УДК 517.988.8

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ С МОДИФИЦИРОВАННОЙ СХЕМОЙ КРАНКА—НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ*

Е. В. Шепилова

Воронежский государственный университет

Линейная нестационарная задача типа Шредингера в сепарабельном гильбертовом пространстве решается приближенно проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галеркина с ориентацией на конечномерные подпространства типа конечных элементов, а по времени используется модифицированная схема Кранка—Николсон. Установлены оценки погрешности приближенных решений, которые позволяют получать не только сходимость приближенных решений к точному, но и дают числовые характеристики скорости сходимости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнение типа Шредингера, проекционно-разностный метод, схема Кранка—Николсон.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$, где $T < \infty$, на $u, v \in V$ определено семейство симметричных полуторалинейных форм $a(t,u,v)$. Предположим, что для всех $u, v \in V$ функция $t \to a(t,u,v)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и для $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(t,u,v)| \le M_1 \|u\|_V \|v\|_V, \; a(t,u,u) \ge \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Кроме того, почти всюду на $[0,T]$

$$|\partial a(t,u,v)/\partial t| \le M_2 \|u\|_V \|v\|_V. \quad (2)$$

Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t): V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = (A(t)u, v)$ и $\|A(t)\|_{V\to V'} \le M_1$. Здесь под выражением (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Заметим, если $z \in H$, то выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением в H.

Для заданной со значениями в V' функции $f(t)$ и элемента u^0 рассмотрим вариационную задачу: найти функцию $u(t)$ со значениями в V такую, что почти всюду на $[0,T]$ для всех $v \in V$ выполнено

$$(u'(t), v) + ia(t, u(t), v) = (f(t), v), \; u(0) = u^0 \in V. \quad (3)$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

Очевидно, что задача (3) равносильна задаче Коши в пространстве V':

$$u'(t) + iA(t)u(t) = f(t), \; u(0) = u^0 \in V. \quad (4)$$

Вопрос о существовании и единственности решения задачи (4), при различных предположениях на u^0 и f, рассматривался в [1] и [2]. Так, в [1] приводится следующее утверждение о слабой разрешимости задачи (4).

Теорема 1. *Пусть для задачи (4) выполнены условия, перечисленные выше. Дополнительно предположим, что $f \in L_2(0,T;H)$ и существует $f' \in L_2(0,T;V')$. Тогда задача (4) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, уравнение удовлетворяется почти всюду на $[0,T]$ и выполняется начальное условие.*

В [2] найдены условия более гладкой разрешимости задачи (4).

Определим приближенную задачу. Пусть V_h — конечномерное подпространство пространства V, где параметр $h > 0$. Пусть P_h — ортогональный проектор в пространстве H на V_h. Определим пространство V'_h, задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму

$$\|u_h\|_{V'_h} = \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|_V = 1} |(u_h, v_h)|.$$

Оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V'_h$ [3], для которого справедливы следующие оценка и соотношение:

* Работа выполнена при содействии РФФИ, проект № 07-01-00131.

$$\|\overline{P}_h u\|_{V'_h} \le \|u\|_{V'} \text{ для } u \in V', \qquad (5)$$

$$(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)\ (u \in V', v \in H). \qquad (6)$$

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ разбиение отрезка $[0,T]$. Задаче (4) сопоставим разностную задачу в V_h

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau_k} + i\overline{P}_h \frac{A(t_k)u_k^h + A(t_{k-1})u_{k-1}^h}{2} =$$

$$= \overline{P}_h \frac{f(t_k) + f(t_{k-1})}{2}, \qquad (7)$$

где элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1,N}$. Заметим, что в (7) применяется модифицированная схема Кранка—Николсон. Впервые такая модификация была использована в [4].

Докажем однозначную разрешимость задачи (7), то есть обратимость в V_h оператора $I + i\tau_k(2)^{-1}\overline{P}_h A(t_k)$. Действительно, пусть $v_h \in V_h$ такой, что

$$(I + i\,\tau_k(2)^{-1}\,\overline{P}_h A(t_k))v_h = 0.$$

Отсюда получим

$$(v_h + i\tau_k(2)^{-1}\overline{P}_h A(t_k)v_h, v_h) =$$

$$= \|v_h\|_H^2 + i\tau_k(2)^{-1}a(t_k, v_h, v_h) = 0.$$

Таким образом, $v_h = 0$ и задача (7) однозначно разрешима.

