УДК 517.958

ГРАНИЧНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ПОЛНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ*

А. В. Кузнецов

Воронежский государственный университет

В данной работе рассматривается неоднородная начально-краевая задача и задача граничного оптимального управления, связанные с системой уравнений, описывающей движение вязкоупругой несжимаемой жидкости типа Джеффриса в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. Доказано глобальное существование слабого решения и слабого оптимального решения для произвольных достаточно гладких начальных данных.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: неоднородные начально-краевые задачи, граничное оптимальное управление, гидродинамика вязкоупругих жидкостей, модель Джеффриса.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача граничного оптимального управления, связанная с системой уравнений, описывающей модель вязкоупругой несжимаемой жидкости типа Джеффриса.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = \operatorname{Div} \sigma + f, \qquad (1)$$

$$\sigma + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) =$$

$$= 2\eta \left(\mathcal{E}(v) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) \right), \qquad (2)$$

$$\forall ((t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega)\ v(t,x) = u(t,x), \qquad (3)$$

$$\forall (x \in \Omega)\ v(0,x) = v_0(x),\ \sigma(0,x) = \sigma_0(x), \qquad (4)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \qquad (5)$$

$$\int_\Omega p(t,x)dx = 0. \qquad (6)$$

Здесь:
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^2, $n = 2,3$; $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$, $v(t,x) = (v^1(t,x), \dots, v^n(t,x))$ — поле скоростей, $p(t,x)$ — давление среды; $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформации, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i})$, $i,j = 1,\dots,n$; $\sigma = \left(\sigma_{ij}\right)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$ — девиатор тензора напряжений; $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ — времена ретардации и релаксации (некоторые физические константы); f — внешняя сила, действующая на жидкость; u — управляющий параметр.

Плотность жидкости предполагается постоянной и равной единице.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ

2.1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим через $M(n)$ пространство квадратных матриц порядка n, через $M_s(n) \subset M(n)$ пространство симметричных матриц порядка n.

Пусть A, $B \in M(n)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $D = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$. Введем обозначение $D = A : B$.

Пусть u — некоторая функция, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Обозначим $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$. Пусть X — банахово пространство. Сопряженное к нему пространство, т. е. пространство линейных ограниченных функционалов на X обозначим через X^*. Действие некоторого $v \in X^*$ на $\varphi \in X$ будем обозначать как $\langle v, \varphi \rangle_{X^*,X}$.

Пусть $i \in \mathbb{Z}$. Символы K_i, C_i, const, const_i, c, c_i зарезервированы для обозначения неотрицательных (или положительных, если это оговорено особо) констант. Символ I всегда означает тождественный оператор с областью определения, явной из контекста.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ —ограниченная область с границей $\partial\Omega = \Gamma$ класса C^∞. Введем определения некоторых пространств функций с обычными операциями сложения и умножения.

Назовем пространством финитных функций 1 множество

* Работа поддержана грантами РФФИ № 07-01-00137, № 08-01-00192.

$$C_0^\infty = \{f \in C^\infty(\overline{\Omega}, M_s(n)) : \operatorname{supp} f \subset \Omega\}. \quad (7)$$

Назовем пространством финитных функций 2 множество

$$D(\Omega)^n = \{f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \subset \Omega\}. \quad (8)$$

Назовем пространством соленоидальных функций множество

$$\mathcal{V} = \{f \in D(\Omega)^n : \operatorname{div} f = 0\}. \quad (9)$$

Обозначим $\|f\|_{L_p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p\, dx)^{1/p}$.

Назовем пространством $L_p(\Omega)$ множество функций

$$\{f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid \|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty\},$$

снабженное обычными операциями сложения и умножения на число.

Пусть $s > 0$, $p \geq 1$, $s \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Определим

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq s} \int_\Omega \left|D^\alpha f(x)\right|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $0 < s < 1$, $p \geq 1$. Определим

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|f\|^p_{L_p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $s > 1$, $p \geq 1$. Тогда $s = [s] + \sigma$, где $[s]$ — целая часть s. Введем норму $\|\cdot\|_{W_p^s(\Omega)}$ пространства Соболева $(W_p^s(\Omega))^n$ следующим образом:

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega)} = (\|f\|^p_{W_p^{[s]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha f\|^p_{W_p^\sigma(\Omega)})^{1/p}. \quad (10)$$

Пусть $s > 0$, $p \geq 1$. Назовем пространством Соболева $(W_p^s(\Omega))^n$ множество

$$\{f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid \|f\|_{W_p^s(\Omega)} < \infty\},$$

снабженное обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

Введем обозначение $(H^s(\Omega))^n = (W_2^s(\Omega))^n$.

Будем обозначать как $H_0^s(\Omega)$ замыкание $D(\Omega)$ по норме $H^s(\Omega)$. Введем обозначения:

$$\mathcal{H}^\alpha = H^\alpha(\Omega, M_s(n)), \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_p = L_p(\Omega, M_s(n)). \quad (12)$$

Назовем пространствами H, V множества:

$$H \text{ — замыкание } \mathcal{V} \text{ в } (L_2(\Omega))^n, \quad (13)$$

$$V \text{ — замыкание } \mathcal{V} \text{ в } (H^1(\Omega))^n. \quad (14)$$

Назовем пространствами $L_p(a, b; X)$, $0 < p \leq \infty$, где X — банахово пространство, множества

$$1 \leq p < \infty,\ L_p(a, b; X) =$$

$$= \left\{ f : [a, b] \to X \mid \|f\|_{L_p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p\, dt \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$L_\infty(a, b; X) = \{f : [a, b] \to X \mid \|f\|_{L_\infty(a,b;X)} =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X < \infty\}.$$

Обозначим проектор Лере как P:

$$P : (L_2(\Omega))^n \to H. \quad (15)$$

Пусть a, $b \in \mathbb{R}$, p_1, $p_2 \geq 1$, X_1, X_2 — банаховы пространства. Назовем пространством $W(a, b; p_1, p_2; X_1, X_2)$ множество

$$W(a, b; p_1, p_2; X_1, X_2) =$$

$$= \{u \in L_{p_1}(a, b; X_1), u' \in L_{p_2}(a, b; X_2)\}. \quad (16)$$

Введем обозначение $W_{p_1,p_2}(X_1, X_2) = W(0, T; p_1, p_2; X_1, X_2)$. Будем далее обозначать скалярное произведение в $(L_2(\Omega))^n$ или в $\mathcal{L}_2$ парой круглой скобок $(\cdot,\cdot)$.

Функционал J, заданный на выпуклом множестве $X_\delta \subset X$, называется выпуклым, если для него справедливо неравенство Иенсена

$$\forall (x_1, x_2 \in X_\delta, \alpha \in [0,1])$$

$$J(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha J(x_1) + (1-\alpha)J(x_2). \quad (17)$$

Функционал J называется полунепрерывным снизу в X_δ, если для любого $x \in X_\delta$ и любой последовательности $\{x_n\} \subset X_\delta$, $x_n \to x$ верно, что

$$J(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(x_n). \quad (18)$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим $\mu_1 = \eta(\lambda_2/\lambda_1)$, $\mu_2 = (\eta - \mu_1)/\lambda_1$. Используя разложения тензора напряжений σ на ньютоновскую и чисто упругую части $\sigma = \tau + 2\mu_1 E(v)$, сделаем в (1)—(6) замену и перейдем к задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu_1 \Delta v + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = \operatorname{Div} \tau + f, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial \tau}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda_1} \tau = 2\mu_2 \mathcal{E}(v), \quad (20)$$

$$v\,|_{t=0} = v_0, \quad (21)$$

$$\tau\,|_{t=0} = \tau_0, \quad (22)$$

$$v\,|_{\partial\Omega} = u, \quad (23)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (24)$$

Пусть $l_\Omega u$ — некоторое продолжение («поднятие») управления u внутрь области Ω, причем $\operatorname{div} l_\Omega u = 0$ (точное описание оператора продолжения будет дано в следующем разделе). Сделаем в (19)—(23) замену $w = v - l_\Omega u$, тогда уравнение (19) перепишется в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \mu_1 \Delta w + \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i} + $$
$$+\sum_{i=1}^n (l_\Omega u)^i \frac{\partial w}{\partial x_i} + \nabla p - \operatorname{Div} \tau =$$
$$= f - \frac{\partial (l_\Omega u)}{\partial t} + \mu_1 \Delta l_\Omega u - \sum_{i=1}^n (l_\Omega u)^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, \quad (25)$$

уравнение (20) как

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial \tau}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n (l_\Omega u)^i \frac{\partial \tau}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda_1}\tau =$$
$$= 2\mu_2 \mathcal{E}(w) + 2\mu_2 \mathcal{E}(l_\Omega u), \quad (26)$$

а условия (21), (23) как

$$w\,|_{t=0} = v_0 - u\,|_{t=0} = w_0, w\,|_{\partial\Omega} = 0. \quad (27)$$

Определение 3.1. *Слабым решением задачи (25)—(27) называется пара функций* (w, τ),

$$w \in L_2(0,T;V) \bigcap L_\infty(0,T;H) \bigcap$$
$$\bigcap C_w([0,T];H) \bigcap L_{8/3}(0,T;L_4(\Omega)^n),$$
$$\frac{dw}{dt} \in L_1(0,T;V^*),$$
$$\tau \in L_\infty(0,T;L_2) \bigcap C_w([0,T];L_2),$$
$$\frac{d\tau}{dt} \in L_2(0,T;\mathcal{H}^{-2}),$$

удовлетворяющая тождествам

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi) + \frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi) - \sum_{i=1}^n \left(w^i \tau, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) -$$
$$-\sum_{i=1}^n \left(l_\Omega u^i \tau, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + 2\mu_2 (w, Div\Phi) = 2\mu_2 (\mathcal{E}(l_\Omega u), \Phi) \quad (28)$$
$$\frac{d}{dt}(w,\varphi) - \sum_{i=1}^n \left(w^i w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n \left(w^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, \varphi \right) -$$
$$-\sum_{i=1}^n \left(l_\Omega u^i w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \mu_1 (\nabla w, \nabla \varphi) + (\tau, \nabla \varphi) =$$
$$= \langle f, \varphi \rangle_{V^*,V} - \left(\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t}, \varphi \right) - \mu_1 (\nabla l_\Omega u, \nabla \varphi) -$$
$$-\sum_{i=1}^n \left\langle (l_\Omega u)^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{V^*,V} \quad (29)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{V}$ *и* $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ *и условию (27) в смысле распределений на* $(0,T)$.

Далее будет доказано следующее утверждение (теорема 6.1).

Теорема. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^*)$, $w_0 \in H$. *Тогда существует слабое решение задачи (27), (28), (29) при*

$$u \in L_2(0,T;C^1(\partial\Omega)^n)$$

или

$$u \in C(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n),$$
$$\|u\|_{C(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)} \le \frac{\min(\frac{1}{4T}, \mu_1)}{C_{V \to L_4(\Omega)^n} C \mathbf{C}_2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;L_2(\partial\Omega)^n).$$

Определение 3.2. *Слабым решением задачи (1)—(6) называется пара функций* (v, σ),

$$v \in L_2(0,T;H^1(\Omega)^n) \bigcap C_w([0,T];L_2(\Omega)^n),$$
$$\frac{dv}{dt} \in L_1(0,T;V^*), \operatorname{div} v = 0, \quad (30)$$
$$\sigma \in L_2(0,T;\mathcal{L}_2) \bigcap C_w([0,T];\mathcal{H}^{-1}), \quad (31)$$

удовлетворяющая условию (4) и тождествам

$$\frac{d}{dt}(v,\varphi) + (\sigma, \nabla\varphi) - \sum_{i=1}^n \left(v^i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) =$$
$$= \langle f, \varphi \rangle_{L_2(0,T;V^*) \times L_2(0,T;V)}, \;\; v\,|_{\partial\Omega} = u, \quad (32)$$
$$(\sigma,\Phi) + \lambda_1 \frac{d}{dt}(\sigma,\Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left(v^i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) =$$
$$= -2\eta (v, \operatorname{Div}\Phi) -$$
$$-2\eta\lambda_2 \left(\frac{d}{dt}(v, \operatorname{Div}\Phi) + \sum_{i=1}^n \left(v^i \mathcal{E}(v), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right) \quad (33)$$

для всех $\varphi \in V$ *и* $\Phi \in C_0^\infty$ *в смысле распределений на* $(0,T)$.

