куцов, А. П. Трифонов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 3. — С. 129—138.

11. Трифонов А. П. Эффективность обнаружения изображения объекта, движущегося с неизвестным вектором скорости / А. П. Трифонов, Р. В. Куцов // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. — 2007. — Т. 50, № 11. — С. 3—14.

12. Куцов Р. В. Обнаружение и оценка скорости движения неоднородного пространственно-протяженного объекта по изображению / Р. В. Куцов, А. П. Трифонов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 2. — С. 115—125.

13. Теория обнаружения сигналов / под ред. П. А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.

14. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М.: Сов. радио, 1966. — 680 с.

15. Трифонов А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 268 с.

16. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.

17. Ильин В. А. Основы математического анализа. Часть II / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М.: Наука, 1980. — 447 с.

18. *Трифонов А. П.* Оценка местоположения точечной цели в зоне Френеля приемной антенны / *А. П. Трифонов, С. И. Шарпов* // Радиотехника и электроника. — 1984. — Т. 29, № 2. — С. 242—249.

19. *Трифонов А. П.* Эффективность обнаружения разрывного случайного радиоимпульса с неизвестными временем прихода и центральной частотой / *А. П. Трифонов, А. В. Захаров* // Радиотехника и электроника. — 2000. — № 11. — С. 1329—1337.