УДК 517.2

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА p-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ $p = p_1(x)p_2(y)$

В. А. Толпаев, А. В. Колесников

Северо-Кавказский государственный технический университет

Для p-аналитических функций Г. Н. Положего с характеристиками $p(x,y)$ в виде произведения $p = p_1(x) \cdot p_2(y)$ указываются их новые представления через потенциал $w(x,y)$, удовлетворяющий специальному эллиптическому уравнению с переменными коэффициентами, выражаемыми через $p_1(x)$ и $p_2(y)$.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: комплексные переменные, обобщенные аналитические функции, потенциал, эллиптическая система уравнений, гармонические функции, метагармонические функции.

Введение. В декартовой системе координат x, y рассматривается эллиптическая система уравнений Г. Н. Положего [1] для p-аналитических функций $f_p(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристиками $p(x,y)$ в виде произведения $p = p_1(x) \cdot p_2(y)$:

$$\begin{cases} p_1(x) \cdot p_2(y) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ p_1(x) \cdot p_2(y) \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \qquad (1)$$

Эта система уравнений играет важную роль во многих прикладных задачах, в частности, она описывает плоскопараллельную фильтрацию несжимаемой жидкости в непрерывно неоднородной пористой среде с проницаемостью $K = k_0 \cdot p(x,y)$, где k_0 — постоянная с размерностью проницаемости, а $p(x,y)$ — заданная безразмерная непрерывная положительная функция. В последнем случае функции φ и ψ являются потенциалом и функцией тока плоскопараллельного фильтрационного течения [1, 2], причем потенциал φ связан с приведенным давлением P формулой $\varphi = -\dfrac{k_0 \cdot P}{\mu}$, в которой μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Теоретическая часть. Систему уравнений (1) можно привести к эллиптической системе уравнений Т. Карлемана [3], а затем, по методу И. Н. Векуа [4], представить общее решение последней через решения $w(x,y)$ специального уравнения второго порядка, называемого в [4] уравнением для потенциала. **Цель** данной статьи — указать такое представление для общего решения системы уравнений (1) и построить уравнение для потенциала.

Сформулированная задача для системы (1) в статье решается двумя способами, причем потенциал $w(x,y)$ определяется без промежуточного перехода к системе Т. Карлемана.

1-й способ. Ищем общее решение эллиптической системы уравнений (1) в виде

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{p_1(x)}\frac{\partial w}{\partial x}; \; \psi(x,y) = -p_2(y)\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (2)$$

где $w(x,y)$ – некоторая пока неопределенная дважды дифференцируемая функция. Поскольку из (2) следует, что $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{1}{p_1(x)}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ и $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -p_2(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, то второе уравнение системы (1) для функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ обращается в тождество $p_1(x) \cdot p_2(y)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = p_2(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ при любой дважды дифференцируемой функции $w(x,y)$. Если же формулы (2) подставить в первое уравнение системы (1), то относительно $w(x,y)$ получаем уравнение

$$p_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{p_1(x)}\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{1}{p_2(y)}\frac{\partial}{\partial y}\left[p_2(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0\,. \qquad (3)$$

Функцию $w(x,y)$, следуя терминологии И. Н. Векуа, будем называть потенциалом системы Г. Н. Положего (1), а уравнение (3) — уравнением для потенциала.

Для решения краевых задач для системы (1) путем их редукции к краевым задачам для потенциала $w(x,y)$ уравнение (3) выгодно преобразовать, вводя в рассмотрение новую вспомогательную функцию, приведенный потенциал $W(x,y)$, по формуле

$$w(x,y)=\sqrt{\frac{p_1(x)}{p_2(y)}}\cdot W(x,y). \qquad (4)$$

После подстановки (4) в (3) для приведенного потенциала системы (1) получаем уравнение

$$\Delta W(x,y)-\left[M(x)+N(y)\right]\cdot W(x,y)=0, \qquad (5)$$

в котором $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, а коэффициенты $M(x)$ и $N(y)$ вычисляются через функции $p_1(x)$ и $p_2(y)$ по формулам

$$M(x)=\sqrt{p_1(x)}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{p_1(x)}}\right), \qquad (6а)$$

$$N(y)=\frac{1}{\sqrt{p_2(y)}}\cdot\frac{d^2}{dy^2}\left(\sqrt{p_2(y)}\right). \qquad (6б)$$

2-й способ. Если общее решение эллиптической системы уравнений (1) искать в виде

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{p_2(y)}\frac{\partial w}{\partial y};\ \psi(x,y)=p_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (7)$$

