УДК 517.988.68

ПРИНЦИП ОБОБЩЁННЫХ СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. И. Перов

Воронежский государственный университет

При изучении систем уравнений (алгебраических, дифференциальных или интегральных) иногда удобно пользоваться не обычными метрическими пространствами с числовыми метриками и классическим принципом сжимающих отображений, а псевдометрическими пространствами, в которых псевдорасстояние измеряется с помощью неотрицательных элементов некоторого линейного частичного упорядоченного пространства со сходимостью, и принципом обобщённых сжимающих отображений, где в качестве мажоранты для приращения операторов выступают полуаддитивные отображения конуса неотрицательных элементов в себя, являющиеся абсолютно устойчивыми.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: псевдометрическое пространство, полуаддитивное отображение, обобщённое сжимающее отображение, принцип сжимающих отображений.

Пусть M есть произвольное множество и F есть некоторое отображение этого множества в себя, $F : M \to M$.

Рассмотрим уравнение

$$x = Fx \quad (x \in M), \tag{1}$$

решения которого, как известно, называют *неподвижными точками* изучаемого отображения. Для доказательства существования решения уравнения (1), а также для его фактического точного или приближенного нахождения часто прибегают к помощи *метода последовательных приближений*, состоящего в том, что решение уравнения (1) ищут в качестве предела последовательности

$$x_k = Fx_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где за нулевое приближение x_0 принимается, как правило, произвольная точка из множества M. Отметим, что при сделанных нами предположениях процесс построения последовательных приближений x_k по правилу (2) неограниченно продолжим и вся проблема заключается в том, чтобы указать такие ограничения на множество M и отображение F, которые бы гарантировали как сходимость последовательности x_k к определённому пределу x^*,

$$x_k \to \mathrm{x}^*, \tag{3}$$

так и то, что тот предел является решением уравнения (1). Таким образом, нам нужно предполагать, что в множестве M определено понятие сходимости, т.е. что оно является пространством [1, с. 7].

Пусть Σ есть вещественное линейное частично упорядоченное пространство, в котором определена сходимость, согласованная с алгебраическими операциями и частичной упорядоченностью (более подробно об этом см. в [2, с. 54, 56 и 60]). Обозначим через K выпуклый замкнутый конус неотрицательных элементов из Σ,

$$K = \{\sigma \in \Sigma : \sigma \geq 0\}, \tag{4}$$

который предполагается *воспроизводящим*, т.е. любой элемент σ из Σ представим в виде $\sigma = \alpha - \beta$, где α и β из K, и *правильным*, т.е. монотонная ограниченная последовательность везде сходится (сравни с [3, с.13 и с. 33—34]). Важный пример, когда все эти условия выполнены, представляет пространство R^n, в котором в качестве K взят конус векторов с неотрицательными компонентами [4, с. 352].

Напомним, что функция $\rho(x, y) : M \times M \to \Sigma$, обладающая свойствами

1) $\rho(x, y) \geq 0$,
2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$,

называется *псевдометрикой*, а совокупность (M, Σ, ρ) — *псевдометрическим пространством* [2, с. 58—61]. В статье псевдометическое пространство (M, Σ, ρ), краткости ради, снова обозначается через M.

Отображение $Q : K \to K$ называется *полуаддитивным*, если выполнены следующие условия (сравни с [5, с. 268—271]):

1) $Q0 = 0$;
2) *если* $0 \leq \alpha \leq \beta$, *то* $Q\alpha \leq Q\beta$ *(свойство монотонности)*;

3) *если* $\alpha, \beta \geq 0$, *то* $Q(\alpha+\beta) \leq Q\alpha + Q\beta$ *(свойство полуаддитивности)*;

4) Q *— непрерывное отображение.*

Отметим, что сумма полуаддитвных отображений, а также произведение полуаддитивного отображения на неотрицательное число есть снова полуаддитивное отображение. Точно также полуаддитивным оказывается суперпозиция (умножение) полуаддитивных отображений и предел последовательности отображений, если она локально равномерно сходится.

