УДК 517.9

О ГРАФИЧЕСКОЙ МЕТРИКЕ НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ

И. Н. Прядко, Б. Н. Садовский

Воронежский государственный университет

В статье определена новая «графическая» метрика на множестве всех многозначных функций, действующих из одного метрического пространства в другое. Функции не обязательно определены на одном и том же множестве, например, сеточная аппроксимация в этой метрике может быть близка к исходной функции. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие существенные особенности новой метрики. В качестве прикладного примера доказана теорема о непрерывной зависимости выхода неидеального реле от непрерывных входов с равномерной нормой.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: графическая метрика, метрика Хаусдорфа, неидеальное реле, непрерывная зависимость выхода от входа.

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается новая метрика на множестве всех многозначных функций, действующих из одного метрического пространства в другое: она определяется как расстояние по Хаусдорфу между графиками этих функций. В некоторых ситуациях использование такой метрики позволяет выявить новые свойства изучаемого объекта — пример такой ситуации исследуется в п. 3. В других задачах новая метрика представляет более простое языковое средство для описания и доказательства известных фактов: например, она непосредственно характеризует качество приближения функции непрерывного аргумента сеточной функцией.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ

Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно, $MF(X,Y)$ — множество всех многозначных функций $f : X \to Y$. Однозначные функции также считаем входящими в $MF(X,Y)$ — как многозначные функции с пустыми иди одноэлементными образами точек. Через $D(f)$ обозначим множество всех $x \in X$, для которых $f(x) \neq \varnothing$. В декартовом произведении $X \times Y$ будем использовать метрику

$$\rho((x,y),(u,v)) = \rho_X(x,u) + \rho_Y(y,v)$$

и обычное обозначение $B((x_0,y_0),r)$ для открытого шара радиуса r с центром в точке (x_0,y_0). График функции $f \in MF(X,Y)$ будем обозначать Γ_f:

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y \in f(x)\};$$

ε — окрестность графика Γ_f задается, как обычно, формулой

$$U_\varepsilon(\Gamma_f) = \bigcup_{(x,y)\in\Gamma_f} B((x,y),\varepsilon).$$

Графическое расстояние $\rho_G(f,g)$ между функциями $f, g \in MF(X,Y)$ определим как хаусдорфово расстояние между их графиками:

$$\rho_G(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\Gamma_f) \supset \Gamma_g, U_\varepsilon(\Gamma_g) \supset \Gamma_f\}.$$

Известно (см., например, [1], [2]), что хаусдорфова метрика на множестве замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства удовлетворяет аксиомам метрического пространства. В рассматриваемой ситуации, поскольку графики функций не обязательно ограничены и замкнуты, эти аксиомы выполняются со следующими двумя изменениями.

$$\rho_G(f,g) = 0 \Rightarrow \overline{\Gamma}_f = \overline{\Gamma}_g. \quad (1)$$

Сами функции при этом могут не совпадать. Например, если f и g — сужения функции $\sin x$, соответственно, на множество всех рациональных и на множество всех иррациональных чисел, то, очевидно, графическое расстояние между ними равно нулю, хотя функции не только различны, но даже их области определения не имеют общих точек.

$\rho_G(f,g)$ может принимать значение $+\infty$. (2)

Например, $\rho_G((x : x \in \mathbb{R}),(2x : x \in \mathbb{R})) = +\infty$ и $\rho_G((x : x \in \mathbb{R}),(x : x \in [-n,n])) = +\infty$. С другой стороны, $\rho_G((x : x \in \mathbb{R}),((x-\varepsilon) : x \in \mathbb{R})) = \varepsilon$.

2. ПРИМЕРЫ

Следующие примеры иллюстрируют некоторые характерные особенности графической метрики.