Относительно исходной задачи (1)—(6) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $v_0 \in H, \sigma_0 \in \mathcal{H}^{-1}$, $f \in L_2(0,T;V^*)$, $\sigma_0 - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}(v_0) \in L_2$, u *— такое же, как и в предыдущей теореме. Тогда существует слабое решение задачи (1)—(6) в классе (30)—(31).*

Этот результат для однородной задачи ($u = 0$) был получен в работе [8].

В данной работе будет искаться решение задачи (27), (28), (29), минимизирующее функционал

$$J : L_2(0,T;H^1(\Omega)^n) \times L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n) \to \mathbb{R}, \quad (34)$$

причем J — выпуклый по совокупности переменных полунепрерывный снизу и ограниченный снизу функционал. Примером такого функционала (см. [14]) является функционал

$$J(v,u) = \int_0^T \Psi(v(t,\cdot), u(t,\cdot))dt, \quad (35)$$

где Ψ — выпуклый по совокупности переменных функционал на $H^1(\Omega)^n \times H^{1/2}(\partial\Omega)^n$, удовлетворяющий условию

$$\forall(R>0) \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)^n}+\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)^n}\le R} \Psi(v,u)<\infty. \quad (36)$$

Будет доказано следующее утверждение (теорема 7.1).

Теорема. *Пусть*

$$\|u\|_{L_2(0,T;C^1(\partial\Omega)^n)} \le M_1$$

или

$$\|u\|_{C(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)} \le M_2 < \frac{\min(\frac{1}{4T},\mu_1)}{C_{V\to L_4(\Omega)^n} C\mathbf{C}_2}$$

и, кроме того,

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))} \le M_3.$$

Тогда существует слабое решение (v,τ), u задачи (1)—(6), (34).

4. О ПРОДОЛЖЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ

Определение 4.1. *Будем говорить, что $\partial\Omega \in C^{k,\varepsilon}$, $k\in\mathbb{N}$, $\varepsilon\in[0,1]$, если для каждого $x_0\in\partial\Omega$ существует такое $\rho=\rho(x_0)$ и такой диффеоморфизм $\psi\in C^{k,\varepsilon}(\overline{B}_\rho(x_0),R^n)$, что $\psi(B_\rho(x_0)\cap\Omega)\subset \|u\|_{L_2(0,T;C^1(\partial\Omega)^n)}$ $M_{1+}^n\equiv\{x\in\mathbb{R}^n, x_n>0\}$, $\psi(B_\rho(x_0)\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbb{R}^n_+$.*

Пусть $x_j\in\partial\Omega$, $j=1,\ldots,N$ — такой набор точек, что шары $B_\rho(x_j)$ покрывают $\partial\Omega$. Фиксируем такой набор функций, что $\varphi_j(x)\in C_0^\infty(B_\rho(x_j))$,что $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\equiv 1$ на $\partial\Omega$. Любая функция u, определенная на $\partial\Omega$, может быть представлена в виде $u=\sum_{j=1}^N u_j(x)$, $u_j(x)=u(x)\varphi_j(x)$. Пусть $\partial\Omega\in C^{k,\varepsilon}$ и ψ_j — введенные в определении 4.1 диффеоморфизмы шаров $B_\rho(x_j)$. Пусть $\hat\psi$ — диффеоморфизм шара $B_{\rho'}(x_j)$, $\rho'\rho$, на область $\hat\psi_j(B_{\rho'}(x_j))\supset B_{2R}(0)$, $\hat\psi_j|_{B_\rho(x_j)}=\psi_j$. Пусть $y'=(y_1,\ldots,y_{n-1})$, $y=(y',y_n)$, $K\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\operatorname{supp}K\subset B_\delta(0)$, $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K(z')dz'=1$, η — гладкая финитная функция, $\eta(y_n)=0$ при $|y_n|\ge\delta$, $\eta(y_n)=1$, $|y_n|\le\delta/2$. Построим оператор

$$\Pi_0: C^{k,\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1})\to C^{k,\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad (37)$$

$$(\Pi_0 u)(y)=(\Pi_0 u)(y',y_n)= \\ =\eta(y_n)\int_{R^{n-1}} u(y'+z'y_n)K(z')dz'. \quad (38)$$

Определим операторы ($j=1,\ldots,N$)

$$\Pi_j: C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)\to C^{k,\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad (39)$$

$$\Pi_j(\varphi_j u)=(\Pi_0[(\varphi_j u)\circ\psi_j^{-1}])\circ\hat\psi_j, \quad (40)$$

$$\Pi: C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)\to C^{k,\varepsilon}_{loc}(\mathbb{R}^n),\ \Pi u=\sum_{j=1}^N \Pi_j(\varphi_j u). \quad (41)$$

Если $\partial\Omega\in C^{k,\varepsilon}$ и $k\ge 2$, то в достаточно малой окрестности $\partial\Omega$ однозначно определено ориентированное расстояние $d(x)$ от $x\in\mathbb{R}^n$ до $\partial\Omega$,

$$\forall(x\notin\overline{\Omega})d(x)=\operatorname{dist}(x),$$
$$\forall(x\in\Omega)d(x)=-\operatorname{dist}(x).$$

Известно ([3], с. 220), что $d\in C^{k,\varepsilon}(\Omega)$ в достаточно узкой окрестности $\partial\Omega$. В [2], с. 134, теорема 2, показано, что оператор Π — линейный непрерывный оператор продолжения с $\partial\Omega$ на Ω.

Рассмотрим задачу

$$\operatorname{div} v=0,\ v|_{\partial\Omega}=u, \quad (42)$$

где $u\in C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)^n$, $\int_{\partial\Omega} u\cdot\nu dS=0$, $\partial\Omega\in C^{k+1,\varepsilon}$, $\nu\in C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)^n$ — поле внешних нормалей к $\partial\Omega$. В работе [2], с. 15—16, доказано следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega\in C^{k+1,\varepsilon}$ с $k\in N$ и $\varepsilon\in[0,1]$. Тогда существует решение $v\in C^{k,\varepsilon}(\overline{\Omega})^n$ задачи (42), линейно зависящее от u и для всех $s=1,\ldots,k$ и $q\in(1,\infty)$ удовлетворяющее оценкам*

$$\|v\|_{C^{k,\varepsilon}(\Omega)^n}\le \mathbf{C}_k\|u\|_{C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)^n}, \quad (43)$$

$$\|v\|_{W_q^1(\Omega)^n}\le \mathbf{C}_q\|u\|_{W_q^{1-1/q}(\partial\Omega)^n}. \quad (44)$$

Решение задачи (42) из леммы (4.1) имеет вид

$$v^j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha(d)(\Pi\nu^i\Pi u^j-\Pi\nu^j\Pi u^i)), \quad (45)$$

где $\alpha\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\alpha(t)=0$ при $|t|\ge\delta$ и $\alpha(t)=t$ при $|t|\le\delta/2$ с достаточно малым δ, d — ориентированное расстояние от $x\in\mathbb{R}^n$ до $\partial\Omega$, Π — оператор (41).

Из леммы 4.1 следует, что существует линейный ограниченный оператор поднятия

$$\tilde{l}_\Omega: C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)^n\to\{v\in C^{k,\varepsilon}(\overline{\Omega})^n:\operatorname{div}v=0\}. \quad (46)$$

Этот оператор в силу оценки (44) продолжается по непрерывности на $H^{1/2}(\partial\Omega)^n$ с сохранением нормы до

$$l_\Omega: H^{1/2}(\partial\Omega)^n\to\{v\in H^1(\Omega)^n:\operatorname{div}v=0\}, \quad (47)$$

так как $C^1(\partial\Omega)^n\subset H^{1/2}(\partial\Omega)^n$ плотно (см., например, [6], теорема 1, с. 305) и так как $\operatorname{div}: H^1(\Omega)^n\to L_2(\Omega)^n$ — линейный ограниченный оператор, то для любого $u\in H^{1/2}(\partial\Omega)$ $\operatorname{div} l_\Omega u=0$.

Из оценок (43), (44) следует, что для $v \in L_2(0,T;C^{k,\varepsilon}(\Omega)^n)$ справедливы оценки

$$\|v\|^2_{L_2(0,T;C^{k,\varepsilon}(\Omega)^n)} \le \int_0^T \|v\|^2_{C^{k,\varepsilon}(\Omega)^n}(t)dt \le$$

$$\le C_s^2\int_0^T \|u\|^2_{C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)^n}(t)dt \le C_s^2\|u\|^2_{L_2(0,T;C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)^n)}, \quad (48)$$

$$\|v\|^2_{L_2(0,T;W_q^1(\Omega)^n)} \le \int_0^T \|v\|^2_{W_q^1(\Omega)^n}(t)dt \le$$

$$\le C_q^2\int_0^T \|u\|^2_{W_q^{1-1/q}(\partial\Omega)^n}(t)dt \le C_s^2\|u\|^2_{L_2(0,T;W_q^{1-1/q}(\partial\Omega)^n)}. \quad (49)$$

Лемма 4.2. *Существует линейный непрерывный оператор продолжения*

$$\hat{l}_\Omega : L_2(0,T;L_2(\partial\Omega)^n) \to L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n), \quad (50)$$

$$\forall(u \in H^{1/2}(\partial\Omega)^n, \varphi \in H_0^1(\Omega)^n)$$

$$\langle \hat{l}_\Omega u, \varphi\rangle_{V^*,V} = (l_\Omega u, \varphi), \quad (51)$$

$$\forall(u \in L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;L_2(\partial\Omega)^n))\forall(\varphi \in H_0^1(\Omega)^n)$$

$$\left\langle \frac{\partial l_\Omega u}{\partial t}, \varphi\right\rangle_{V^*,V} = \left\langle \hat{l}_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\right\rangle_{V^*,V}. \quad (52)$$

Доказательство. Отметим, что в силу интегрального неравенства Минковского при $\delta \le 1/2$ справедлива оценка

$$\|\Pi_0 u\|_{L_2(R^n)} = \left(\int_{R^n}\left|\eta(y_n)\int_{R^{n-1}}u(y'+z'y_n)K(z')dz'\right|^2 dy\right)^{1/2} \le$$

$$\le \int_{R^{n-1}}\left(\int_{R^n}|\eta(y_n)u(y'+z'y_n)K(z')|^2 dy\right)^{1/2}dz' =$$

$$= \int_{R^{n-1}}\left(\int_{-\delta}^{\delta}|\eta(y_n)|^2\int_{R^{n-1}}|u(y'+z'y_n)|^2 dy'dy_n\right)^{1/2}|K(z')|dz' \le$$

$$\le 2\delta\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}\int_{R^{n-1}}|K(z')|dz' \le \|u\|_{L_2(R^{n-1})}\|K\|_{L_1(R^{n-1})}. \quad (53)$$

Обозначим $Ru \in M(n)$, $R^{ij}u = \alpha(d)(\Pi\nu^i\Pi u^j - \Pi\nu^j\Pi u^i)$, $i,j = 1,\ldots,n$. Так как $\alpha(d) \in C^{k,\varepsilon}(\overline{\Omega})$ и $\Pi\nu \in C^{k,\varepsilon}(\overline{\Omega})^n$, то

$$\|Ru\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} = \left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n|\alpha(d)(\Pi\nu^i\Pi u^j - \Pi\nu^j\Pi u^i)|^2dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \|\alpha(d)\|_{C(\Omega)}\left(\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega|\Pi\nu^i\Pi u^j - \Pi\nu^j\Pi u^i|^2dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \|\alpha(d)\|_{C(\Omega)}\left(\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega|\Pi\nu^i\Pi u^j|^2dx\right)^{1/2} +$$

$$+\|\alpha(d)\|_{C(\Omega)}\left(\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega|\Pi\nu^j\Pi u^i|^2dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2\|\alpha(d)\|_{C(\Omega)}\|\Pi\nu\|_{C(\Omega)^n}\|\Pi u\|_{L_2(\Omega)^n} \le$$

$$\le 2K_8\|\alpha(d)\|_{C(\Omega)}\|\nu\|_{C^1(\partial\Omega)^n}\|u\|_{L_2(\partial\Omega)^n}. \quad (54)$$