Пусть $Q : K \to K$ есть произвольное полуаддитивное отображение. Наряду с уравнением (1), рассмотрим уравнение

$$\alpha = Q\alpha \quad (\alpha \in K). \tag{5}$$

Говорят, что нуль *абсолютно устойчив* относительно отображения Q, если любая последовательность, построенная по правилу

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

начиная с произвольного элемента α_0 из K, сходится к нулю:

$$\alpha_k \to 0. \tag{7}$$

В этом случае отображение Q также будет называться *абсолютно устойчивым.*

Лемма 1. *Пусть Q есть полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. Тогда если для некоторого элемента α имеем*

$$0 \leq \alpha,\ \alpha \leq Q\alpha,$$

то $\alpha = 0$.

Лемма 2. *Пусть Q есть полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. Тогда если для некоторой последовательности α_k имеем*

$$0 \leq \alpha_k,\ \alpha_k \leq Q\alpha_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то $\alpha_k \to 0$.

Ниже важную роль играет отображение $T : K \to \Sigma$, которое определяется формулой

$$T\alpha = \alpha - Q\alpha = (I - Q)\alpha \quad (\alpha \in K), \tag{8}$$

где I есть единичное отображение в Σ.

Теорема 1. *Для того чтобы полуаддитивное отображение $Q : K \to K$ было абсолютно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

5) если $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha \neq \beta$, то $T\alpha \neq T\beta$;

6) если $\beta \geq 0$, то существует единственное $\alpha \geq 0$, для которого $T\alpha = \beta$;

7) если σ и τ принадлежат области определения обратного отображения T^{-1} и $\sigma \leq \tau$, то $T^{-1}\sigma \leq T^{-1}\tau$.

Условие 5) означает, что отображение T является взаимно-однозначным и потому существует обратное отображение T^{-1}, определенное на области значений отображения T. Условие 6) означает, что область определения обратного отображения T^{-1} содержит конус K (может быть, совпадая с ним). Условие 7) означает, что обратное отображение T^{-1} является монотонным.

□ **Необходимость**. Пусть полуаддитивное отображение Q является абсолютно устойчивым. Покажем, что тогда выполнены условия 5)—7). Предварительно убедимся в справедливости следующего вспомогательного предложения.

Пусть $\alpha \geq 0$ является решением уравнения

$$\alpha = Q\alpha + \sigma \tag{9}$$

при некотором σ из Σ. Возьмём произвольное α_0, для которого $\alpha \leq \alpha_0$, и построим последовательность α_k по следующему правилу:

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \sigma,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Покажем, что

$$\alpha \leq \alpha_k \to \alpha. \tag{11}$$

Прежде всего, установим, что $\alpha \leq \alpha_k$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Действительно, при $k = 0$ имеем $\alpha \leq \alpha_0$ согласно выбору элемента α_0; если $\alpha \leq \alpha_{k-1}$, то в силу монотонности Q из (10) и (9) получим

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \sigma \geq Q\alpha + \sigma = \alpha.$$

Шаг индукции проведён и $\alpha \leq \alpha_k$ при всех k. Из (9) и (10) находим

$$\alpha_k - \alpha = Q\alpha_{k-1} - Q\alpha \leq Q(\alpha_{k-1} - \alpha),$$

и, полагая $\delta_k \equiv \alpha_k - \alpha$, получим: $0 \leq \delta_k$ и $\delta_k \leq Q\delta_{k-1}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, откуда из леммы 2 вытекает, что $\delta_k \to 0$.

Соотношение (11) установлено.

Докажем 5). Нам достаточно показать, что если $\alpha, \beta \geq 0$ и $T\alpha = T\beta$, то $\alpha = \beta$. Обозначая через σ общее значение T_α и T_β, получим

$$\alpha = Q\alpha + \sigma \text{ и } \beta = Q\beta + \sigma,$$

т.е. α и β — решения уравнения (9) с одним и тем же σ.

Пусть $\gamma_0 \geq \alpha, \beta$ (например, $\gamma_0 = \alpha + \beta$). Построим последовательность γ_k по правилу (10)

$$\gamma_k = Q\gamma_{k-1} + \sigma.$$

Согласно (11), применяемой к каждому из уравнений, получим

$$\alpha \le \gamma_n \to \alpha \text{ и } \beta \le \gamma_n \to \beta .$$

Так как сходящаяся последовательность не может сходиться к двум разным пределам, то $\alpha = \beta$. Свойство 5) установлено.