то первое уравнение системы (1) для $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, представленных в виде (7), обращается в тождество при любой дважды дифференцируемой функции $w(x,y)$. Если же формулы (7) подставить во второе уравнение системы (1), то относительно потенциала $w(x,y)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{p_1(x)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[p_1(x)\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right]+p_2(y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{p_2(y)}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right]=0. \qquad (8)$$

Если по аналогии с первым способом ввести приведенный потенциал $W(x,y)$ по формуле

$$w(x,y)=\sqrt{\frac{p_2(y)}{p_1(x)}}\cdot W(x,y), \qquad (9)$$

то из уравнения (8) для $W(x,y)$ снова получим уравнение (5). Однако коэффициенты $M(x)$ и $N(y)$ при втором способе введения потенциала $w(x,y)$ вычисляются иначе, а именно:

$$M(x)=\frac{1}{\sqrt{p_1(x)}}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{p_1(x)}\right), \qquad (10а)$$

$$N(y)=\sqrt{p_2(y)}\cdot\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{1}{\sqrt{p_2(y)}}\right). \qquad (10б)$$

Практические приложения. В качестве важных конкретных практических приложений формул представления (2), (4) и (7), (9) общего решения системы (1) через решения $W(x,y)$ уравнения (5) укажем те частные случаи, когда p-аналитические функции можно строить при помощи гармонических либо метагармонических функций.

1-й случай. Рассмотрим возможность применения в качестве приведенного потенциала $W(x,y)$ гармонических функций. Для этого, очевидно, в уравнении (5) коэффициенты $M(x)$ и $N(y)$ должны быть постоянными, а их сумма должна быть равной нулю. В результате получаем шесть представленных в таблице вариантов 1–6, когда p-аналитические функции можно строить при помощи гармонических функций $W(x,y)$.

2-й случай. Теперь рассмотрим возможность применения в качестве приведенного потенциала $W(x,y)$ метагармонических функций, определяемых решениями уравнения Гельмгольца с отрицательным коэффициентом

$$\Delta W(x,y)-a^2\cdot W(x,y)=0, \qquad (11)$$

в котором a^2 — произвольная положительная постоянная. Для этого, очевидно, в уравнении (5) сумма постоянных коэффициентов $M(x)$ и $N(y)$ должна быть равной a^2. В результате получаем десять представленных в таблице вариантов 7—16, когда p-аналитические функции можно строить при помощи решений метагармонического уравнения (11).

3-й случай. Еще одна возможность использования метагармонических функций в качестве приведенного потенциала $W(x,y)$ связана с применением в решениях уравнения Гельмгольца с положительным коэффициентом

$$\Delta W(x,y)+a^2\cdot W(x,y)=0. \qquad (12)$$

Для этого, очевидно, в уравнении (5) сумма постоянных коэффициентов $M(x)$ и $N(y)$ должна быть отрицательной, равной $-a^2$. В результате получаем еще десять представленных в таблице вариантов 17—26, когда p-аналитические функции можно строить при помощи решений метагармонического уравнения (12).

Все представленные в таблице 26 вариантов позволяют от решений краевых задач для системы уравнений Г. Н. Положего (1) с переменными коэффициентами перейти к решениям $W(x,y)$ краевых задач для уравнений Лапласа либо Гельмгольца с постоянными

Таблица

Перечень вариантов, когда приведенный потенциал $W(x,y)$ для p-аналитических функций выражается через гармонические либо метагармонические функции