Очевидно, $l_\Omega u = \mathrm{Div}\,Ru$. Для всех $\varphi \in H_0^1$ положим

$$\langle \tilde{l}_\Omega u, \varphi\rangle_{V^*,V} = \langle \mathrm{Div}\,Ru, \varphi\rangle_{V^*,V} = -(Ru, \nabla\varphi) \quad (55)$$

и в силу оценки (53) справедливо неравенство

$$\|\tilde{l}_\Omega u\|_{V^*} = \sup_{\varphi\in V,\varphi\ne0}\frac{|\langle\tilde{l}_\Omega u,\varphi\rangle_{V^*,V}|}{\|\varphi\|_V} =$$

$$= \sup_{\varphi\in V,\varphi\ne0}\frac{|(Ru,\nabla\varphi)|}{\|\varphi\|_V} \le \|Ru\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \le C_2\|u\|_{L_2(\partial\Omega)^n}. \quad (56)$$

В силу оценки (56) $\tilde{l}_\Omega$ продолжается по непрерывности на $L_2(\partial\Omega)^n$ до

$$\hat{l}_\Omega : L_2(\partial\Omega)^n \to H^{-1}(\Omega)^n, \quad (57)$$

так как $C^1(\partial\Omega)^n \subset L_2(\partial\Omega)^n$ плотно. Заметим, что в условиях теоремы $\frac{\partial l_\Omega u(t,\cdot)}{\partial t} = l_\Omega\frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial t}$, так как в силу леммы 1.1 главы III [7]

$$\left\langle\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t},\varphi\right\rangle_{V^*,V} = \frac{d}{dt}(l_\Omega u,\varphi) =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_\Omega \mathrm{Div}\,Ru\cdot\varphi dx = -\int_\Omega\frac{\partial Ru}{\partial t}:\nabla\varphi dx =$$

$$= -\int_\Omega R\frac{\partial u}{\partial t}:\nabla\varphi dx = \left\langle\hat{l}_\Omega\frac{\partial u}{\partial t},\varphi\right\rangle_{V^*,V} \quad (58)$$

в смысле распределений на $(0,T)$. □

В дальнейшем мы не будем различать l_Ω, $\hat{l}_\Omega$ и $\tilde{l}_\Omega$.

5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО СЛУЧАЯ

Прежде чем доказывать теорему 2.2.2, исследуем две вспомогательные задачи. Введем обозначение

$$\langle f_1,\varphi\rangle_{V^*,V} = (f,\varphi) - \frac{d}{dt}(l_\Omega u,\varphi) - (\nabla l_\Omega u,\nabla\varphi), \quad (59)$$

$$\|f_1\|_{V^*} = \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}}\frac{|(f,\varphi) - \frac{d}{dt}(l_\Omega u,\varphi) - (\nabla l_\Omega u,\nabla\varphi)|}{\|\varphi\|_V} \le$$

$$\le \|f\|_{V^*} + \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}}\frac{|\frac{d}{dt}(l_\Omega u,\varphi)|}{\|\varphi\|_V} +$$

$$+ \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}}\frac{|(\nabla l_\Omega u,\nabla\varphi)|}{\|\varphi\|_V}\|f\|_{V^*} +$$

$$+\|\partial_t l_\Omega u\|_{V^*} + \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla l_\Omega u\|_{L_2}\|\nabla\varphi\|_{L_2}}{\|\varphi\|_V} \le$$

$$\le \|f\|_{V^*} + \|\partial_t l_\Omega u\|_{V^*} + \|\nabla l_\Omega u\|_{\mathcal{L}_2} \le$$

$$\le \|f\|_{V^*} + \|\partial_t l_\Omega u\|_{V^*} + \|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}. \quad (60)$$

Пусть h, $g \in H^1(\Omega)^n$. Тогда справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} g^i \frac{\partial h}{\partial x_i}\right\|_{V^*} = \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \left|\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega g^i \left(\frac{\partial h}{\partial x_i},\varphi\right)_{\mathbb{R}^n} dx\right| \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |g^i| \left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\right| |\varphi|\,dx \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \int_\Omega |g||\nabla h||\varphi|\,dx \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \left(\int_\Omega |\nabla h|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^2|\varphi|^2\,dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \left(\int_\Omega |\nabla h|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |g|^4\,dx\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |\varphi|^4\,dx\right)^{1/4} =$$

$$= \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \|\nabla h\|_{L_2} \|g\|_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_{L_4(\Omega)^n} \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} C_{V\to L_4(\Omega)^n} \|h\|_{H^1(\Omega)^n} \|g\|_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_V \le$$

$$\le C_{V\to L_4(\Omega)^n} \|h\|_{H^1(\Omega)^n} \|g\|_{L_4(\Omega)^n} \le$$

$$\le C^2_{V\to L_4(\Omega)^n} \|h\|_{H^1(\Omega)^n} \|g\|_{H^1(\Omega)^n}. \tag{61}$$

Пусть $h \in C^1(\Omega)^n$, $g \in L_2(\Omega)^n$, тогда справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} g^i \frac{\partial h}{\partial x_i}\right\|_{V^*} = \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \left|\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega g^i \left(\frac{\partial h}{\partial x_i},\varphi\right)_{\mathbb{R}^n} dx\right| \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |g^i| \left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\right| |\varphi|\,dx \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \int_\Omega |g||\nabla h||\varphi|\,dx \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \|h\|_{C^1(\Omega)^n} \int_\Omega |g||\varphi|\,dx \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V\setminus\{0\}} \|\varphi\|_V^{-1} \|h\|_{C^1(\Omega)^n} \|g\|_{L_2(\Omega)^n} \|\varphi\|_H \le$$

$$\le \|h\|_{C^1(\Omega)^n} \|g\|_{L_2(\Omega)^n}. \tag{62}$$

Введем обозначение

$$\langle f_2,\varphi\rangle_{V^*,V} = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle (l_\Omega u)^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},\varphi\right\rangle_{V^*,V}. \tag{63}$$

Если $l_\Omega u \in H^1(\Omega)^n$, то в силу оценки (61) справедлива оценка

$$\|f_2\|_{V^*} \le C^2_{V\to L_4(\Omega)^n} \|l_\Omega u\|^2_{H^1(\Omega)^n}. \tag{64}$$

Если $l_\Omega u \in C^1(\Omega)^n$, то в силу оценки (62) справедлива оценка

$$\|f_2\|_{V*} \le \|l_\Omega u\|_{C^1(\Omega)^n} \|l_\Omega u\|_{L_2(\Omega)^n}. \tag{65}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi) + \frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi) - \xi\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w^i\tau}{1+\delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|w|^2\right)},\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) -$$

$$-\xi\sum_{i=1}^{n}\left(l_\Omega u^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) + 2\mu_2\xi(w,\operatorname{Div}\Phi) + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi) =$$
$$= 2\mu_2(\mathcal{E}(l_\Omega u),\Phi), \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt}(w,\varphi) + \mu_1(\nabla w,\nabla\varphi) -$$

$$-\xi\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{w^i w}{1+\delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|w|^2\right)},\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) -$$

$$-\xi\sum_{i=1}^{n}\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},\varphi\right) - \xi\sum_{i=1}^{n}\left(l_\Omega u^i w,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) +$$

$$+\xi(\tau,\nabla\varphi) = \langle f_1,\varphi\rangle_{V^*,V} + \langle f_2,\varphi\rangle_{V^*,V} \tag{67}$$

для всех $\varphi \in V, \Phi \in \mathcal{H}_0^1$ при п.в. $t \in (0,T)$;

$$w\,|_{t=0} = w_0, \tau\,|_{t=0} = \tau_0. \tag{68}$$

Числа $\delta > 0, 0 \le \xi \le 1, 0 < \varepsilon \le 1/2$ суть параметры.

Введем следующие пространства:

$$W = \{w \in L_2(0,T;V), \frac{\partial w}{\partial t} \in L_2(0,T;V^*)\},$$

$$W_M = \{\tau \in L_2(0,T;\mathcal{H}_0^1), \frac{\partial \tau}{\partial t} \in L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})\}$$

с естественными нормами пересечения.

Из теоремы 1.2 главы III [7] следует, что W и W_M вложены соответственно в $C([0,T];H)$ и $C([0,T];\mathcal{L}_2)$. При ограниченной Ω (см. [7], теоремы 2.1 главы III и 1.1 главы II) вложения W и W_M соответственно в $L_2(0,T;H)$ и $L_2(0,T;\mathcal{L}_2)$ компактны.

Лемма 5.1. *Пусть* $w_0 \in H, \tau_0 \in \mathcal{L}_2$, $f \in L_2(0,T;V^*)$, *пара* $(w \in W, \tau \in W_M)$ *является решением задачи (66)—(68).*

Пусть $l_\Omega u \in C([0,T];H^1(\Omega)^n)$, $\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)$, $\|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^{1/2}(\partial\Omega)^n)} < \frac{\min(\frac{1}{4T},\mu_1)}{C_{V\to L_4(\Omega)^n}C}$. *Тогда имеет место оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\|w\|_H^2(t) + \max_{t\in[0,T]}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2(t) +$$

$$+\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} + \varepsilon\int_0^T \|\tau\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)} \le$$

$$\le K_0\left(\begin{matrix}\|w_0\|_H, \|\tau_0\|_{\mathcal{L}_2}, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \\ \|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)}, \left\|\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)}\end{matrix}\right), \tag{69}$$

где K_0 *не зависит от* Ω, ε, δ, ξ.

Пусть $u \in L_2(0,T;C^1(\partial\Omega)^n)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\|w\|_H^2(t) + \max_{t\in[0,T]}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2(t) +$$

$$+\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} + \varepsilon\int_0^T \|\tau\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)} \le$$

$$\leq K_9 \begin{pmatrix} \|w_0\|_H, \|\tau_0\|_{\mathcal{L}_2}, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \\ \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)}, \left\|\dfrac{\partial l_\Omega u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \end{pmatrix}, \quad (70)$$

где K_9 *не зависит от* Ω, ε, δ, ξ.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \left(w^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, w \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega w^i \left(\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, w \right)_{\mathbb{R}^n} dxdt \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n w^i \left| \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i} \right| |w| \, dxdt \int_0^T \int_\Omega |\nabla l_\Omega u| |w|^2 \, dxdt. \quad (71)$$

Если $l_\Omega u \in C([0,T]; H^1(\Omega)^n)$, то из неравенства (71) следует, что

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \left(w^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, w \right) dt \leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla l_\Omega u| |w|^2 \, dxdt \leq$$

$$\leq \int_0^T \|\nabla l_\Omega u\|_{L_2} \|w\|^2_{L_4(\Omega)^n} \, dt \leq$$

$$\leq C_{V \to L_4(\Omega)^n} \int_0^T \|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n} \|w\|_V^2 \, dt \leq$$

$$\leq C_{V \to L_4(\Omega)^n} \|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)} \|w\|^2_{L_2(0,T;V)}. \quad (72)$$

Если $l_\Omega u \in L_2(0,T; C^1(\Omega)^n)$, то из неравенства (71) следует, что

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \left(w^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, w \right) dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \|\nabla l_\Omega u\|_{C(\Omega)^n} \int_\Omega |w|^2 \, dxdt =$$

$$= \int_0^T \|\nabla l_\Omega u\|_{C(\Omega)^{n^2}} \|w\|_H^2 \, dt. \quad (73)$$