Докажем 6). Покажем, что уравнение

$$\alpha = Q\alpha + \beta \qquad (12)$$

при любом $\beta \ge 0$ имеет единственное решение $\alpha \ge 0$. Единственность решения вытекает из 5), так что в доказательстве нуждается только существование решения. Будем решать уравнение (12) методом последовательных приближений

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \beta ,\ k = 1,2,\dots, \qquad (13)$$

начиная с $\alpha_0 = 0$. Покажем, что

$$0 \le \alpha_k - \alpha_{k-1} \to 0 . \qquad (14)$$

Действительно, методом математической индукции нетрудно убедиться в том, что последовательность α_k является неубывающей. Далее, из (13) получаем

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = Q\alpha_k - Q\alpha_{k-1} \le Q(\alpha_k - \alpha_{k-1}) .$$

Полагая $\delta_k \equiv \alpha_{k+1} - \alpha_k$, имеем: $0 \le \delta_k$ и $\delta_k \le Q\delta_{k-1}$ при $k = 1,2,\dots$, откуда, как и выше, из леммы 2 вытекает $\delta_k \to 0$. Утверждение (14) полностью доказано.

Переписывая (13) в виде

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \beta_k ,$$

где $\beta_k = Q\alpha_{k-1} - Q\alpha_k + \beta$, мы видим, что уравнение (12) имеет решение α_k при любом $\beta_k \to \beta$. Запомнив это, для заданного $\beta \ge 0$ возьмём произвольное $\tau > \beta$ и это фиксируем. Согласно сказанному выше можно указать также ζ, сколько угодно близкие к τ, при котором уравнение (12) при $\beta = \zeta$ имеет решение. Фиксируем найденное ζ. Итак, уравнение

$$\gamma = Q\gamma + \zeta , \qquad (15)$$

где $\zeta \ge \beta$, имеет решение γ. Покажем, что

$$\alpha_k \le \gamma ,\ k = 0,1,2\dots . \qquad (16)$$

При $k = 0$ неравенство (16) очевидно. Пусть уже установлено, что $\alpha_{k-1} \le \gamma$ (предположение индукции). Тогда согласно (13) и (15) в силу монотонности отображения Q получаем

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \beta \le Q\gamma + \beta \le Q\gamma + \zeta = \gamma .$$

Шаг индукции проверен и оценка (16) установлена. Итак, произвольная последовательность α_k ограничена сверху. Так как по предположению конус K является правильным, то последовательность α_k сходится, $\alpha_k \to \alpha$. Совершая предельный переход в (13) в силу непрерывности отображения Q, получаем, что $\alpha \ge 0$ есть решение уравнения (12). Свойство 6) установлено.

Докажем 7). Положим $\alpha = T^{-1}\sigma$ и $\beta = T^{-1}\tau$. Тогда $\alpha \ge 0$ и $\alpha = Q\alpha + \sigma$; $\beta \ge 0$ и $\beta = Q\beta + \tau$. Нам нужно доказать, что если $\sigma \le \tau$, то $\alpha \le \beta$.

Выберем элемент ζ так, чтобы $\zeta \ge \alpha$ и $\zeta \ge \beta$, и построим последовательные приближения α_k и β_k по правилу $\alpha_0 = \zeta = \beta_0$ и

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \sigma \text{ и } \beta_k = Q\beta_{k-1} + \tau ,\ k = 1,2,\dots . \qquad (17)$$

Повторяя рассуждения, приведённые в начале доказательства необходимости, мы видим, что процесс построения последовательных приближений неограниченно продолжим, причем

$$\alpha \le \alpha_k \to \alpha \text{ и } \beta \le \beta_k \to \beta . \qquad (18)$$