Далее определим для $t \in [0,T]$ гильбертовы пространства $V(t) = \{u, v \in V \mid (u,v)_{V(t)} = a(t,u,v)\}$. Рассмотрим $Q_h(t)$ — ортогональный проектор в пространстве $V(t)$ на V_h. Заметим, что для $u \in V$ и $v_h \in V_h$ выполнено $a(t,u,v_h) = a(t, Q_h(t)u, v_h)$. Тогда для любого $u \in V$

$$\overline{P}_h A(t)u = \overline{P}_h A(t)Q_h(t)u. \qquad (8)$$

В [5] показано, что оператор $Q_h(t)$ имеет по $t \in [0,T]$ сильную производную $Q'_h(t)$ и для любого $u \in V$ справедливы оценки

$$\|[I - Q_h(t)]u\|_V \le r_1 \|(I - Q_h)u\|_V, \qquad (9)$$

$$\|Q'_h(t)u\|_V \le r_2 \|(I - Q_h)u\|_V, \qquad (10)$$

где Q_h — ортогональный проектор в пространстве V на V_h, а r_1 и r_2 не зависят от $t \in [0,T]$, $u \in V$ и h.

Оценки погрешности в норме $C([0,T],V)$.

Лемма 1. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (4) такое, что существует $u'' \in L_1(0,T;V)$. Пусть $\{V_h\}$ — последовательность конечномерных подпространств такая, что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Пусть u_k^h — решение приближенной задачи (7), где $u_0^h = P_h u^0$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности*

$$\max_{1\le k\le N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \le$$

$$\le c_1 \sum_{k=1}^N (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_V^2 +$$

$$+ c_2 \int_0^T \|(I - Q_h)u'(t)\|_V^2\, dt + c_3 \int_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\, dt. \qquad (11)$$

Доказательство. К уравнению (4) применим оператор $\overline{P}_h$ и полученное равенство преобразуем к следующему виду:

$$i\,\overline{P}_h A(t_k) w_h(t_k) = \overline{P}_h f(t_k) - \overline{P}_h u'(t_k), \qquad (12)$$

где $w_h(t) = Q_h(t)u(t), k = \overline{1,N}$. Обратим внимание, что последнее равенство имеет смысл, так как из предположений леммы 1 следует $u \in C([0,T],V)$ и $u' \in C([0,T],V)$.

Из (12) и уравнения (7) следует тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau_k} + i\overline{P}_h \frac{A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h}{2} =$$

$$= \frac{w_h(t_k) - w_h(t_{k-1})}{\tau_k} - \overline{P}_h \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \qquad (13)$$

для $z_k^h = w_h(t_k) - u_k^h$ ($k = \overline{1,N}$). Умножим (13) скалярно в H на $z_k^h - z_{k-1}^h$ и возьмем удвоенную мнимую часть. Учитывая, что $\mathrm{Im}\ ia = \mathrm{Re}\, a$, где $a \in \mathbb{C}$, получим

$$\mathrm{Re}(A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h) =$$

$$= 2\mathrm{Im}\left(\frac{w_h(t_k) - w_h(t_{k-1})}{\tau_k} - \right.$$

$$\left. - \overline{P}_h \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}, z_k^h - z_{k-1}^h \right). \qquad (14)$$

Введем обозначение

$$F_k^h = \frac{w_h(t_k) - w_h(t_{k-1})}{\tau_k} - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}$$

и запишем (14) в виде

$$\mathrm{Re}(A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h) =$$

$$= 2\mathrm{Im}(F_k^h, z_k^h - z_{k-1}^h). \qquad (15)$$

Преобразуем левую часть (15).

$$\mathrm{Re}(A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h) =$$

$$= \mathrm{Re}(\{a(t_k, z_k^h, z_k^h) - a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h)\} +$$

$$+ i2\mathrm{Im}\, a(t_k, z_{k-1}^h, z_k^h) +$$

$$+ \{-a(t_k, z_{k-1}^h, z_k^h) + a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_k^h)\}) =$$

$$= \{a(t_k, z_k^h, z_k^h) - a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h)\} +$$

$$+ \mathrm{Re}\{-a(t_k, z_{k-1}^h, z_k^h) + a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_k^h)\}. \qquad (16)$$