Покажем, что при п.в. $t \in (0,T)$ имеют место следующие тождества:

$$\sum_{i=1}^n \left(l_\Omega u^i w, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega l_\Omega u^i \left(w, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega l_\Omega u^i \frac{\partial |w|^2}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_\Omega |w|^2 \operatorname{div} l_\Omega u dx = 0. \quad (74)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{w^i w}{1 + \delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right)}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\mu_2} \left(\frac{w^i \tau}{1 + \delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right)}, \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right) \right] = 0. \quad (75)$$

Для доказательства тождества (75) преобразуем его левую часть:

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{w^i w}{1 + \delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right)}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\mu_2} \left(\frac{w^i \tau}{1 + \delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right)}, \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{w^i}{1 + \delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right)} \times$$

$$\times \left[\left(w, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2\mu_2} \left(\tau, \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right)_{\mathbb{R}_S^{n \times n}} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{w^i}{1 + \delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|w|^2 + \frac{1}{2\mu_2} |\tau|^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\delta} \sum_{i=1}^n \int_\Omega w^i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \left(1 + \delta \left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right) \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2\delta} \int_\Omega \operatorname{div} w \ln \left(1 + \delta \left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2} + |w|^2 \right) \right) dx = 0. \quad (76)$$

Из леммы 1.1 главы III [7] следуют равенства

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{V^*,V} = \frac{d}{dt}(u, \varphi), \left\langle \frac{\partial \tau}{\partial t}, \Phi \right\rangle_{\mathcal{H}^{-1},\mathcal{H}_0^1} = \frac{d}{dt}(\tau, \Phi). \quad (77)$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(u, \varphi)\Big|_{\varphi = u(t,\cdot)} = \left\langle \frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial t}, u(t,\cdot) \right\rangle_{V^*,V} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(u(t,\cdot), u(t,\cdot)). \quad (78)$$

Аналогично

$$\frac{d}{dt}(\tau, \Phi)\,|_{\Phi = \tau(t)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\tau, \tau). \quad (79)$$

Положим в (66) $\Phi = \dfrac{\tau(t)}{2\mu_2}$, а в (67) $\varphi = w(t)$ при почти всех $t \in [0,T]$, и сложим результаты. Получим с учетом (75) и (78), (79):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w,w)+\frac{1}{4\mu_2}\frac{d}{dt}(\tau,\tau)+\mu_1(\nabla w,\nabla w)+$$
$$+\frac{1}{2\lambda_1\mu_2}(\tau,\tau)+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}(\nabla\tau,\nabla\tau)=$$
$$=\langle f_1,w\rangle_{V^*,V}+\langle f_2,w\rangle_{V^*,V}-$$
$$-\xi\sum_{i=1}^{n}\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},w\right)+2\mu_2\xi(\mathcal{E}(l_\Omega u),\tau)\le$$
$$\le\|f_1\|_{V^*}\|w\|_V+\|f_2\|_{V^*}\|w\|_V+$$
$$+2\mu_2\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}\|\tau\|_{L_2}+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},w\right)\right|.\quad(80)$$

Проинтегрируем это равенство от 0 до t:

$$\frac{1}{2}\|w\|_H^2(t)+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2(t)+\int_0^t\frac{1-\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2\,ds+$$
$$+\int_0^t\frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{H}^1}^2\,ds+\int_0^t\mu_1(\|w\|_V^2-\|w\|_H^2)ds\le$$
$$\le\frac{1}{2}\|w_0\|^2+\frac{1}{4\mu_2}\|\tau_0\|^2+\int_0^t\|f_1\|_{V^*}\|w\|_V\,ds+$$
$$+\int_0^t\|f_2\|_{V^*}\|w\|_V\,ds+2\mu_2\int_0^t\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\,ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\left|\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},w\right)\right|ds.\quad(81)$$

В силу того, что

$$\max_{t\in[0,T]}g(t)+\max_{t\in[0,T]}h(t)\le2\max_{t\in[0,T]}(g(t)+h(t)),$$

из неравенства (81) следует неравенство

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{2}\|w\|_H^2(t)+\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2(t)+$$
$$+\int_0^T\frac{1-\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2\,dt+\int_0^T\frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{H}^1}^2\,dt+$$
$$+\int_0^T\mu_1(\|w\|_V^2-\|w\|_H^2)dt\le2\|w_0\|^2+\frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2+$$
$$+4\int_0^T\|f_1\|_{V^*}\|w\|_V\,dt+4\int_0^T\|f_2\|_{V^*}\|w\|_V\,dt+$$
$$+8\mu_2\int_0^T\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}\sqrt{16\lambda_1\mu_2^2}\,\frac{\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}}{\sqrt{16\lambda_1\mu_2^2}}\,dt+$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left|\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},w\right)\right|dt\le2\|w_0\|^2+\frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2+$$
$$+4\int_0^T\|f_1\|_{V^*}\|w\|_V\,dt+4\int_0^T\|f_2\|_{V^*}\|w\|_V\,dt+$$
$$+128\lambda_1\mu_2^3\int_0^T\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}^2\,dt+$$
$$+\int_0^T\frac{\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2}{4\lambda_1\mu_2}\,dt+4\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left|\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},w\right)\right|dt.\quad(82)$$

Отметим неравенство

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4}\|w\|_H^2(t)+\int_0^T\mu_1(\|w\|_V^2\,dt-\|w\|_H^2)\ge$$
$$\ge\gamma\int_0^T\|w\|_V^2\,dt,\quad(83)$$

где $\gamma=\min\left(\frac{1}{4T},\mu_1\right)$.

Для его доказательства достаточно сложить неравенства

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4}\|w\|_H^2(t)\ge\frac{1}{4T}\int_0^T\|w\|_H^2\,dt\ge\gamma\int_0^T\|w\|_H^2\,dt,\quad(84)$$
$$\int_0^T\mu_1(\|w\|_V^2-\|w\|_H^2)dt\ge\gamma\int_0^T(\|w\|_V^2-\|w\|_H^2)dt.\quad(85)$$

Имеем из (82) и (83):

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4}\|w\|_H^2(t)+\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2(t)+$$
$$+\int_0^T\frac{1-2\varepsilon}{4\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2\,dt+\int_0^T\frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_1^2\,dt+$$
$$+\gamma\int_0^T\|w\|_V^2\,dt\le2\|w_0\|^2+\frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2+$$
$$+4\int_0^T\|f_1\|_{V^*}\|w\|_V\,dt+4\int_0^T\|f_2\|_{V^*}\|w\|_V\,dt+$$
$$+128\lambda_1\mu_2^3\int_0^T\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}^2\,dt+4\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},w\right)dt\le$$
$$\le2\|w_0\|^2+\frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2+$$
$$+4(\|f_1\|_{L_2(0,T;V^*)}+\|f_2\|_{L_2(0,T;V^*)})(\int_0^T\|w\|_V\,dt)^{1/2}+$$
$$+128\lambda_1\mu_2^3\int_0^T\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}^2\,dt+4\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\left|\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},w\right)\right|dt.\quad(86)$$

Если $l_\Omega u\in C([0,T];H^1(\Omega)^n)$, то из неравенств (72) и (86) следует, что

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4}\|w\|_H^2(t)+\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2(t)+$$
$$+\int_0^T\frac{1-2\varepsilon}{4\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}^2\,dt+\int_0^T\frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|_1^2\,dt+$$

$$+\gamma\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} \le 2\|w_0\|^2 + \frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2 +$$
$$+4(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|\partial_t l_\Omega u\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} +$$
$$+C^2_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|^2_{L_4(0,T;H^1(\Omega)^n)})\|w\|_{L_2(0,T;V)} +$$
$$+128\lambda_1\mu_2^3\int_0^T \|l_\Omega u\|^2_{H^1(\Omega)^n}\,dt +$$
$$+4C_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)}\|w\|^2_{L_2(0,T;V)}. \qquad (87)$$

Пусть $4C_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)} < \gamma$, тогда из (87) следует, что

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4}\|w\|^2_H(t) + \max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}(t) +$$
$$+\int_0^T \frac{1-2\varepsilon}{4\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}\,dt + \int_0^T \frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_1\,dt +$$
$$+(\gamma - 4C_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)})\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} \le$$
$$\le 2\|w_0\|^2 + \frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2 + 4(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} +$$
$$+\|\partial_t l_\Omega u\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} +$$
$$+C^2_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|^2_{L_4(0,T;V)})\|w\|_{L_2(0,T;V)} +$$
$$+128\lambda_1\mu_2^2\int_0^T \|l_\Omega u\|^2_{H^1(\Omega)^n}\,dt. \qquad (88)$$

Отсюда следует, что $(\int_0^T \|w\|^2_V\,dt)^{\frac{1}{2}} \le y_2$, где y_2 — больший корень квадратного уравнения

$$(\gamma - 4C_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)})y^2 =$$
$$= 2\|w_0\|^2 + \frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2 + 128\lambda_1\mu_2^3\int_0^T \|l_\Omega u\|^2_{H^1(\Omega)^n}\,dt +$$
$$+4(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|\partial_t l_\Omega u\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} +$$
$$+C^2_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|^2_{L_4(0,T;H^1(\Omega)^n)})y. \qquad (89)$$

Тогда из (83) и (88) следует:

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4}\|w\|^2_H(t) + \max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}(t) +$$
$$+\int_0^T \frac{1-2\varepsilon}{4\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}\,dt + \int_0^T \frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_1\,dt +$$
$$+(\gamma - 4C_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)})\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} \le$$
$$\le 2\|w_0\|^2_H + \frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2} + 4(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} +$$
$$+\|\partial_t l_\Omega u\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} +$$
$$+C^2_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|^2_{L_4(0,T;H^1(\Omega)^n)})y_2 + 128\lambda_1\mu_2^2\int_0^T \|l_\Omega u\|^2_{H^1(\Omega)^n}\,dt, \quad (90)$$

что влечет утверждение леммы.

Если $l_\Omega u \in L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)$, то из неравенств (73) и (86) следует, что

$$\frac{1}{4}\|w\|^2_H(t) + \max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}(t) +$$
$$+\int_0^T \frac{1-2\varepsilon}{4\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}\,dt + \int_0^T \frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_1\,dt +$$
$$+\gamma\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} \le 2\|w_0\|^2_H + \frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2} +$$
$$+\frac{4}{\gamma}(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|\partial_t l_\Omega u\|_{L_2(0,T;V^*)} +$$
$$+\|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} + \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)}\|l_\Omega u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^n)})^2 +$$
$$+\frac{\gamma}{2}\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} + 128\lambda_1\mu_2^2\|l_\Omega u\|^2_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} +$$
$$+\int_0^T 16\|l_\Omega u\|_{C^1(\Omega)^n}\frac{1}{4}\|w\|^2_H\,dt. \qquad (91)$$

После приведения подобных слагаемых в предыдущем неравенстве получим, что

$$\frac{1}{4}\|w\|^2_H(t) + \max_{t\in[0,T]}\frac{1}{4\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}(t) +$$
$$+\int_0^T \frac{1-2\varepsilon}{4\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_{\mathcal{L}_2}\,dt + \int_0^T \frac{\varepsilon}{2\lambda_1\mu_2}\|\tau\|^2_1\,dt +$$
$$+\frac{\gamma}{2}\|w\|^2_{L_2(0,T;V)} \le 2\|w_0\|^2_H + \frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2} +$$
$$+\frac{4}{\gamma}(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|\partial_t l_\Omega u\|_{L_2(0,T;V^*)} +$$
$$+\|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} + \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)}\|l_\Omega u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^n)})^2 +$$
$$+128\lambda_1\mu_2^2\|l_\Omega u\|^2_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} + \int_0^T 16\|l_\Omega u\|_{C^1(\Omega)^n}\frac{1}{4}\|w\|^2_H\,dt. \quad (92)$$

Из неравенства (92) в силу леммы Гроноулла следует, что

$$\frac{1}{4}\|w\|^2_H(t) \le (2\|w_0\|^2_H + \frac{1}{\mu_2}\|\tau_0\|^2_{\mathcal{L}_2} +$$
$$+\frac{4}{\gamma}(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|\partial_t l_\Omega u\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} +$$
$$+\|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)}\|l_\Omega u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^n)})^2 +$$
$$+128\lambda_1\mu_2^2\|l_\Omega u\|^2_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)})\exp\int_0^T 16\|l_\Omega u\|_{C^1(\Omega)^n}\,dt. \quad (93)$$

Из этого неравенства следует оценка леммы. □

Теорема 5.1. *Пусть* Ω *ограничена и* w_0, τ_0, f *удовлетворяют условиям леммы 5.1. Тогда задача (66)—(68) имеет решение* $w \in W, \tau \in W_M$.