Проверим, что

$$\alpha_k \le \beta_k ,\ k = 0,1,2,\dots . \qquad (19)$$

Действительно, при $k = 0$ имеем по построению $\alpha_0 = \beta_0$ и (19) выполнено даже со знаком равенства. Предположим, что неравенство $\alpha_{k-1} \le \beta_{k-1}$ уже установлено и проведем шаг математической индукции. В силу (17)

$$\alpha_k = Q\alpha_{k-1} + \sigma \le Q\beta_{k-1} + \sigma \le Q\beta_{k-1} + \tau = \beta_k$$

(мы воспользовались монотонностью отображения Q и неравенством $\sigma \le \tau$). Шаг индукции проведён и требуемое неравенство (19) установлено. Совершая с учетом (18) предельный переход в неравенстве (19), получим $\alpha \le \beta$ и требуемое неравенство получено. Свойство 7) обосновано. ■

Достаточность. Пусть полуаддитивное отображение Q удовлетворяет условию 5)—7). Покажем, что в этом случае оно всегда абсолютно устойчиво.

Для нас важно, чтобы любая последовательность α_k, построенная по правилу (6), отправляясь от произвольного взятого элемента α_0 из конуса K, была сходящейся к нулю, т.к. имело место (7).

Из условия 1) вытекает, что нуль есть неподвижная точка отображения Q, $0 = Q\,0$. Из условия 5) следует, что других неподвижных точек отображение Q не имеет.

Возьмём произвольный элемент α_0 из K и построим согласно (6) последовательность α_k. Если

$$\alpha_0 \ge Q\alpha_0 , \qquad (20)$$

то в силу монотонности отображения Q получим

$$\alpha_0 \ge \alpha_1 \ge \dots \ge \alpha_k \ge \dots . \qquad (21)$$

Так как невозрастающая последовательность α_k ограничена снизу (нулем), то в силу правильности конуса K она сходится к некоторому элементу α, $\alpha_k \to \alpha$. Совершая предельный переход в (6) в силу непрерывности отображения Q, получим (5). Итак, α должна быть неподвижной точкой отображения Q; но единственной неподвижной точкой этого отображения является нуль. Поэтому $\alpha = 0$ и в этом случае соотношение (7) установлено.

Однако последовательность α_k сходится к нулю не только тогда, когда выполнено условие (20), но и в том случае, если

$$\alpha_0 \le \beta_0 \text{ и } \beta_0 \ge Q\beta_0 \qquad (22)$$

для некоторого элемента β_0. Действительно, в этом случае в силу монотонности отображения Q

$$\alpha_k \le \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, \qquad (23)$$

и так как согласно предыдущему $\beta_k \to 0$, то из (23) следует $0 \le \alpha_k \to 0$ и соотношение (7) и в этом случае также имеет место.

В общем случае найдем такие $\sigma, \tau \ge 0$, что $T\alpha_0 = \sigma - \tau$ (мы воспользовались тем, что конус K является воспроизводящим). Поэтому

$$T\alpha_0 \le \sigma. \qquad (24)$$

Элемент $T\alpha_0$ входит в область определения T^{-1} и $T^{-1}(T\alpha_0) = \alpha_0$. В силу условия 6) элемент σ, будучи отрицательным, также входит в область определения T^{-1}. Так как согласно 7) отображение T^{-1} является монотонным, то из (24) получаем

$$\alpha_0 \le T^{-1}\sigma \equiv \beta_0. \qquad (25)$$

Так как $\alpha_0 \le \beta_0$ и $\beta_0 \ge Q\beta_0$ — это в силу $T\beta_0 = \sigma \ge 0$, — то согласно (22) и (23) получаем $0 \le \alpha_k \to 0$. Мы показали, что соотношение (7) имеет место во всех случаях. ■

Пусть $Q : K \to K$ есть некоторое полуаддитивное отображение, которое мы будем предполагать абсолютно устойчивым. Тогда в силу теоремы 1 существует обратное отображение T^{-1}, которое, рассматриваемое только в конусе K, является полуаддитивным. Остановимся лишь на доказательстве свойства полуаддитивности.