№ п/п	$M(x)$	$N(y)$	$\sqrt{p_1(x)}$	$\sqrt{p_2(y)}$
1	2	3	4	5
I	$W(x,y)$ — гармоническая функция, $\Delta W(x,y) = 0$. Функция $f_p(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ определяется по формулам (13) (A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные; $A_1^2 + A_2^2 \neq 0,\ B_1^2 + B_2^2 \neq 0$)			
1	0	0	$\dfrac{1}{A_1x + A_2}$	$B_1y + B_2$
2	a^2	$-a^2$	$\dfrac{1}{A_1 \operatorname{ch}(ax) + A_2 \operatorname{sh}(ax)}$	$B_1 \cos(ay) + B_2 \sin(ay)$
3	$-a^2$	a^2	$\dfrac{1}{A_1 \cos(ax) + A_2 \sin(ax)}$	$B_1 \operatorname{ch}(ay) + B_2 \operatorname{sh}(ay)$
II	$W(x,y)$ – гармоническая функция, $\Delta W(x,y) = 0$. Функция $f_p(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ определяется по формулам (14). (A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные; $A_1^2 + A_2^2 \neq 0,\ B_1^2 + B_2^2 \neq 0$).			
4	0	0	$A_1x + A_2$	$\dfrac{1}{B_1y + B_2}$
5	a^2	$-a^2$	$A_1 \operatorname{ch}(ax) + A_2 \operatorname{sh}(ax)$	$\dfrac{1}{B_1 \cos(ay) + B_2 \sin(ay)}$
6	$-a^2$	a^2	$A_1 \cos(ax) + A_2 \sin(ax)$	$\dfrac{1}{B_1 \operatorname{ch}(ay) + B_2 \operatorname{sh}(ay)}$
III	$W(x,y)$ — метагармоническая функция, $\Delta W(x,y) - a^2 \cdot W(x,y) = 0$. Функция $f_p(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ определяется по формулам (13) (A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные; $A_1^2 + A_2^2 \neq 0,\ B_1^2 + B_2^2 \neq 0$)			
7	$A^2 + b^2$	$-b^2$	$\dfrac{1}{A_1 \operatorname{ch}\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right] + A_2 \operatorname{sh}\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right]}$	$B_1 \cos(by) + B_2 \sin(by)$
8	b^2	$a^2 - b^2 > 0$	$\dfrac{1}{A_1 \operatorname{ch}(bx) + A_2 \operatorname{sh}(bx)}$	$B_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{a^2-b^2} \cdot y\right) + B_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{a^2-b^2} \cdot y\right)$
9	b^2	$a^2 - b^2 < 0$	$\dfrac{1}{A_1 \operatorname{ch}(bx) + A_2 \operatorname{sh}(bx)}$	$B_1 \cos\left(\sqrt{b^2-a^2} \cdot y\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{b^2-a^2} \cdot y\right)$
10	a^2	0	$\dfrac{1}{A_1 \operatorname{ch}(ax) + A_2 \operatorname{sh}(ax)}$	$B_1y + B_2$
11	0	a^2	$\dfrac{1}{A_1x + A_2}$	$B_1 \operatorname{ch}(ay) + B_2 \operatorname{sh}(ay)$
IV	$W(x,y)$ — метагармоническая функция, $\Delta W(x,y) - a^2 \cdot W(x,y) = 0$. Функция $f_p(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ определяется по формулам (14) (A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные; $A_1^2 + A_2^2 \neq 0,\ B_1^2 + B_2^2 \neq 0$)			
12	$A^2 + b^2$	$-b^2$	$A_1 \operatorname{ch}\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right] + A_2 \operatorname{sh}\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right]$	$\dfrac{1}{B_1 \cos(by) + B_2 \sin(by)}$
13	b^2	$a^2 - b^2 > 0$	$A_1 \operatorname{ch}(bx) + A_2 \operatorname{sh}(bx)$	$\dfrac{1}{B_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{a^2-b^2} \cdot y\right) + B_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{a^2-b^2} \cdot y\right)}$
14	$a^2 - b^2 < 0$	b^2	$A_1 \cos\left[\sqrt{b^2-a^2} \cdot x\right] + A_2 \sin\left[\sqrt{b^2-a^2} \cdot x\right]$	$\dfrac{1}{B_1 \operatorname{ch}(by) + B_2 \operatorname{sh}(by)}$
15	a^2	0	$A_1 \operatorname{ch}(ax) + A_2 \operatorname{sh}(ax)$	$\dfrac{1}{B_1y + B_2}$

Окончание табл.

1	2	3	4	5
16	0	a^2	$A_1x + A_2$	$\dfrac{1}{B_1 \operatorname{ch}(ay) + B_2 \operatorname{sh}(ay)}$
V	$W(x,y)$ — метагармоническая функция, $\Delta W(x,y) + a^2 \cdot W(x,y) = 0$. Функция $f_p(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ определяется по формулам (13) (A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные; $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$, $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$)			
17	b^2	$-a^2 - b^2$	$\dfrac{1}{A_1 \operatorname{ch}(bx) + A_2 \operatorname{sh}(bx)}$	$B_1 \cos\left(\sqrt{a^2+b^2} \cdot y\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{a^2+b^2} \cdot y\right)$
18	$-a^2 - b^2$	b^2	$\dfrac{1}{A_1 \cos\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right] + A_2 \sin\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right]}$	$B_1 \operatorname{ch}(by) + B_2 \operatorname{sh}(by)$
19	$-b^2$	$-a^2 + b^2 < 0$	$\dfrac{1}{A_1 \cos(bx) + A_2 \sin(bx)}$	$B_1 \cos\left(\sqrt{a^2-b^2} \cdot y\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{a^2-b^2} \cdot y\right)$
20	$-a^2$	0	$\dfrac{1}{A_1 \cos(ax) + A_2 \sin(ax)}$	$B_1y + B_2$
21	0	$-a^2$	$\dfrac{1}{A_1x + A_2}$	$B_1 \cos(ay) + B_2 \sin(ay)$
VI	$W(x,y)$ — метагармоническая функция, $\Delta W(x,y) + a^2 \cdot W(x,y) = 0$. Функция $f_p(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ определяется по формулам (14) (A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные; $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$, $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$)			
22	$-a^2 + b^2 > 0$	$-b^2$	$A_1 \operatorname{ch}\left[\sqrt{b^2-a^2} \cdot x\right] + A_2 \operatorname{sh}\left[\sqrt{b^2-a^2} \cdot x\right]$	$\dfrac{1}{B_1 \cos(by) + B_2 \sin(by)}$
23	$-a^2 + b^2 < 0$	$-b^2$	$A_1 \cos\left[\sqrt{a^2-b^2} \cdot x\right] + A_2 \sin\left[\sqrt{a^2-b^2} \cdot x\right]$	$\dfrac{1}{B_1 \cos(by) + B_2 \sin(by)}$
24	$-a^2 - b^2$	b^2	$A_1 \cos\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right] + A_2 \sin\left[\sqrt{a^2+b^2} \cdot x\right]$	$\dfrac{1}{B_1 \operatorname{ch}(by) + B_2 \operatorname{sh}(by)}$
25	$-a^2$	0	$A_1 \cos(ax) + A_2 \sin(ax)$	$\dfrac{1}{B_1y + B_2}$
26	0	$-a^2$	$A_1x + A_2$	$\dfrac{1}{B_1 \cos(ay) + B_2 \sin(ay)}$