Доказательство. Введем вспомогательные операторы по следующим формулам (в этих формулах $\varphi \in V$ и $\Phi \in \mathcal{H}^1_0$):

$$N_1 : W_M \to L_2(0,T;V^*),\ \langle N_1(\tau),\varphi\rangle_{V^*,V} = (\tau,\nabla\varphi)$$

$$N_2 : W \to L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n),$$

$$\langle N_2(w),\Phi\rangle_{V^*,V} = 2\mu_2(w,\operatorname{Div}\Phi)$$

$$K_\delta : W\times W_M \to L_2(0,T;V^*),$$

$$\langle K_\delta(w,\tau),\varphi\rangle_{V^*,V} = -\sum_{i=1}^n\left(\frac{w^i w}{1+\delta\left(|w|^2+\dfrac{|\tau|^2}{2\mu_2}\right)},\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

$$K_u : W\times W_M \to L_2(0,T;V^*),$$

$$\langle K_u(w,\tau),\varphi\rangle_{V^*,V} = \sum_{i=1}^n(w^i\tfrac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},\varphi)-\sum_{i=1}^n(l_\Omega u^i w,\tfrac{\partial\varphi}{\partial x_i})$$

$$K_\delta : W\times W_M \to L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1}),$$

$$\langle K_\delta(w,\tau),\Phi\rangle_{\mathcal{H}^{-1},\mathcal{H}_0^1} = -\sum_{i=1}^n\left(\frac{w^i \tau}{1+\delta\left(|w|^2+\dfrac{|\tau|^2}{2\mu_2}\right)},\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)$$

$$K_u : W_M \to L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1}),$$

$$\langle K_u(\tau),\Phi\rangle_{\mathcal{H}^{-1},\mathcal{H}_0^1} = -\sum_{i=1}^n(l_\Omega u^i\tau,\tfrac{\partial\Phi}{\partial x_i})$$

$$A : W \to L_2(0,T;V^*),$$

$$\langle Aw,\varphi\rangle_{V^*,V} = \mu_1(\nabla w,\nabla\varphi)$$

$$A_\varepsilon : W_M \to L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1}),$$

$$\langle A_\varepsilon\tau,\Phi\rangle_{\mathcal{H}^{-1},\mathcal{H}_0^1} = \varepsilon(\nabla\tau,\nabla\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi)$$

$$\tilde A : W\times W_M \to L_2(0,T;V^*)\times L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})\times H\times\mathcal{L}_2,$$

$$\tilde A(w,\tau) = \left(\frac{\partial w}{\partial t}+Aw,\frac{\partial\tau}{\partial t}+A_\varepsilon(\tau),w\,|_{t=0},\tau\,|_{t=0}\right)$$

$$Q : W\times W_M \to L_2(0,T;V^*)\times L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})\times\mathcal{H}\times\mathcal{L}_2$$

$$Q(w,\tau) = (K_\delta(w,\tau)+K_u(w,\tau)+$$
$$+N_1(\tau),\tilde K_\delta(w,\tau)+\tilde K_u(\tau)+N_2(w),0,0)$$

Тогда задача (66)—(68) эквивалентна операторному уравнению

$$\tilde A(w,\tau)+\xi Q(w,\tau) = (f_1+f_2,2\mu_2\mathcal{E}(l_\Omega u),w_0,\tau_0). \quad (94)$$

Оператор $\tilde A$ обратим по теореме 1.1. главы VI, [11]. Далее, так как вложения W в $L_2(0,T;H), W_M$ в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ компактны, операторы N_1, N_2 вполне непрерывны. Так же как теорема 2.2 в [1] показывается, что K_δ и $\tilde K_\delta$ вполне непрерывны. Значит, оператор Q также вполне непрерывен.

Перепишем уравнение (94) в виде

$$(w,\tau)-\xi\tilde A^{-1}Q(u,\tau) =$$
$$= \tilde A^{-1}(f_1+f_2,2\mu_2\mathcal{E}(l_\Omega u),w_0,\tau_0). \quad (95)$$

По лемме 5.1 уравнение (95) не имеет решений на границе достаточно большого шара B в $W\times W_M$, не зависящего от ξ,δ,ε. Без ограничения общности $a_0 = \tilde A^{-1}(f_1+f_2,2\mu_2\mathcal{E}(l_\Omega u),w_0,\tau_0)$ лежит в этом шаре. Тогда определена

$$\deg_{LS}(I-\xi\tilde A^{-1}Q,B,a_0)$$

— степень Лере—Шаудера отображения $I-\xi\tilde A^{-1}Q$ на шаре B относительно точки a_0. По свойству гомотопической инвариантности степени

$$\deg_{LS}(I-\xi\tilde A^{-1}Q,B,a_0) = \deg_{LS}(I,B,a_0) = 1.$$

Следовательно, уравнение (95), а значит, и задача (66)—(68), имеет решение в B при каждом ξ. □

Нам понадобится следующая оценка на производные по времени решений задачи (66)—(68).

Лемма 5.2. *В условиях предыдущей теоремы имеют место оценки:*

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L_1(0,T;V^*)} \le K_1(\|w_0\|_H,\|\tau_0\|_{\mathcal{L}_2},\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}), \quad (96)$$

$$\left\|\frac{\partial\tau}{\partial t}\right\|_{L_1(0,T;\mathcal{H}^{-1})} \le K_2(\|w_0\|_H,\|\tau_0\|_{\mathcal{L}_2},\|f\|_{L_2(0,T;V^*)},\varepsilon), \quad (97)$$

причем K_1, K_2 не зависят от Ω,δ,ξ, а K_1 не зависит и от ε.

Доказательство. Имеем из (66)

$$\begin{aligned}\int_0^T\left|\frac{d}{dt}(w,\varphi)\right|dt \le \int_0^T&\left|\xi\sum_{i=1}^n\left(\frac{w^i w}{1+\delta\left(\dfrac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|w|^2\right)},\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right|+\\ &+\left|\xi\sum_{i=1}^n\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},\varphi\right)\right|+\left|\xi\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i w,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right|+\\ &+|\mu_1(\nabla w,\nabla\varphi)|+|\xi(\tau,\nabla\varphi)|+\\ &+\left|\langle f_1,\varphi\rangle_{V^*,V}\right|+\left|\langle f_2,\varphi\rangle_{V^*,V}\right|dt.\end{aligned} \quad (98)$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая вложение $V\subset L_4(\Omega)^n$ при $n=2,3$ и неравенство $\frac{\xi}{1+\delta(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|u|^2)}\le 1$, получим, что правая часть не превосходит

$$\begin{aligned}&\|\varphi\|_V\int_0^T(\|w\|^2_{L_4(\Omega)^n}(t)+\mu_1\|w\|_V(t)+\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}(t)+\\ &+C^2_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}\|w\|_V+C^2_{V\to L_4(\Omega)^n}\|l_\Omega u\|_{H^1(\Omega)^n}\|w\|_V+\\ &+\|f_1\|_{V^*}(t)+\|f_2\|_{V^*}(t))dt\le C\|\varphi\|_V(1+\|w\|^2_{L_2(0,T;V)}+\\ &+\|\tau\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)}+\|f\|_{L_2(0,T;V^*)})K_1(\|w_0\|_V,\|\tau_0\|,\|f\|_{L_2(0,T;V^*)})\|\varphi\|_V. \quad (99)\end{aligned}$$

Эти оценки с учетом леммы 5.1 дают оценку (97). Аналогично из (67) получаем оценку (97):

$$\int_0^T\left|\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)\right|dt \le \int_0^T \frac{1}{\lambda_1}|(\tau,\Phi)|dt +$$
$$+\int_0^T\left|\xi\sum_{i=1}^n\left(\frac{w^i\tau}{1+\delta\left(\frac{|\tau|^2}{2\mu_2}+|w|^2\right)},\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\right|dt +$$
$$+\int_0^T\xi\left|\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\right|dt+\int_0^T 2\mu_2\xi|(w,\operatorname{Div}\Phi)|dt +$$
$$+\int_0^T\frac{\varepsilon}{\lambda_1}|(\nabla\tau,\nabla\Phi)|dt+\int_0^T 2\mu_2|(\mathcal{E}(l_\Omega u),\Phi)|dt \le$$
$$\le\int_0^T(\|\tau\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2}+\|w\|_{L_4(\Omega)^n}\|\tau\|_{\mathcal{L}_4}\|\Phi\|_{H^1}+$$
$$+\|l_\Omega u\|_{L_4(\Omega)^n}\|\tau\|_{L_4}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}+2\mu_2\|w\|_{\mathcal{L}_2}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|\tau\|_{\mathcal{H}^1}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}+2\mu_2\|l_\Omega u\|_{\mathcal{H}^1}\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1})dt\le$$
$$\le\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}(\|\tau\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)}+C_1\|w\|_{L_2(0,T;V)}\|\tau\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)}+$$
$$+\|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)}\|\tau\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)}+2\mu_2\|w\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|\tau\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)}+2\mu_2\|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)})\le$$
$$\le K_2(\|w_0\|_H,\|\tau_0\|_{\mathcal{L}_2},\|f\|_{L_2(0,T;V^*)},\varepsilon)\|\Phi\|_{\mathcal{H}^1}. \quad (100)$$

□

Рассмотрим теперь еще одну вспомогательную систему

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi)+\frac{1}{\lambda_1}(\tau,\Phi)-\sum_{i=1}^n\left(w^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)-$$
$$-\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i\tau,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)+2\mu_2(w,\operatorname{Div}\Phi)+$$
$$+\frac{\varepsilon}{\lambda_1}(\nabla\tau,\nabla\Phi)=2\mu_2(\mathcal{E}(l_\Omega u),\Phi), \quad (101)$$

$$\frac{d}{dt}(w,\varphi)+\mu_1(\nabla w,\nabla\varphi)-\sum_{i=0}^n\left(w^iw,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^n\left(w^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},\varphi\right)-\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^iw,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+$$
$$+(\tau,\nabla\varphi)=\langle f_1,\varphi\rangle_{V^*,V}+\langle f_2,\varphi\rangle_{V^*,V} \quad (102)$$

для всех $\varphi\in V,\Phi\in\mathcal{H}_0^1$ *при п.в.* $t\in(0,T)$; $0<\varepsilon\le 1/2$.