Положим $T^{-1}\sigma = \alpha$ и $T^{-1}\tau = \beta$. Тогда в силу свойства 6) имеем $\alpha \ge 0$ и $\beta \ge 0$. Отметим ещё, что $T\alpha = \sigma$ и $T\beta = \tau$. Так как согласно 3) имеем $T(\alpha + \beta) \ge T\alpha + T\beta$, то $\sigma + \tau = T\alpha + T\beta \le \le T(\alpha + \beta)$, т.е. $\sigma + \tau \le T(\alpha + \beta)$. Применяя к обеим частям последнего неравенства обратное отображение T^{-1} в силу его монотонности получаем $T^{-1}(\sigma + \tau) \le \alpha + \beta = T^{-1}\sigma + T^{-1}\tau$ и свойство 3) установлено.

Лемма 3. *Пусть Q есть полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение. Тогда если для некоторой последовательности α_k имеем*

$$0 \le \alpha_k,\ \alpha_k \le Q\alpha_{k-1} + \sigma, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\sigma \ge 0$ и $\alpha_0 \le \alpha$ для решения уравнения

$$\alpha = Q\alpha + \sigma,$$

то $0 \le \alpha_k \le \alpha$ при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Переводящее псевдометрическое пространство M в себя отображение F называется *обобщённым сжатием* или *обобщённым сжимающим отображением*, если оно удовлетворяет условию

$$\rho(Fx, Fy) \le Q\rho(x, y), \qquad (26)$$

где $Q : K \to K$ есть некоторое полуаддитивное абсолютно устойчивое отображение.

Теорема 2. *Пусть M есть полное псевдометрическое пространство. Пусть отображение F переводит это пространство в себя и является обобщённым сжатием.*

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение, которое мы обозначим через x^*. Для произвольной точки* a *из M справедлива оценка*

$$\rho(x^*, a) \le (I - Q)^{-1}\rho(Fa, a) \qquad (27)$$

(локализация решения). Это решение может быть получено методом последовательных приближений (2), *отправляясь от произвольного нулевого приближения x_0 из M (т.е. имеет место* (3)*), причем справедливы следующие оценки погрешности:*

$$\rho(x^*, x_k) \le (I - Q)^{-1}Q^k\rho(x_1, x_0),\ k = 1, 2, \ldots, \quad (28)$$

$$\rho(x^*, x_k) \le Q^k(I - Q)^{-1}\rho(x_1, x_0),\ k = 1, 2, \ldots. \quad (29)$$

Здесь Q^k — это k-я итерация отображения Q. Как Q^k, так и $(I - Q)^{-1}$, рассматриваемые только на K, — это полуаддитивные отображения, произведения которых в любом порядке даёт снова полуаддитивное отображение. Отметим, что в отличие от линейного случая отображения Q^k и $(I - Q)^{-1}$ — и тому есть примеры — не коммутируют.

□ Мы начнём с самого сложного вопроса — с доказательства существования решения уравнения (1). Возьмём произвольный элемент x_0 из псевдометрического пространства M и построим согласно (2) последовательные приближения x_k. Покажем, что эта последовательность является фундаментальной. Прежде всего установим, что

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \to 0. \qquad (30)$$

Согласно условию обобщённого сжатия (26) имеем

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le Q\rho(x_k, x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (31)$$

Полагая $\alpha_k \equiv \rho(x_{k+1}, x_k)$, согласно (31) получим $0 \le \alpha_k$ и $\alpha_k \le Q\alpha_{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots$, откуда в силу леммы 2 имеем $\alpha_k \to 0$ и соотношение (30) доказано.

Теперь приступим к центральной части доказательства — установлению важной оценки

$$\rho(x_l, x_k) \le (I - Q)^{-1}\rho(x_{k+1}, x_k), \quad l > k. \quad (32)$$

Обращаем внимание на то, что l $(l > k)$ здесь совершено произвольно. Фиксируем k и обозначим для простоты $\alpha_s \equiv \rho(x_{k+s}, x_k)$, $s = 0, 1, \ldots$, и $\sigma = \rho(x_{k+1}, x_k)$. В силу условия обобщённого сжатия (26) имеем

$$\alpha_s = \rho(x_{k+s}, x_k) = \rho(Fx_{k+s-1}, x_k) \le$$
$$\le \rho(Fx_{k+s-1}, Fx_k) + \rho(Fx_k, x_k) \le$$
$$\le Q\rho(x_{k+s-1}, x_k) + \rho(Fx_k, x_k) = Q\alpha_{s-1} + \sigma,$$

откуда получим

$$0 \le \alpha_s, \ \alpha_s \le Q\alpha_{s-1} + \sigma, \ s = 1, 2, \ldots.$$

Так как $\alpha_0 = 0$, то на основании леммы 3 вытекает оценка

$$0 \le \alpha_s \le \alpha = (I - Q)^{-1}\sigma, \ s = 1, 2, \ldots,$$

которая в силу принятых нами обозначений в точности совпадает при $s = l - k$ с требуемой оценкой (32).