(а) Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, S_n — множество точек $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$ $(k = 0,...,n)$, $g_n : S_n \to \mathbb{R}$ и

$$|g(t_k) - f(t_k)| \le \varepsilon \quad (k = 0, ..., n).$$

Пусть $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$\omega(f, \delta) = \\ = \sup_{0 \le \Delta t < \delta} \{|f(t + \Delta t) - f(t)| : t, t + \Delta t \in [a, b]\}.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\rho_G(g_n, f) \le \rho_G(g_n, f|_{S_n}) + \rho_G(f|_{S_n}, f) \le \\ \le \varepsilon + \omega\left(f, \frac{b-a}{n}\right).$$

В частности, это означает, что $g_n \xrightarrow[\rho_G]{} f$ при $\varepsilon \to 0, n \to +\infty$.

(б) Пусть $g_n(t) = \sin nt$ $(n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что данная функциональная последовательность в метрике ρ_G имеет пределом многозначную функцию-константу: $f(t) \equiv [-1, 1]$.

(в) Для любых однозначных функций g, f, определенных на одном и том же множестве $X_0 \subset X$, справедливо неравенство:

$$\rho_G(g, f) \le \sup_{x \in X_0} \rho_Y(g(x), f(x)) = \text{обозн.} = s. \quad (3)$$

Действительно, для любого $\varepsilon > s$ покажем, что

$$U_\varepsilon(\Gamma_f) \supset \Gamma_g. \quad (4)$$

Если $(x, y) \in \Gamma_g$, т. е. $y = g(x)$, то $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ и

$$\rho((x, y), (x, f(x))) < \varepsilon.$$

Значит,

$$(x, y) \in U_\varepsilon(\Gamma_f).$$

Тем самым (4) доказано. Аналогично,

$$U_\varepsilon(\Gamma_g) \supset \Gamma_f.$$

Вместе с (4) ввиду произвольности $\varepsilon > s$ это дает (3).

Отметим, что обратное неравенство не справедливо ни с какой константой. Например, для функций $f_n = (\sin nt : t \in [0, 2\pi])$, как нетрудно видеть, $\sup|f_n(t) - f_{2n}(t)| \ge 1$, в то время как $\rho_G(f_n, f_{2n}) \le \pi/n$, т. е. графическое расстояние при $n \to \infty$ стремится к нулю.

(г) Интегральная метрика на пространстве интегрируемых функций не сравнима с графической. Например, если $f_n = (t^n : t \in [0, 1])$, то в интегральной метрике расстояние от f_n до нулевой функции равно $1/(n+1)$ и стремится к нулю при $n \to \infty$, а графическое расстояние независимо от n равно единице. С другой стороны, графическое расстояние между функциями $f(t) = 1/t$ и $g(t) = 1/(t-1)$ на отрезке $[1 + \varepsilon, 2]$ не больше 1, а расстояние в интегральной метрике равно $\ln \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ и стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$.

3. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЫХОДА ОТ ВХОДА

Неидеальное реле с пороговыми значениями $\beta < \alpha$ (см., например, [3], [4]) можно описать как преобразователь, который сопоставляет непрерывной входной функции $\sigma(t)$ ($t_0 \le t \le T$) непрерывную слева выходную функцию $u(t)$ со значениями 0 и 1 по следующему правилу: при $t \in [t_0, T)$ и достаточно малых $dt > 0$

$$u(t + dt) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(t) \ge \alpha, \\ 0, & \text{если } \sigma(t) \le \beta, \\ u(t), & \text{если } \sigma(t) \in (\beta, \alpha). \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение (5) относится к типу так называемых *локально явных* уравнений [4]; его однозначная разрешимость при заданном начальном условии

$$u(t_0) = u_0 \quad (6)$$

доказана в [4]. Здесь мы обсуждаем вопрос о непрерывной зависимости u от σ, рассматривая во множестве входных функций σ метрику пространства $C_{[t_0, T]}$, а во множестве выходных функций — графическую метрику ρ_G.

Теорема. *Пусть непрерывная на* $[t_0, T]$ *входная функция* σ *в точках локального максимума не принимает значение* α, *а в точках локального минимума —* β.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любой непрерывной входной функции* $\tilde{\sigma}$, *удовлетворяющей условию* $\|\tilde{\sigma} - \sigma\|_C < \delta$, *соответствующая выходная функция* $\tilde{u}$ *с начальным значением* $\tilde{u}(t_0) = u_0 = u(t_0)$ *удовлетворяет неравенству* $\rho_G(\tilde{u}, u) < \varepsilon$.