Лемма 5.3. *Пусть* $u_m\rightharpoonup u_*$ *слабо в* $L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)$, $\frac{\partial u_m}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial u_*}{\partial t}$ *слабо в* $L_2(0,T;L_2(\partial\Omega)^n)$, $w_m\rightharpoonup w_*$ *слабо в* $L_2(0,T;V)$, $\frac{\partial w_n}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial w_*}{\partial t}$ *слабо в* $L_1(0,T;V^*)$, $\tau_m\rightharpoonup\tau_*$ *слабо в* $L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$, $\Phi\in\mathcal{C}_0^\infty$, $\varphi\in\mathcal{V}$ *— произвольные фиксированные функции. Тогда существуют подпоследовательности* $\{u_l\}_{l=1}^\infty\subset\{u_m\}_{m=1}^\infty$, $\{w_l\}_{l=1}^\infty\subset\{w_m\}_{m=1}^\infty$, $\{\tau_l\}_{l=1}^\infty\subset\subset\{\tau_m\}_{m=1}^\infty$, $l=m_l$, *такие что*

$$\int_0^T(\mathcal{E}(l_\Omega u_l),\psi\Phi)dt\to\int_0^T(\mathcal{E}(l_\Omega u_*),\psi\Phi)dt, \quad (103)$$

$$\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u_l^i\tau_l,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\to\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u_*^i\tau_*,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right), \quad (104)$$

$$\sum_{i=1}^n\left(w_l^i\frac{\partial l_\Omega u_l}{\partial x_i},\varphi\right)\to\sum_{i=1}^n\left(w_*^i\frac{\partial l_\Omega u_*}{\partial x_i},\varphi\right), \quad (105)$$

$$\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u_l^iw_l,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\to\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u_*^iw_*,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right), \quad (106)$$

$$-\sum_{i=1}^n\left\langle(l_\Omega u_l)^i\frac{\partial l_\Omega u_l}{\partial x_i},\varphi\right\rangle_{V^*,V}\to$$
$$\to-\sum_{i=1}^n\left\langle(l_\Omega u_*)^i\frac{\partial l_\Omega u_*}{\partial x_i},\varphi\right\rangle_{V^*,V}. \quad (107)$$

Доказательство. Так как $u_m\rightharpoonup u_*$ слабо в $L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)$, то $l_\Omega u_m\rightharpoonup l_\Omega u_*$ слабо в $L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)$ ([6], с. 317, теорема 4). Покажем сходимость (103):

$$\left|\int_0^T(\mathcal{E}(l_\Omega u_m)-\mathcal{E}(l_\Omega u_*),\psi\Phi)dt\right|=$$
$$=\left|\int_0^T(l_\Omega u_m-l_\Omega u_*,\psi\operatorname{Div}\Phi)dt\right|=$$
$$=\left|\langle l_\Omega(u_m-u_*),\psi\operatorname{Div}\Phi\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n),L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)}\right|\to 0. \quad (108)$$

Так как $\frac{\partial u_m}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial u_*}{\partial t}$ слабо в $L_2(0,T;L_2(\partial\Omega)^n)$ и $u_m\rightharpoonup u_*$ слабо в $L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)$, то, учитывая лемму 4.2, $l_\Omega\frac{\partial u_m}{\partial t}=\frac{\partial l_\Omega u_m}{\partial t}\rightharpoonup l_\Omega\frac{\partial u_*}{\partial t}=\frac{\partial l_\Omega u_*}{\partial t}$ слабо в $L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)$ и $l_\Omega u_m\rightharpoonup l_\Omega u_*$ слабо в $L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)$. Так как $H^1(\Omega)^n\subset L_2(\Omega)^n$ вполне непрерывно, $L_2(\Omega)^n\subset H^{-1}(\Omega)^n$ непрерывно, то существует подпоследовательность $\{l_\Omega u_l\}_{l=1}^\infty\subset\{l_\Omega u_m\}_{m=1}^\infty$, $l_\Omega u_l=l_\Omega u_{m_l}\to l_\Omega u_*$ в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ ([9], с. 85—86, [13], с. 71, теорема 4.13). Тогда имеет место следующая сходимость:

$$\left|\int_0^T\sum_{i=1}^n\left((l_\Omega u_l)^i\tau_l-(l_\Omega u_*)^i\tau_*,\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dt\right|\le$$
$$\le\left|\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega(u_l^i-u_*^i)\tau_l,\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dt\right|+$$
$$+\left|\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u_*^i(\tau_l-\tau_*),\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dt\right|\le$$

$$\leq \left\| l_\Omega(u_l^i - u_*^i) \right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)} \left\| \tau_l \right\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)} \left\| \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_\infty)} +$$

$$+ \left\langle \tau_m - \tau_*, \sum_{i=1}^n l_\Omega u_*^i \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*, L_1(0,T;\mathcal{L}_2)} \to 0. \quad (109)$$

Покажем сходимость (107) (сходимости (105), (106) показываются тем же способом):

$$\left| \sum_{i=1}^n \left\langle (l_\Omega u_l)^i \frac{\partial l_\Omega u_l}{\partial x_i} - (l_\Omega u_*)^i \frac{\partial l_\Omega u_*}{\partial x_i}, \psi\varphi \right\rangle_{V^*,V} \right| =$$

$$= \left| \int_0^T \sum_{i=1}^n \left((l_\Omega u_l^i)(l_\Omega u_l) - (l_\Omega u_*^i)(l_\Omega u_*), \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^T \sum_{i=1}^n \left((l_\Omega(u_l^i - u_*^i))(l_\Omega u_l), \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dt \right| +$$

$$+ \left| \int_0^T \sum_{i=1}^n \left((l_\Omega u_*^i) l_\Omega(u_l - u_*), \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \left\| l_\Omega(u_l^i - u_*^i) \right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)} \left\| l_\Omega u_l \right\|_{L_2(0,T;L_2)} \left\| \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_\infty)} +$$

$$+ \left\langle l_\Omega(u_l - u_*), \sum_{i=1}^n l_\Omega u_*^i \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)^*, L_2(0,T;\mathcal{L}_2)} \to 0. \quad (110)$$

□

Теорема 5.2. *Пусть* Ω, w_0, τ_0, f, u *— такие, как в лемме 5.1. Тогда задача (101), (102), (68) имеет решение в классе*

$$w \in L_2(0,T;V), \tau \in L_2(0,T;\mathcal{H}_0^1), \quad (111)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \in L_1(0,T;V^*), \frac{\partial \tau}{\partial t} \in L_1(0,T;\mathcal{H}^{-1}). \quad (112)$$

Пусть $l_\Omega u \in C([0,T];H^1(\Omega)^n)$, $\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)$, $\left\| l_\Omega u \right\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)} < \frac{\min(\frac{1}{4T},\mu_1)}{C_{V\to L_4(\Omega)^n} C}$. *Тогда имеет место оценка*

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \left\| w \right\|_H^2 (t) + \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \left\| \tau \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 (t) +$$

$$+ \left\| w \right\|_{L_2(0,T;V)}^2 + \varepsilon \int_0^T \left\| \tau \right\|_{L_2(0,T;H^1)}^2 \leq$$

$$\leq K_0 \left(\left\| w_0 \right\|_H, \left\| \tau_0 \right\|_{L_2}, \left\| f \right\|_{\mathcal{L}_2(0,T;V^*)}, \left\| l_\Omega u \right\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)}, \left\| \frac{\partial l_\Omega u}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \right), \quad (113)$$

где K_0 *не зависит от* Ω, ε.

Пусть $l_\Omega u \in L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)$, $\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \left\| w \right\|_H^2 (t) + \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \left\| \tau \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 (t) +$$

$$+ \left\| w \right\|_{L_2(0,T;V)}^2 + \varepsilon \int_0^T \left\| \tau \right\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^1)}^2 \leq$$

$$\leq K_9 \left(\left\| w_0 \right\|_H, \left\| \tau_0 \right\|_{\mathcal{L}_2}, \left\| f \right\|_{L_2(0,T;V^*)}, \left\| l_\Omega u \right\|_{L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)}, \left\| \frac{\partial l_\Omega u}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \right), \quad (114)$$

где K_9 *не зависит от* Ω, ε.

Доказательство. Рассмотрим задачи (66)—(68) с $\xi = 1$ и $\delta = \frac{1}{m}$, $m = 1,2,\ldots$. По теореме 5.1 существуют решения (w_m, τ_m) этих задач. Учитывая оценку леммы (5.1), без ограничения общности можно считать, что

$$w_m \rightharpoonup w_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V) \quad (115)$$

$$w_m \rightharpoonup w_* \text{ *- слабо в } L_\infty(0,T;H) \quad (116)$$

$$\tau_m \rightharpoonup \tau_* \text{ слабо в } L_2(0,T;\mathcal{H}_0^1) \quad (117)$$

$$\tau_m \rightharpoonup \tau_* \text{ *- слабо в } L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2). \quad (118)$$

По лемме 5.2 последовательность $\left\{ \frac{dw_m}{dt} \right\}$ ограничена в $L_1(0,T;V^*)$, а последовательность $\left\{ \frac{d\tau_m}{dt} \right\}$ в $L_1(0,T;\mathcal{H}^{-1})$. Тогда по теореме о компактности ([7], теорема 2.3 главы III)

$$w_m \to w_* \text{ сильно в } L_2(0,T;H), \quad (119)$$

$$\tau_m \to \tau_* \text{ сильно в } L_2(0,T;\mathcal{L}_2), \quad (120)$$

и можно считать, что

$$w_m(t)(x) \to w_*(t)(x) \text{ п. в. на } [0,T]\times\Omega, \quad (121)$$

$$\tau_m(t)(x) \to \tau_*(t)(x) \text{ п. в. на } [0,T]\times\Omega \quad (122)$$

Очевидно, что (w_*, τ_*) удовлетворяет оценке леммы (5.1).

Подставим (w_m, τ_m) в равенства (67) и (66) с $\delta = \frac{1}{m}$, $\xi = 1$, $\varphi \in V$, $\Phi \in C_0^\infty$. Умножим эти равенства скалярно в $L_2(0,T)$ на гладкую скалярную функцию $\psi(t), \psi(T) = 0$ и проинтегрируем по частям первые слагаемые.

Получим:

$$-\int_0^T (\tau_m, \Phi\psi'(t))dt + \int_0^T \left(\frac{1}{\lambda_1}(\tau_m, \psi\Phi) - \right.$$

$$-\sum_{i=1}^n \left(\frac{(w_m)^i \tau_m}{1 + \frac{1}{m}\left(\frac{|\tau_m|^2}{2\mu_2} + |w_m|^2 \right)}, \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) +$$

$$+ 2\mu_2(w_m, \psi \operatorname{Div}\Phi) +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}(\nabla\tau_m, \psi\nabla\Phi) - \sum_{i=1}^n \left(l_\Omega u^i \tau, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right) dt =$$

$$= 2\mu_2\int_0^T(\mathcal{E}(l_\Omega u),\psi\Phi)dt + (\tau_0,\Phi)\psi(0), \qquad (123)$$

$$-\int_0^T(w_m,\varphi\psi'(t))dt + \int_0^T(\mu_1(\nabla w_m,\psi\nabla\varphi) -$$

$$-\sum_{i=1}^n\left(\frac{(w_m)^i w_m}{1+\frac{1}{m}\left(\frac{|\tau_m|^2}{2\mu_2}+|w_m|^2\right)},\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^n\left((w_m)^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},\varphi\right)-\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i w_m,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+$$

$$+(\tau_m,\psi\nabla\varphi))dt = \int_0^T\langle f_1+f_2,\varphi\psi\rangle_{V^*,V}\,dt + (w_0,\varphi)\psi(0). \quad (124)$$

Так же, как в [1], с. 42, получаем, что

$$\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(\frac{(w_m)^i\tau_m}{1+\frac{1}{m}\left(\frac{|\tau_m|^2}{2\mu_2}+|w_m|^2\right)},\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dt \to$$

$$\to\int_{i=1}^T\sum_{i=1}^n\left((w_*)^i\tau_*,\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dt, \qquad (125)$$

$$\int_0^T\sum_{i=1}^n\left(\frac{(w_m)^i w_m}{1+\frac{1}{m}\left(\frac{|\tau_m|^2}{2\mu_2}+|w_m|\right)^2},\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)dt \to$$

$$\to\int_0^T\sum_{i=1}^n\left((w_*)^i w_*,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)dt. \qquad (126)$$

Переходя к пределу в (123), (124) при $m\to\infty$, в силу сходимостей (125), (126) и леммы 5.3 получаем

$$-\int_0^T(\tau_*,\Phi\psi'(t))dt + \int_0^T\left(\frac{1}{\lambda_1}(\tau_*,\psi\Phi\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^n\left((w_*)^i\tau_*,\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)-\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i\tau_*,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)+$$

$$+2\mu_2(w_*,\psi\,\mathrm{Div}\,\Phi)+\frac{\varepsilon}{\lambda_1}(\nabla\tau_*,\psi\nabla\Phi))dt =$$

$$= 2\mu_2\int_0^T(\mathcal{E}(l_\Omega u),\psi\Phi)dt + (\tau_0,\Phi)\psi(0), \qquad (127)$$

$$-\int_0^T(w_*,\varphi\psi'(t))dt + \int_0^T(\mu_1(\nabla w_*,\psi\nabla\varphi) -$$

$$-\sum_{i=1}^n\left((w_*)^i w_*,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^n\left(w_*^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i},\varphi\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i w_*,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+(\tau_*,\psi\nabla\varphi))dt =$$

$$= \int_0^T\langle f_1+f_2,\varphi\psi\rangle_{V^*,V}\,dt + (w_0,\varphi)\psi(0). \qquad (128)$$

Так как это выполнено, в частности, при любом $\psi\in C_0^\infty(0,T)$, то (w_*,τ_*) удовлетворяет (101), (102) в смысле распределений на $(0,T)$.