Так как имеет место (30) и отображение $(I - Q)^{-1}$ непрерывно, причём $(I - Q)^{-1}0 = 0$, то правая часть оценки (32) стремится к нулю; поэтому последовательность x_k является фундаментальной. В силу предполагаемой полноты псевдометрического пространства M она сходится к некоторому элементу x^* из M, т.е. имеет место (3). Так как отображение F непрерывно, то, совершая предельный переход в формуле (2), получим, что x есть решение уравнения (1). *Существование решения уравнения* (1) *доказано.*

Проверим единственность построенной неподвижной точки. Предположим, что отображение F имеет неподвижные точки x^* и y^*. Так как $x^* = Fx^*$ и $y^* = Fy^*$, то согласно условию обобщённого сжатия (26) получаем

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Fx^*, Fy^*) \le Q\rho(x^*, y^*).$$

Обозначая для краткости $\alpha \equiv \rho(x^*, y^*)$, имеем

$$0 \le \alpha, \ \alpha \le Q\alpha,$$

откуда по лемме 1 находим $\alpha = 0$, и *единственность решения уравнения* (1) *установлена.*

Докажем локализационную оценку (27). Пусть x^* — как это было у нас до сих пор — есть неподвижная точка отображения F, и a — произвольная точка из M. Так как согласно условию обобщённого сжатия (26) получаем

$$\rho(x^*, a) = \rho(Fx^*, a) \le \rho(Fx^*, Fa) + \rho(Fa, a) \le$$
$$\le Q\rho(x^*, a) + \rho(Fa, a),$$

то

$$\rho(x^*, a) - Q\rho(x^*, a) \le \rho(Fa, a),$$

или

$$T\rho(x^*, a) \le \rho(Fa, a).$$

Обозначим левую часть последнего неравенства через σ, а правую — через τ; тогда $\sigma \le \tau$. Ясно, что элемент σ входит в область определения обратного отображения и $T^{-1}\sigma = \rho(x^*, a)$. Согласно свойству 6) обратное отображение T^{-1} определено на конусе K всех неотрицательных элементов, и, в частности, определено на элементе τ. В соответствии со свойством 7) обратное отображение T^{-1} является монотонным. Поэтому из $\sigma \le \tau$ вытекает $T^{-1}\sigma \le T^{-1}\tau$, т.е.

$$\rho(x^*, a) \le (I - Q)^{-1}\rho(Fa, a),$$

и требуемая *локализационная оценка* (27) *установлена.*

Осталось получить оценки (28) и (29). Применяя нужное число раз оценку (31), получаем

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le Q^k\rho(x_1, x_0), \ k = 1, 2, \ldots. \quad (33)$$

Так как отображение $(I - Q)^{-1}$ определено, в частности на конусе K, и является монотонным (см. свойства 6) и 7)), то из оценок (32) и (33) находим

$$\rho(x_l, x_k) \le (I - Q)^{-1}\{Q^k\rho(x_1, x_0)\} =$$
$$= (I - Q)^{-1}Q^k\rho(x_1, x_0),$$

т.е.

$$\rho(x_l, x_k) \le (I - Q)^{-1}Q^k\rho(x_1, x_0), \ l > k. \quad (34)$$

Устремляя здесь l к бесконечности согласно (3) приходим к требуемой оценке (28).