Доказательство. Будем для определенности считать, что $u_0 = 0$; при $u_0 = 1$ доказательство аналогично. Определим возрастающую последовательность чисел $\tau_i \in [t_0, T]$ следующим образом:

$$\tau_0 = t_0,$$
$$\tau_1 = \min\{t \in [\tau_0, T] : \sigma(t) = \alpha\},$$
$$\tau_2 = \min\{t \in [\tau_1, T] : \sigma(t) = \beta\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\tau_{2j+1} = \min\{t \in [\tau_{2j}, T] : \sigma(t) = \alpha\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\tau_{2j+2} = \min\{t \in [\tau_{2j+1}, T] : \sigma(t) = \beta\},$$

Поскольку $\sigma(\tau_{2j+1}) - \sigma(\tau_{2j+2}) = \alpha - \beta > 0$ и функция σ равномерно непрерывна на $[t_0, T]$, эта последовательность конечна (и даже, возможно, состоит из одного члена $\tau_0 = t_0$). Номер ее последнего члена обозначим k. Заметим, что $\tau_k < T$, так как иначе было бы нарушено условие на σ. Возможен также случай, когда $\tau_1 = \tau_0$ — если $\sigma(t_0) \geq \alpha$. В остальных случаях $\tau_{i+1} > \tau_i$.

Выбор числа $\delta > 0$ по заданному $\varepsilon > 0$ произведем следующим образом.

1) Зафиксируем такое положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$, для которого отрезки $[\tau_i - \varepsilon_1, \tau_i + \varepsilon_1]$ ($i \geq 2$)), $[\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1]$ (если $\tau_1 = \tau_0$, то $[\tau_1, \tau_1 + \varepsilon_1]$) лежат в (t_0, T) и не имеют общих точек.

2) Найденное число $\varepsilon_1 > 0$ подчиним ещё одному требованию:

$$\left|\sigma(t') - \sigma(t'')\right| < \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ при } \left|t' - t''\right| \leq \varepsilon_1. \quad (7)$$

3) Определим последовательность чисел $\delta_i^-, \delta_i^+ (i \geq 2)$, δ_1^+ (и δ_1^-, если $\tau_1 > \tau_0$; в противном случае будем считать, что $\delta_1^- = \delta_1^+$)

$$\delta_{2j+1}^- = \alpha - \max\{\sigma(s) : s \in [\tau_{2j}, \tau_{2j+1} - \varepsilon_1]\},$$
$$\delta_{2j+1}^+ = \max\{\sigma(s) : s \in [\tau_{2j+1}, \tau_{2j+1} + \varepsilon_1]\} - \alpha,$$
$$\delta_{2j+2}^- = \min\{\sigma(s) : s \in [\tau_{2j+1}, \tau_{2j+2} - \varepsilon_1]\} - \beta,$$
$$\delta_{2j+2}^+ = \beta - \min\{\sigma(s) : s \in [\tau_{2j+2}, \tau_{2j+2} + \varepsilon_1]\},$$

а также $\delta_{k+1} = \alpha - \max\{\sigma(s) : s \in [\tau_k, T]\}$, если $k = 2j$,

$\delta_{k+1} = \min\{\sigma(s) : s \in [\tau_k, T]\} - \beta$, если $k = 2j + 1$.

Нетрудно видеть, что эти числа положительны.