коэффициентами. Переход к краевым задачам для приведенного потенциала $W(x,y)$ в I, III и V случаях (по таблице) осуществляется по формулам (2), которые после подстановки в них (4) принимают вид

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{p_1(x)\,p_2(y)}} \times \\ \times\left[\dfrac{dg_1(x)}{dx} \cdot W(x,y) + \dfrac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right], \\ \psi(x,y) = \sqrt{p_1(x)\,p_2(y)} \times \\ \times\left[\dfrac{dg_2(y)}{dy} \cdot W(x,y) - \dfrac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right]. \end{cases} \quad (13)$$

где $g_1(x) = \ell n\left(\sqrt{p_1(x)}\right)$ и $g_2(y) = \ell n\left(\sqrt{p_2(y)}\right)$. В случаях II, IV и VI (по таблице) переход от системы (1) к уравнениям Лапласа либо Гельмгольца осуществляется по формулам (7), которые после подстановки (9) запишутся в виде

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{p_1(x)\,p_2(y)}} \times \\ \times\left[\dfrac{dg_2(y)}{dy} \cdot W(x,y) + \dfrac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right], \\ \psi(x,y) = -\sqrt{p_1(x)\,p_2(y)} \times \\ \times\left[\dfrac{dg_1(x)}{dx} \cdot W(x,y) - \dfrac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right]. \end{cases} \quad (14)$$

Метод решения краевых задач для уравнений с переменными коэффициентами, основанный на формулах перехода к краевым задачам для однотипных уравнений с постоянными коэффициентами, на практике применялся многими авторами. Например, Г. Н. Положий в [1] приводит формулы представления некоторых p-аналитических функций через аналитические функции и их производные до n-го порядка. О. В. Голубева в [2] приводит формулы перехода от решений краевых плоскопараллельных задач фильтрации в сериях неоднородных сред $K = 0$ и $K = \text{const} \neq 0$ (по терминологии [2]) к решениям в случае $K = 0$ в изотропных однородных средах и в случае $K = \text{const} \neq 0$ — в неоднородных средах с экспоненциальным изменением проницаемости. Некоторые из формул перехода Г. Н. Положего из приведенных в таблице вариантов 1—6 вытекают как частные случаи, когда одна из функций $p_1(x)$ либо $p_2(y)$ оказывается постоянной (что достигается за счет специального подбора произвольных постоянных A_1, A_2, B_1, B_2). Из всех приведенных в таблице вариантов, когда одна из функций $p_1(x)$ либо $p_2(y)$ оказывается постоянной, вытекают и некоторые из формул перехода, указанных в [2]. Однако в случаях, когда одновременно обе функции $p_1(x)$ и $p_2(y)$ переменные, формулы перехода для всех 26 вариантов таблицы оказываются принципиально новыми, ранее не встречавшимися авторам в известной им литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций / Г. Н. Положий. — Киев : Наукова думка, 1973. — 423 с.

2. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред / О. В. Голубева. — М. : Высшая школа, 1972. — 368 с.

3. *Толпаев В. А.* Связь уравнений плоскопараллельной фильтрации с системой Карлемана / В. А. Толпаев, А. В. Колесников // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — 2007. — № 1, — С. 78—80.

4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Физматгиз, 1959. — 628 с.