Подставим (w_*,τ_*) в равенства (101), (102). Так как все слагаемые в полученных равенствах суммируемы на $(0,T)$, то эти равенства верны почти всюду на $(0,T)$. Умножим эти равенства скалярно в $L_2(0,T)$ на гладкую скалярную функцию $\psi(t),\psi(T)=0,\psi(0)\neq 0$. Сравнив результат с (127), (128), получим, что

$$(w_*|_{t=0},\varphi)\psi(0)=(w_0,\varphi)\psi(0),$$

$$(\tau_*|_{t=0},\Phi)\psi(0)=(\tau_0,\Phi)\psi(0).$$

Так как Φ и φ произвольны, то w_* и τ_* удовлетворяют (68).

Так как (см., например, [6], с. 317, теорема 5)

$$\forall(t\in[0,T])\|\tau_*\|_{\mathcal{L}_2}(t)\le\limsup_{m\to\infty}\|\tau_m\|_{\mathcal{L}_2}(t),$$

$$\|v_*\|_H(t)\le\limsup_{m\to\infty}\|v_m\|_H(t), \qquad (129)$$

$$\|v_*\|_{L_2(0,T;V)}\le\limsup_{m\to\infty}\|v_m\|_{L_2(0,T;V)},$$

$$\|\tau_*\|_{L_2(0,T;H_0^1)}\le\limsup_{m\to\infty}\|\tau_m\|_{L_2(0,T;H_0^1)}, \qquad (130)$$

то из леммы 5.2 с $\delta=0,\xi=1$ получим, что решения задачи (101), (102), (68) удовлетворяют оценкам (96), (97). Таким образом, (w_*,τ_*) есть искомое решение. □

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДЖЕФФРИСА В ЭВОЛЮЦИОННОМ СЛУЧАЕ И ЕГО ОЦЕНКА

Вначале докажем утверждение, из которого немедленно следует теорема 2.2.2.

Теорема 6.1. *Пусть* $f\in L_2(0,T;V^*)$, $w_0\in H$, $\tau_0\in\mathcal{L}_2$, $l_\Omega u$ *— такое же, как и в теореме 5.2. Тогда существует пара функций* (w,τ),

$$w\in L_2(0,T;V)\bigcap L_\infty(0,T;H)\bigcap$$

$$\bigcap C_w([0,T];H)\bigcap L_{8/3}(0,T;L_4(\Omega)^n), \qquad (131)$$

$$\frac{dw}{dt}\in L_1(0,T;V^*), \qquad (132)$$

$$\tau\in L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)\bigcap C_w([0,T];\mathcal{L}_2), \qquad (133)$$

$$\frac{d\tau}{dt}\in L_2(0,T;\mathcal{H}^{-2}), \qquad (134)$$

удовлетворяющая (28), (29) при п.в. $t\in(0,T)$, *начальному условию (68).*

Пусть $l_\Omega u\in C([0,T];H^1(\Omega)^n)$, $\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t}\in$ $\in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)$, $\|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)}<\frac{\min(\frac{1}{4T},\mu_1)}{C_{V\to L_4(\Omega)^n}C}$.

Тогда имеет место оценка

$$\|w\|^2_{L_\infty(0,T;H)} + \|\tau\|^2_{L_\infty(0,T;L_2)} + \|w\|^2_{L_2(0,T;V)} + \\ + \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L_1(0,T;V^*)} + \left\|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,T;H^{-2})} \le \\ \le K_{10}\left(\|w_0\|_H, \|\tau_0\|_{\mathcal{L}_2}, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \right. \\ \left. \|l_\Omega u\|_{C([0,T];H^1(\Omega)^n)}, \left\|\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)}\right), \quad (135)$$

где K_{10} *не зависит от* Ω, ε.

Пусть $l_\Omega u \in L_2(0,T;C^1(\bar{\Omega})^n)$, $\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t} \in \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\|w\|^2_{L_\infty(0,T;H)} + \|\tau\|^2_{L_\infty(0,T;L_2)} + \|w\|^2_{L_2(0,T;V)} + \\ + \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L_1(0,T;V^*)} + \left\|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,T;H^{-2})} \le \\ \le K_{11}\left(\|w_0\|_H, \|\tau_0\|_{\mathcal{L}_2}, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \right. \\ \left. \|l_\Omega u\|_{L_2(0,T;C^1(\Omega)^n)}, \left\|\frac{\partial l_\Omega u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)}\right), \quad (136)$$

где K_{11} *не зависит от* Ω, ε.

Доказательство. Обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса m в пространстве $\mathbb{R}^n, m = 1,2,...$ Из определения пространства H следует, что найдется последовательность $a_m \in C_0^\infty(\Omega)^n$, $\operatorname{div} a_m = 0$, $\operatorname{supp} a_m \subset \Omega_m$, сходящаяся к w_0 в $L_2(\Omega)$. Без ограничения общности $\|a_m\| \le \|w_0\|$. Рассмотрим при каждом m на Ω_m задачу (101), (102) с $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ и начальным условием:

$$w\,|_{t=0} = a_m, \tau\,|_{t=0} = \tau_0\,|_{\Omega_m} \quad (2.5.3)$$

По теореме 5.2 существует решение (w_m, τ_m) этой задачи. Обозначим через $(\tilde{w}_m, \tilde{\tau}_m)$ продолжение (w_m, τ_m) нулем на все Ω.

Как при доказательстве теоремы 5.2, в силу оценок теоремы 2 и (96) можно считать, что

$$\tilde{w}_m \rightharpoonup w_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V), \quad (137)$$

$$\tilde{w}_m \rightharpoonup w_* \text{ *-слабо в } L_\infty(0,T;H), \quad (138)$$

$$\tilde{\tau}_m \rightharpoonup \tau_* \text{ *-слабо в } L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2), \quad (139)$$

$$\tilde{w}_m\,|_{\Omega_k} \to w_*\,|_{\Omega_k} \text{ сильно } L_2(0,T;L_2(\Omega_k)^n) \quad (140)$$

при всяком k (сильной сходимости $\tilde{\tau}_m$ теперь нет, так как оценка (97) зависит от ε). Очевидно, (w_*, τ_*) удовлетворяет оценкам теоремы 2 с $\varepsilon = 0$. Кроме того, из неравенств (см. [7], леммы III.3.3 и III.3.5)

$$\|w\|_{L_4(\Omega)^n} \le 2^{1/4}\|w\|^{\frac12}_{L_2(\Omega)^n}\|w\|^{\frac12}_V,\ n = 2,$$

$$\|w\|_{L_4(\Omega)^n} \le 2^{1/2}\|w\|^{\frac14}_{L_2(\Omega)^n}\|w\|^{\frac34}_V,\ n = 3$$

следует, что

$$\|w\|_{L_4(\Omega)^n} \le 2^{1/2}\|w\|^{\frac14}_{L_2(\Omega)^n}\|w\|^{\frac34}_{H^1(\Omega)^n},\ n = 2,3, \quad (141)$$

$$\|w\|_{L_{8/3}(0,T;L_4(\Omega)^n)} \le 2^{1/2}\|w\|^{\frac14}_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)^n)}\|w\|^{\frac34}_{L_2(0,T;V)}. \quad (142)$$

Возьмем произвольные $\varphi \in \mathcal{V}$, $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty$. При некотором k носители φ и Φ лежат в Ω_k.

Подставим (w_m, τ_m) в равенства (101), (102) с $m \ge k, \varepsilon = \dfrac{1}{m}$. Умножим эти равенства скалярно в $L_2(0,T)$ на гладкую скалярную функцию $\psi(t), \psi(T) = 0$ и проинтегрируем по частям первые слагаемые. Благодаря выбору k функции w_m и τ_m в этих равенствах можно заменить на $\tilde{w}_m$ и $\tilde{\tau}_m$. Получим

$$-\int_0^T(\tilde{\tau}_m, \Phi\psi'(t))dt + \int_0^T\left(\frac{1}{\lambda_1}(\tilde{\tau}_m, \psi\Phi) - \right. \\ -\sum_{i=1}^n\left((\tilde{w}_m)^i\tilde{\tau}_m, \psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i\tilde{\tau}_m, \psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) + \\ \left. +2\mu_2(\tilde{w}_m, \psi Div\Phi) + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}(\nabla\tilde{\tau}_m, \psi\nabla\Phi)\right)dt = \\ = 2\mu_2\int_0^T(\mathcal{E}(l_\Omega u), \psi\Phi)dt + (\tau_0, \Phi)\psi(0), \quad (143)$$

$$-\int_0^T(\tilde{w}_m, \varphi\psi'(t))dt + \int_0^T\left(\mu_1(\nabla\tilde{w}_m, \psi\nabla\varphi) - \right. \\ -\sum_{i=1}^n\left((\tilde{w}_m)^i\tilde{w}_m, \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^n\left(\tilde{w}_m^i\frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, \psi\varphi\right) - \\ \left. -\sum_{i=1}^n\left(l_\Omega u^i\tilde{w}_m, \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + (\tilde{\tau}_m, \psi\nabla\varphi)\right)dt = \\ = \int_0^T\langle f_1 + f_2, \varphi\psi\rangle_{V^*,V}\,dt + (w_0, \varphi)\psi(0). \quad (144)$$

Заметим, что

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^T(\nabla\tilde{\tau}_m, \psi\nabla\Phi)\right| = \left|\frac{1}{m}\int_0^T(\tilde{\tau}_m, \psi\Delta\Phi)\right| \le \\ \le \frac{1}{m}\|\tau_m\|_{L_\infty(0,T;L_2)}\int_0^T\|\psi\Delta\Phi\| \underset{m\to\infty}{\to} 0. \quad (145)$$

Покажем теперь, что

$$\int_0^T\sum_{i=1}^n\left((\tilde{w}_m)^i\tilde{\tau}_m, \psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dt \to \\ \to \int_0^T\sum_{i=1}^n\left((\tilde{w}_*)^i\tilde{\tau}_*, \psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dt, \quad (146)$$

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n \left((\tilde{w}_m)^i \tilde{w}_m, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dt \to$$

$$\to \int_0^T \sum_{i=1}^n \left((\tilde{w}_*)^i \tilde{w}_*, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dt. \qquad (147)$$

Действительно, пользуясь неравенством Гельдера, видим:

$$\left| \int_0^T \sum_{i=1}^n \left((\tilde{w}_m)^i \tilde{\tau}_m - (\tilde{w}_*)^i \tilde{\tau}_*, \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_0^T \sum_{i=1}^n \left(((\tilde{w}_m)^i - (\tilde{w}_*)^i) \tilde{\tau}_m, \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dt \right| +$$

$$+ \left| \int_0^T \sum_{i=1}^n \left((\tilde{w}_*)^i (\tilde{\tau}_m - \tilde{\tau}_*), \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dt \right| \le$$

$$\le \left\| (w_m - w_*) \,|_{\Omega_k} \right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)} \times$$

$$\times \left\| \tau_m \right\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)} \left\| \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_\infty)} +$$

$$+ \left\langle \tilde{\tau}_m - \tilde{\tau}_*, \sum_{i=1}^n (\tilde{w}_*)^i \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle_{L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^*, L_1(0,T;\mathcal{L}_2)}. \quad (148)$$

Последние скобки означают действие функционала $\tilde{\tau}_m - \tilde{\tau}_*$ из $L_1(0,T;\mathcal{L}_2)^* = L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)$ на элемент $\sum_{i=0}^n (\tilde{w}_*)^i \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$. Оба слагаемых стремятся к нулю, и и первая часть (2.5.7) доказана. Аналогично доказывается вторая часть.