Аналогичным образом можно проверить, что

$$\rho(x^*, x_k) \le Q^k\rho(x^*, x_0), \ k = 1, 2, \ldots. \quad (35)$$

Так как согласно локализационной оценке (27) (мы положим $a = x_0$)

$$\rho(x^*, x_0) \le (I - Q)^{-1}\rho(Fx_0, x_0),$$

то в силу монотонности полуаддитивного отображения Q^k получаем

$$\rho(x^*, x_k) \le Q^k\{(I-Q)^{-1}\rho(Fx_0, x_0)\} =$$
$$= Q^k(I-Q)^{-1}\rho(x_1, x_0).$$

Мы пришли к требуемой оценке (29). ■

Отметим, что поводом для написания статьи послужил принцип обобщённого сжатия М. А. Красносельского [6, с. 153—154]; можно показать, что он вытекает из теоремы 2, если, скажем, пространство M — банахово либо замкнутое выпуклое подмножество некоторого банахова пространства.

В некоторых случаях обобщённое сжимающее отображение задано не на всём пространстве M, а только на некоторой его части. В такой ситуации можно воспользоваться приводимым ниже локальным вариантом теоремы 2.

Пусть на псевдошаре $S(a,\tau) = \{x \in M : \rho(x,a) \le \le \tau\}$, где а из M и τ из K, задано обобщённое сжимающее отображение $F : S(a,\tau) \to M$, для которого

$$\rho(Fx, Fy) \le Q\rho(x,y),\ x, y \in S(a,\tau), \quad (36)$$

где $Q : K \to K$ — некоторое полуаддитивное отображение, являющееся абсолютно устойчивым. По теореме 1 существует обратное отображение $(I-Q)^{-1}$, определённое, во всяком случае, на конусе K.

Теорема 3. *Пусть на псевдошаре $S(a,\tau)$ полного псевдометрического пространства M задано обобщённое сжимающее отображение F. Пусть дополнительно выполнено условие*

$$(I-Q)^{-1}\rho(Fa, a) \le \tau. \quad (37)$$

Тогда уравнение (1) в псевдошаре $S(a,\tau)$ имеет единственное решение, которое мы обозначим через x^*. Для этого решения имеет место локализационная оценка

$$\rho(x^*, a) \le (I-Q)^{-1}\rho(Fa, a). \quad (38)$$

Это решение может быть получено методом последовательных приближений (2), отправляясь от нулевого приближения, причем справедливы следующие оценки погрешности:

$$\rho(x^*, x_k) \le (I-Q)^{-1}Q^k\rho(Fa, a),\ k = 1, 2, \ldots, \quad (39)$$

$$\rho(x^*, x_k) \le Q^k(I-Q)^{-1}\rho(Fa, a),\ k = 1, 2, \ldots. \quad (40)$$

□ Обозначим через σ левую часть неравенства (37). Тогда $\sigma \ge 0$ и $\sigma \le \tau$. Поэтому $S(a,\sigma) \subseteq S(a,\tau)$. Для нас важно, что $\sigma = Q\sigma + \rho(Fa, a)$. Проверим, что псевдошар $S(a,\sigma)$ инвариантен относительно отображения $F : FS(a,\sigma) \subseteq S(a,\sigma)$. Действительно, если x из $S(a,\sigma)$, то $\rho(x,a) \le \sigma$ и так как

$$\rho(Fx, a) \le \rho(Fx, Fa) + \rho(Fa, a) \le$$
$$\le Q\rho(x,a) + \rho(Fa,a) \le Q\sigma + \rho(Fa,a) = \sigma,$$

то $\rho(Fx, a) \le \sigma$ и наше утверждение доказано. К отображению F, рассматриваемому только на псевдошаре $S(a,\sigma)$, применима теорема 2, из которой немедленно вытекают все утверждения теоремы 3. Отметим только, что метод последовательных приближений (2) сходится к x^* не только при $x_1 = a$, но и при любом x_0 из $S(a,\sigma)$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Люстерник Л. А.* Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Высшая школа, 1982. — 272 с.

2. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. — М. : Мир, 1969. — 448 с.

3. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. —396 с.

4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 576 с.

5. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : Издательство иностранной литературы, 1962. — 832 с.

6. *Красносельский М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 352 с.

7. *Перов А. И.* Обобщенный принцип сжимающих отображений / А. И. Перов // Вестник Воронежского государственного университета. — 2005. — № 1. — С. 196—207.