4) Наконец, положим,

$$\delta = \min\left\{\frac{\alpha - \beta}{2}, \delta_i^-, \delta_i^+ (i = 1, \ldots, k), \delta_{k+1}\right\}. \quad (8)$$

Для входа $\tilde{\sigma}$, удовлетворяющего условию $\|\tilde{\sigma} - \sigma\|_C < \delta$, докажем, во-первых, что $\tilde{u}(\tau_i + \varepsilon_1) = u(\tau_i + \varepsilon_1)$ ($i = 1, \ldots, k$). По определению точек τ_i, $\sigma(\tau_i)$ равно α при нечетном i и β — при четном. Из (5) следует, что в некоторой правой окрестности τ_i $u(t)$ равно 1 в первом случае и 0 — во втором. В точке $\tau_i + \varepsilon_1$ эти значения сохраняются, что следует из (7). Далее поскольку $\delta \leq \delta_i^+$, на интервале $(\tau_i, \tau_i + \varepsilon_1)$ найдется точка s, в которой $\tilde{\sigma}(s) > \alpha$ при нечетном i и $\tilde{\sigma}(s) < \beta$ — при четном. Тогда из (5), (7), (8) следует, что $\tilde{u}(\tau_i + \varepsilon_1)$ равно 1 в случае нечетного i и 0 — в случае четного. Итак, в любом случае $\tilde{u}(\tau_i + \varepsilon_1) = u(\tau_i + \varepsilon_1)$.

Во-вторых, покажем, что $\tilde{u}(t) = u(t)$ при $t \in [\tau_i + \varepsilon_1, \tau_{i+1} - \varepsilon_1]$ ($i \geq 1$). Действительно, поскольку $\delta \leq \delta_i^-$, можно утверждать, что на рассматриваемых отрезках в случае нечетного i $\tilde{\sigma}(t) > \beta$, а в случае четного — $\tilde{\sigma}(t) < \alpha$. Следовательно, $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\tau_i + \varepsilon_1) = u(\tau_i + \varepsilon_1) = u(t)$. Аналогично, из неравенств $\delta \leq \delta_1^-$, $\delta \leq \delta_{k+1}$ вытекает, что $\tilde{u}(t) = u(t)$ на $[\tau_0, \tau_1 - \varepsilon_1]$ (при $\tau_1 > \tau_0$), на $[\tau_k + \varepsilon_1, T]$ и на $[\tau_0, T]$ в случае $k = 0$.

Итак, $\tilde{u}(t) = u(t)$ всюду вне интервалов $(\tau_i - \varepsilon_1, \tau_i + \varepsilon_1)$ ($1 \leq i \leq k$). Докажем теперь, что

$$U_{2\varepsilon_1}(\Gamma_u) \supset \Gamma_{\tilde{u}}, U_{2\varepsilon_1}(\Gamma_{\tilde{u}}) \supset \Gamma_u;$$

отсюда будет вытекать доказываемое утверждение: $\rho_G(\tilde{u}, u) \leq 2\varepsilon_1 < \varepsilon$. Докажем первое включение; доказательство второго аналогично. Пусть $(t, x) \in \Gamma_{\tilde{u}}$, т. е. $x = \tilde{u}(t)$. Если при этом t не лежит ни в одном из интервалов $(\tau_i - \varepsilon_1, \tau_i + \varepsilon_1)$ ($1 \leq i \leq k$), то точка (t, x) принадлежит также графику функции u, а тогда и подавно его $2\varepsilon_1$-окрестности.

Пусть теперь t принадлежит одному из этих интервалов (в случае $\tau_0 = \tau_1$ — интервалу $(\tau_1, \tau_1 + \varepsilon_1)$). Обозначим через t_1 тот из концов интервала, в котором значение у функции $\tilde{u}$ совпадает со значением в точке t (очевидно, на концах интервала значения функции различны). Тогда точка (t_1, x) принадлежит и графику функции u. Поскольку $\rho((t_1, x), (t, x)) = |t_1 - t| < 2\varepsilon_1$, мы получаем, что точка (t, x) принадлежит $2\varepsilon_1$-окрестности графика функции u.

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келли Дж. Л.* Общая топология / Дж. Л. Келли. — М. : Наука, 1968. — 384 с.

2. *Борисович Ю. Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : КомКнига, 2005. — 215 с.

3. *Красносельский М. А.* Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.

4. *Прядко И. Н.* О локально явных моделях некоторых негладких систем / И. Н. Прядко, Б. Н. Садовский // Автомат. и телемех. — 2004. — № 10. — С. 40—50.

Поступила в редакцию 31 марта 2008 г.