Таким образом, из (16) и (15) следует тождество

$$a(t_k, z_k^h, z_k^h) - a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h) =$$
$$= \mathrm{Re}(a(t_k, z_{k-1}^h, z_k^h) - a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_k^h)) +$$
$$+ 2\mathrm{Im}(F_k^h, z_k^h - z_{k-1}^h) = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2. \qquad (17)$$

Учитывая (2), оценим первое слагаемое в правой части (17).

$$\mathrm{I}_1 \le \left| a(t_k, z_{k-1}^h, z_k^h) - a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_k^h) \right| \le$$
$$\le \tau_k M_2 \left\| z_k^h \right\|_V \left\| z_{k-1}^h \right\|_V \le$$
$$\le \tau_k M_2 2^{-1} \left\| z_k^h \right\|_V^2 + \tau_k M_2 2^{-1} \left\| z_{k-1}^h \right\|_V^2. \qquad (18)$$

Учитывая (5), оценим второе слагаемое в правой части (17).

$$\mathrm{I}_2 \le 2\left|(F_k^h, z_k^h - z_{k-1}^h)\right| \le 2\tau_k \left\| F_k^h \right\|_V \left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau_k} \right\|_{V'_h} \le$$
$$\le \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 + \tau_k \left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau_k} \right\|_{V'_h}^2 \le$$
$$\le \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 + \tau_k \left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau_k} \right\|_{V'}^2. \qquad (19)$$

Из уравнения (13) следует, что

$$\left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau_k} \right\|_{V'} \le$$
$$\le \left\| i\overline{P}_h \frac{A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h}{2} \right\|_{V'} + \left\| \overline{P}_h F_k^h \right\|_{V'}.$$

Учитывая оценку (1), непрерывность вложений $V \subset H \subset V'$ и равномерную ограниченность $\|P_h\|_{V \to V}$ по h, из последнего неравенства получим оценку

$$\left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau_k} \right\|_{V'} \le c_1 \left\| z_k^h \right\|_V + c_2 \left\| z_{k-1}^h \right\|_V + c_3 \left\| F_k^h \right\|_V. \qquad (20)$$

Таким образом, окончательная оценка слагаемого I_2 получается из (19) и (20).

$$\mathrm{I}_2 \le c_1 \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 + c_2 \tau_k \left\| z_k^h \right\|_V^2 + c_3 \tau_k \left\| z_{k-1}^h \right\|_V^2. \qquad (21)$$

Подставим (18), (21) в (17) и результат просуммируем по k от 1 до $m \le N$. Тогда

$$a(t_m, z_m^h, z_m^h) \le a(t_0, z_0^h, z_0^h) + c_1 \sum_{k=1}^{m} \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 +$$
$$+ c_2 \sum_{k=1}^{m} \tau_k \left\| z_k^h \right\|_V^2 + c_3 \sum_{k=1}^{m} \tau_k \left\| z_{k-1}^h \right\|_V^2. \qquad (22)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k \left\| z_{k-1}^h \right\|_V^2 \le c_1 \tau_1 \left\| z_0^h \right\|_V^2 + c_2 \sum_{k=1}^{m} \tau_k \left\| z_k^h \right\|_V^2. \qquad (23)$$

Из (22), (1) и (23) получим суммарное неравенство

$$\left\| z_m^h \right\|_V^2 \le c_1 \left(\left\| z_0^h \right\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 \right) + c_2 \sum_{k=1}^{m} \tau_k \left\| z_k^h \right\|_V^2,$$

из которого следует оценка

$$\left\| z_m^h \right\|_V^2 \le c \left\{ \left\| z_0^h \right\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 \right\}. \qquad (24)$$

Далее рассмотрим и оценим $\sum_{k=1}^{N} \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2$. Преобразуем F_k^h к следующему виду:

$$F_k^h = (\tau_k)^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} w'_h(t)dt - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} =$$
$$= (\tau_k)^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [w'_h(t) - u'(t)]dt +$$
$$+ (\tau_k)^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}]dt. \qquad (25)$$