Устремляя теперь m к бесконечности в (143) и (144), в силу (145), (146), (147) леммы 5.3, получим

$$-\int_0^T (\tau_*, \Phi \psi'(t)) dt + \int_0^T \left(\frac{1}{\lambda_1} (\tau_*, \psi \Phi) - \right.$$

$$- \sum_{i=1}^n \left((w_*)^i \tau_*, \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \left(l_\Omega u^i \tau, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) +$$

$$\left. + \;\; 2\mu_2 (w_*, \psi \operatorname{Div} \Phi) \right) dt =$$

$$= 2\mu_2 \int_0^T (\mathcal{E}(l_\Omega u), \psi \Phi) dt + (\tau_0, \Phi) \psi(0), \qquad (149)$$

$$-\int_0^T (w_*, \psi'(t) \varphi) dt + \int_0^T (\mu_1 (\nabla w_*, \psi \nabla \varphi) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \left((w_*)^i w_*, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n \left(w_*^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, \varphi \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \left(l_\Omega u^i w_*, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + (\tau_*, \psi \nabla \varphi)) dt =$$

$$= \int_0^T \langle f, \psi \varphi \rangle_{V^*,V} \, dt + (w_0, \varphi) \psi(0) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \int_0^T \left\langle (l_\Omega u)^i \frac{\partial l_\Omega u}{\partial x_i}, \psi \varphi \right\rangle_{V^*,V} dt +$$

$$+ \int_0^T (l_\Omega u, \psi'(t) \varphi) dt - \int_0^T (\nabla l_\Omega u, \psi \nabla \varphi) dt. \qquad (150)$$

Как в доказательстве теоремы 5.2 отсюда следует, что пара (w_*, τ_*) есть решение (28), (29), (68) и w_* удовлетворяет оценке (96). Для доказательства (135), (136) остается оценить пятое слагаемое в его левой части.

Подставим (w_*, τ_*) в (28). Имеем, пользуясь неравенством Гельдера, вложением $V \subset L_4(\Omega)^n$ и (2.4.19):

$$\left\| \frac{d}{dt} (\tau_*, \Phi) \right\|_{L_2(0,T)} \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{\lambda_1} (\tau_*, \Phi) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| \sum_{i=1}^n \left((w_*)^i \tau_*, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right\|_{L_2(0,T)} +$$

$$+ \left\| 2\mu_2 (w_*, \operatorname{Div} \Phi) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| \sum_{i=1}^n \left(l_\Omega u^i \tau, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \right\|_{L_2(0,T)} +$$

$$+ \left\| 2\mu_2 (\mathcal{E}(l_\Omega u), \Phi) \right\|_{L_2(0,T)} \le \frac{1}{\lambda_1} \left\| \tau_* \right\|_{L_2(0,T;\mathcal{L}_2)} \left\| \Phi \right\|_{L_2} +$$

$$+ \left\| w_* \right\|_{L_2(0,T;L_4)} \left\| \tau_* \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\|_{L_4} +$$

$$+ 2\mu_2 \left\| w_* \right\|_{L_2(0,T;L_2)} \left\| \operatorname{Div} \Phi \right\|_{L_2} +$$

$$+ \left\| l_\Omega u \right\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)} \left\| \tau_* \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\|_{L_4} +$$

$$+ 2\mu_2 \left\| l_\Omega u \right\|_{L_2(0,T;L_2)} \left\| \operatorname{Div} \Phi \right\|_{L_2} \le$$

$$\le C \left\| \Phi \right\|_{H_0^2} \left(\left\| \tau_* \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)} + \left\| w_* \right\|_{L_2(0,T;V)} \left\| \tau_* \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)} + \right.$$

$$+ \left\| l_\Omega u \right\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} \left\| \tau_* \right\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2)} +$$

$$\left. + \left\| w_* \right\|_{L_2(0,T;V)} + \left\| l_\Omega u \right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)} \right) \le$$

$$\le K_4 \left(\left\| w_0 \right\|_H, \left\| \tau_0 \right\|_{\mathcal{L}_2}, \left\| f \right\|_{L_2(0,T;V^*)} \right) \left\| \Phi \right\|_{\mathcal{H}_0^2}, \qquad (151)$$

что с учетом (77) дает требуемую оценку.

По лемме 1.1 главы III [7] w_* п.в. равна непрерывной на $[0,T]$ функции со значениями в V^*. Без ограничения общности можно считать, что она непрерывна на $[0,T]$ со значениями в этом пространстве. И так как она принадлежит $L_\infty(0,T;H)$, она слабонепрерывна на $[0,T]$ со значениями в H (см. лемму 1.4. главы III [7]). Аналогично $\tau \in C_w([0,T];\mathcal{L}_2)$. □

Доказательство теоремы 3.1. Положим, $\tau_0 = \sigma_0 - 2\mu_1\mathcal{E}(v_0)$. По условию теоремы $\tau_0 \in \mathcal{L}_2$. По теореме 6.1 существует решение (w,τ) задачи (28), (29), (68) в классе (131)—(134) и $v = w + l_\Omega u$, $l_\Omega u \in L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)$, $\operatorname{div} l_\Omega u = 0$. Так как $w|_{\partial\Omega} = (v - l_\Omega u)|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} - u = 0$, то $v|_{\partial\Omega} = u$. Легко видеть, что $\mathcal{E}(v) \in L_2(0,T;\mathcal{L}_2)\bigcap C_w([0,T];\mathcal{H}^{-1})$. Положим, $\sigma = \tau + 2\mu_1\mathcal{E}(v)$. Приведем в равенствах (28)—(29) подобные слагаемые. Тогда пара (v,σ) принадлежит классу (30)—(31) и удовлетворяет (4),(32),(33), то есть является слабым решением задачи (1)—(6). □

7. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Назовем множество элементов

$$\mathfrak{A} = \{(w,\tau) \in W_{2,1}(V,V^*) \times L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2),$$
$$u \in W_{2,2}(H^{1/2}(\partial\Omega)^n, L_2(\partial\Omega)^n)\}, \qquad (152)$$

удовлетворяющих (28), (29), (68), таких, что для любого $(w = v - l_\Omega u, \tau), u \in \mathfrak{A}$ определено значение $J(v,u)$ функционала (34) множеством допустимых элементов. В силу теоремы 6.1 множество $\mathfrak{A}$ непусто.

$$J : L_2(0,T;H^1(\Omega)^n) \times L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n) \to \inf \qquad (153)$$

Теорема 7.1. *Пусть*

$$\|u\|_{L_2(0,T;C^1(\partial\Omega)^n)} \le M_1 \qquad (154)$$

или

$$\|u\|_{C(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)} \le M_2 < \frac{\min(\frac{1}{4T},\mu_1)}{C_{V\to L_4(\Omega)^n} C\mathbf{C}_2} \qquad (155)$$

и, кроме того,

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))} \le M_3. \qquad (156)$$

Тогда существует слабое решение (v_*,σ_*), u_* задачи (1)—(6), (34).

Доказательство. Так как $\mathfrak{A} \ne \varnothing$, то существует последовательность $\{(v_m,u_m)\}_{m=1}^\infty \subset \mathfrak{A}$, такая, что:

$$\inf_{(v,u)\in\mathfrak{A}} J(v,u) = \lim_{m\to\infty} J(v_m,u_m). \qquad (157)$$

Пусть выполнено условие (156) и условие (154) или (155), тогда существует последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ и

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_*}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(0,T;L_2(\partial\Omega)^n), \qquad (158)$$

$$u_m \rightharpoonup u_* \text{ слабо в } L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n). \qquad (159)$$

Из условий (154), (155), оценок теоремы 6.1 и неравенств (43), (44) следует, что существует последовательность $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ ($w_m = v_m - u_m$), $\{\tau_m\}_{m=1}^\infty$ решений задачи (28), (29), (68) с $u = u_m$, такая, что

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial w_*}{\partial t} \text{ слабо в } L_1(0,T;V^*), \qquad (160)$$

$$w_m \rightharpoonup w_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V), \qquad (161)$$

$$w_m \rightharpoonup w_* \text{ слабо в } L_\infty(0,T;H), \qquad (162)$$

$$\tau_m \rightharpoonup \tau_* \text{ слабо в } L_\infty(0,T;\mathcal{L}_2). \qquad (163)$$

Возьмем $w = w_m = v_m - l_\Omega u_m$, $\tau = \tau_m$ в (28), (29), (68). Аналогично с доказательством теоремы 6.1 и в силу леммы 5.3 показывается, что $w_* = v_* - l_\Omega u_*$, τ_* удовлетворяет (28), (29), (68). Заметим, что в силу теоремы 3.1 существует соответствующее (w_*,τ_*) слабое решение задачи (1)—(6) (v_*,σ_*). В силу того, что

$$\|v_m\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} - \|l_\Omega u_m\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} \le$$
$$\le \|v_m - l_\Omega u_m\|_{L_2(0,T;V)} = \|w_m\|_{L_2(0,T;V)}, \qquad (164)$$

$$\|v_m\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} \le \|w_m\|_{L_2(0,T;V)} +$$
$$+ \|l_\Omega u_m\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} \|w_m\|_{L_2(0,T;V)} + \|l_\Omega u_m\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)} \le$$
$$\le \|w_m\|_{L_2(0,T;V)} + \mathbf{C}_2 \|u_m\|_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)}, \qquad (165)$$

то можно считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности), что

$$v_m \rightharpoonup v_* \text{ слабо } L_2(0,T;H^1(\Omega)^n).$$

Так как выпуклый, полунепрерывный снизу функционал полунепрерывен снизу также и в слабой топологии $H^1(\Omega)^n \times L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)^n)$ (см., например, [15], с. 20), то из (157) следует, что

$$J(v_*,u_*) \le \liminf_{m\to\infty} J(v_m,u_m). \qquad (166)$$

Отсюда следует, что (v_*,σ_*), u_* — слабое оптимальное решение задачи (1)—(6), (34). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dmitrienko V. T.* The topological degree method for equations of the Navier—Stokes type/ V. T. Dmitrienko, V. G. Zvyagin// Abstract and Applied Analysis. — 1997. — V. 1/2. — P. 1—45.

2. *Осмоловский В. Г.* Линейные и нелинейные возмущения оператора div / В. Г. Осмоловский. — СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 1995. — 144 с.

3. *Джусти Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации / Э. Джусти. — М., 1989. — 240 с.

4. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. М. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 372 с.

5. *Guilliope C.* Existence results for the flow of viscoelastic fluids with differential constitutive law / C. Guilliope, J.-C. Saut // Nonlinear Anal. , 1990. — V. 15, № 9. — P. 849—869.

6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 5 / В. И. Смирнов — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — 656 с.

7. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ /Р. Темам. — М. : Мир, 1987. — 408 с.

8. *Vorotnikov D. A.* On the existence of weak solutions for the initial-boundary value problem in the Jeffreys model of motion of a viscoelastic medium / D. A. Vorotnikov, V. G. Zvyagin // Abstract and Applied Analysis. — 2004 . — № 10 (2004). — P. 815—829.

9. *Simon J.* Compact sets in $L_p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl. ser. IV, 1987. — V. CXLVI. — P. 65—96.

10. Функциональный анализ / сост. Н. Я. Виленкин и др. ; под ред. С. Г. Крейна. — М. : Наука, 1964. — 424 с.

11. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. М. Захарис. — М. : Мир, 1978. — 336 с.

12. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределительными системами: теория и приложения : учеб. пособие / А. В. Фурсиков. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — 352 с. — (Университетская сер. ; Т. 5).

13. *Звягин В. Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье—Стокса / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 112 с.

14. *Фурсиков А. В.* Задачи управления и уравнения Навье—Стокса и Эйлера / А. В. Фурсиков // Математический сборник. — 1981. — Т. 115(157) : 2(6). — С. 281—306.

15. *Экланд И.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. — М. : Мир, 1979. — 339 с.

16. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М. : Наука, 1972. — 496 с.

Поступила в редакцию 31 марта 2008 г.