Учитывая (25), получим

$$\sum_{k=1}^{N} \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 \le c_1 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [w'_h(t) - u'(t)]dt \right\|_V^2 +$$
$$+ c_2 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_V^2. \qquad (26)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (26). Заметим, что при почти всех $t \in [0, T]$ справедливо тождество

$$w'_h(t) - u'(t) = [Q_h(t) - I]u'(t) + Q'_h(t)u(t).$$

Учитывая последнее, получим

$$\sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [w'_h(t) - u'(t)]dt \right\|_V^2 \le$$
$$\le c_1 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [I - Q_h(t)]u'(t)dt \right\|_V^2 +$$
$$+ c_2 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} Q'_h(t)u(t)dt \right\|_V^2 \le$$
$$\le c_1 \int_0^T \left\| [I - Q_h(t)]u'(t) \right\|_V^2 dt + c_2 \int_0^T \left\| Q'_h(t)u(t) \right\|_V^2 dt. \qquad (27)$$

Таким образом, из (26) и (27) следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \tau_k \left\| F_k^h \right\|_V^2 \le c_1 \int_0^T \left\| [I - Q_h(t)]u'(t) \right\|_V^2 dt +$$
$$+ c_2 \int_0^T \left\| Q'_h(t)u(t) \right\|_V^2 dt +$$
$$+ c_3 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_V^2. \qquad (28)$$

Подставим полученную оценку (28) в (24) и, учитывая (9), (10) и представление z_0^h, получим

$$\left\| z_m^h \right\|_V^2 \le c_1 \left\| Q_h(0)u^0 - u_0^h \right\|_V^2 +$$
$$+ c_2 \sum_{k=1}^{N} (\tau_k)^{-1} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right] dt \right\|_V^2 +$$
$$+ c_3 \int_0^T \left\| (I - Q_h)u'(t) \right\|_V^2 dt + c_4 \int_0^T \left\| (I - Q_h)u(t) \right\|_V^2 dt. \qquad (29)$$

Далее заметим, что

$$u(t_m) - u_m^h = [u(t_m) - w_h(t_m)] + z_m^h,$$

тогда справедлива оценка

$$\|u(t_m) - u_m^h\|_V^2 \le 2\|[I - Q_h(t_m)]u(t_m)\|_V^2 + 2\|z_m^h\|_V^2.$$

Следовательно, отсюда и из (29) получим

$$\|u(t_m) - u_m^h\|_V^2 \le c_1 \max_{0\le t\le T}\|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2 +$$

$$+ c_2\sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}\right]dt\right\|_V^2 +$$

$$+ c_3\int_0^T\|(I - Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt + c_4\int_0^T\|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\,dt. \quad (30)$$

Окончательная оценка (11) получается теперь из (30), оценки

$$\max_{0\le t\le T}\|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2 \le$$

$$\le M\int_0^T(\|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2 + \|\{[I - Q_h(t)]u(t)\}'\|_V^2)dt,$$

непрерывного вложения $V \subset H$, а также оценок (9) и (10).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть решение $u(t)$ задачи (4) такое, что $u'' \in L_p(0,T;V)$, где $1 \le p \le 2$. Тогда оценка погрешности (11) будет следующей*

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \le c_1\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p} +$$

$$+ c_2\int_0^T\|(I - Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt + c_3\int_0^T\|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\,dt. \quad (31)$$

Если решение $u(t)$ задачи (4) такое, что существует $u''' \in L_p(0,T;V)$, где $1 \le p \le 2$, то справедлива следующая оценка погрешности

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \le c_1\tau^{5-2/p}\left(\int_0^T\|u'''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p} +$$

$$+ c_2\int_0^T\|(I - Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt + c_3\int_0^T\|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\,dt. \quad (32)$$

Доказательство. Для обоснования (31) оценку (11) дополним оценкой

$$\sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}\right]dt\right\|_V^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|2^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{t_{k-1}}^{t}u''(s)ds - \int_t^{t_k}u''(s)ds\right]dt\right\|_V^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1} - 2t + t_k)u''(t)dt\right\|_V^2 \le$$

$$\le \tau\left(\int_0^T\|u''(t)\|_V\,dt\right)^2, \quad (33)$$

так как $|t_{k-1} - 2t + t_k| \le \tau_k, t \in [t_{k-1}, t_k]$ и $\tau = \max\tau_k$. Далее заметим, что

$$\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_V\,dt\right)^2 \le \tau_k^{2-2/p}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}. \quad (34)$$

Для обоснования (32) следует иначе оценить первое слагаемое в правой части (11).

$$\sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}\right]dt\right\|_V^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1} - 2t + t_k)u''(t)dt\right\|_V^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|4^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u''(t)d[\tau_k^2 - (t_{k-1} - 2t + t_k)^2]\right\|_V^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}((t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \tau_k^2)u'''(t)dt\right\|_V^2. \quad (35)$$

Учитывая, что $|(t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \tau_k^2| \le \tau_k^2$ для $t \in [t_{k-1}, t_k]$, а также оценку (34), продолжим (35)

$$\sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}\right]dt\right\|_V^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^{-1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}|(t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \tau_k^2|\,\|u'''(t)\|_V\,dt\right)^2 \le$$

$$\le c_1\sum_{k=1}^{N}(\tau_k)^3\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'''(t)\|_V\,dt\right)^2 \le$$

$$\le c_1\tau^{5-2/p}\left(\int_0^T\|u'''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}. \quad (36)$$

Для получения сходимости погрешности к нулю предположим, что последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$ предельно плотна в V, то есть $\|(I - Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для всех $v \in V$. Тогда непосредственно из теоремы 2 при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ получим

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k) - u_k^h\|_V \to 0.$$

Далее покажем, как из оценок (11), (31) и (32) можно получить скорость сходимости погрешности к нулю.

Для $t \in [0,T]$ определим множество

$$D[A(t)] = \{v \in V \mid A(t)\,v \in H\}. \quad (37)$$

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $D[A(t)] \subset E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ [1]. Потребуем от оператора $A(t)$ выполнение следующего естественного свойства: существует $\gamma > 0$, что для $t \in [0,T]$

$$\|u\|_E \le \gamma\|A(t)u\|_H, \quad u \in D[A(t)]. \quad (38)$$

В приложениях оператором $A(t)$ может быть, например, симметричный равномерно эллиптический оператор второго порядка в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей, порожденный дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле. Тогда $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V' = W_2^{-1}(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Предположим теперь, что семейство конечномерных подпространств $V_h \subset V$ обладает следующим аппроксимационным свойством:

$$\|(I - Q_h)v\|_V \le ch\|v\|_E, \tag{39}$$

где $c > 0$ не зависит от $v \in E$ и h. Заметим, что условие (39) типично для подпространств V_h типа «конечных элементов» [6].

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и решение задачи (4) такое, что* $u'' \in L_p(0,T;V)$, *где* $1 \le p \le 2$, *и* $u' \in L_2(0,T;E)$. *Пусть также выполнено свойство (39). Тогда справедлива следующая оценка погрешности*:

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \le c_1\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T \|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p} +$$
$$+ c_2h^2\left\{\int_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt + \int_0^T \|u'(t)\|_E^2\,dt\right\}. \tag{40}$$

Если же решение задачи (4) такое, что существует $u''' \in L_p(0,T;V)$, *где* $1 \le p \le 2$, *и* $u' \in L_2(0,T;E)$, *то справедлива следующая оценка погрешности:*

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \le c_1\tau^{5-2/p}\left(\int_0^T \|u'''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p} +$$
$$+ c_2h^2\left\{\int_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt + \int_0^T \|u'(t)\|_E^2\,dt\right\}. \tag{41}$$

Доказательство. Оценки (40), (41) следуют из (31), (32) и (39).

Автор выражает благодарность В. В. Смагину за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 372 с.

2. *Шепилова Е. В.* О разрешимости вариационной задачи для уравнения типа Шредингера / Е. В. Шепилова // Труды математического факультета. — 2005. — № 9. — С. 114—123.

3. *Вайникко Г. М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя// Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — № 7. — С. 1269—1277.

4. *Смагин В. В.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений с модифицированной схемой Кранка—Николсон / В. В. Смагин // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74. — № 6. — С. 913—923.

5. *Смагин В. В.* Оценки погрешности полудискретных приближений по Галеркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана / В. В. Смагин // Известия вузов. Математика. — 1996. — № 3(406). — С. 50—57.

6. *Марчук Г. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

Поступила в редакцию 27.03.2008