УДК 517.953+517.982.4

ОБОЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В-ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. А. Куликов

Воронежский государственный университет

В работе изучаются специальные пространства основных и обобщенных функций, используемые в общей теории сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя. Соответствующие результаты применяются при исследовании фундаментальных решений В-гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, а также вопросов локальной разрешимости и гладкости обобщенных решений В-гипоэллиптических уравнений с переменными коэффициентами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнения в частных производных, общая теория, обобщенные решения, гипоэллиптичность, переменные коэффициенты, сингулярность, оператор Бесселя.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуются вопросы существования и гладкости обобщенных решений (и, в частности, фундаментальных решений) В-гипоэллиптических уравнений, содержащих сингулярный оператор Бесселя

$$B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = \mathrm{const} > 0.$$

Указанный класс уравнений был впервые введен автором в [1] и затем рассматривался в работах [2—5]; он включает, в частности, все сингулярные эллиптические уравнения, изучавшиеся в научной школе И. А. Киприянова. Вопросы существования фундаментальных решений для более общих сингулярных уравнений рассматривались в работе [6]. В статьях [7, 8] построена теория пространств основных и обобщенных функций, используемых при изучении сингулярных уравнений, содержащих оператор Бесселя. В настоящей статье, опирающейся на результаты работ [3—8], исследованы также специальные весовые функциональные пространства, аналогичные пространствам Хёрмандера $\mathcal{B}_{p,k}$ [9—11] и обобщающие некоторые из пространств Киприянова [12, 13]. Соответствующие результаты применяются при изучении фундаментальных решений В-гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, а также вопросов разрешимости В-гипоэллиптических уравнений с переменными коэффициентами и локальных свойств их обобщенных решений.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть Ω_s — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, симметричное относительно гиперплоскости $x_n = 0$. Здесь и везде в дальнейшем символ s в обозначении множества из $\mathbf{R}^n$ указывает на его симметричность относительно гиперплоскости $x_n = 0$. Символом $C_+^m(\Omega_s)$ (соответственно $C_{0,+}^m(\Omega_s)$), $m = 0,1,2,\ldots$, будем обозначать совокупность всех функций класса $C^m(\Omega_s)$ (соответственно $C_0^m(\Omega_s)$) [14], четных по последней переменной.

Пусть $\mathcal{D}(\Omega_s)$ — линейное топологическое пространство всех бесконечно дифференцируемых на множестве Ω_s функций с компактными носителями [9, 10, 14] и $\mathcal{D}_+(\Omega_s)$ — множество всех четных по последней переменной функций пространства $\mathcal{D}(\Omega_s)$. В пространстве $\mathcal{D}_+(\Omega_s)$ вводится топология, индуцированная в нем топологией пространства $\mathcal{D}(\Omega_s)$. Сопряженное к $\mathcal{D}_+(\Omega_s)$ пространство, наделенное слабой топологией, будем обозначать через $\mathcal{D}_+'(\Omega_s)$. Как показано в [8], пространство $\mathcal{D}_+'(\Omega_s)$ можно отождествить с пространством всех четных по последней переменной функционалов из $\mathcal{D}'(\Omega_s)$.

Если обобщенные функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ из $\mathcal{D}_+'(\Omega_s)$ равны на открытом множестве $V_s \subset \Omega_s$, то есть

$$(f,\varphi) = (g,\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_+(V_s),$$

то будем писать

$$f = g, \quad x \in V_s.$$

Пусть $L_1(\Omega_s)$ — совокупность всех интегрируемых на множестве Ω_s функций и

$L_{1,k,+}(\Omega_s)$ — совокупность всех определенных почти везде в Ω_s четных по последней переменной функций $f(x)$, для которых $f(x)x_n^k \in L_1(\Omega_s)$. Через $L_{1,k,+}^{loc}(\Omega_s)$ будем обозначать множество всех функций $f(x)$, определенных почти везде в Ω_s и таких, что $\varphi f \in L_{1,k,+}(\Omega_s)$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_+(\Omega_s)$.

Используя лемму дю Буа-Реймонда [14], мы будем отождествлять каждую функцию $f(x) \in L_{1,k,+}^{loc}(\Omega_s)$ с функционалом $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$, действующим по формуле

$$(f,\varphi) = \int_{\Omega_s} \overline{f(x)}\varphi(x) \mid x_n \mid^k dx, \quad \varphi \in D_+(\Omega_s). \quad (1.1)$$

Функционалы $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$, действующие по формуле (1.1), будем называть регулярными, а все остальные функционалы из $D'_+(\Omega_s)$ — сингулярными. Примером сингулярного функционала является δ- функция Дирака:

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\Omega_s).$$

Определим операцию умножения функционала $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ на функцию $b \in C_+^\infty(\Omega_s)$ по формуле

$$(bf,\varphi) = (f,\bar{b}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\Omega_s).$$

Введем обозначения: $\alpha = (\alpha', \alpha_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$, α_j, $j = 1,\dots,n$ — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D_{x_j} = i\partial / \partial x_j$ (i — мнимая единица), $D_{x'} = (D_{x_1},\dots,D_{x_{n-1}})$, $D_x = (D_{x'}, D_{x_n})$, $D_{x'}^{\alpha'} = D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}$, $D_x^\alpha = D_{x'}^{\alpha'} D_{x_n}^{\alpha_n}$.

Введем в пространстве $\mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ операцию дифференцирования $D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n}$ по формуле

$$\left(D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} f,\varphi\right) = \left(f, D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n}\varphi\right),$$
$$\varphi \in \mathcal{D}_+(\Omega_s).$$

Как показано в [8], каждый функционал $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ бесконечно дифференцируем, то есть функционал $D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} f$ принадлежит пространству $\mathcal{D}'_+(\Omega_s)$ при всех α', α_n. С помощью интегрирования по частям легко видеть также, что если функция $f(x) \in C_+^m(\Omega_s)$, то ее классические и обобщенные производные $D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} f$, $|\alpha'| + 2\alpha_n \le m$, совпадают в Ω_s.

Через $\Phi_+(\Omega_s)$ обозначим пространство всех функций класса $C_+^\infty(\Omega_s)$, топология в котором вводится так же, как и в пространстве $\mathcal{E}(\Omega_s)$ [9, 10], а через $\Phi'_+(\Omega_s)$ — множество всех линейных непрерывных функционалов на $\Phi_+(\Omega_s)$. Из результатов работы [8] вытекает, что пространство $\Phi'_+(\Omega_s)$ можно отождествить с множеством всех финитных функционалов из $\mathcal{D}'_+(\Omega_s)$.

Для функции $f(x) \in L_{1,k,+}(\mathbf{R}^n)$ определим преобразование Фурье—Бесселя [12, с. 183] по формуле

$$F_\nu[f](\sigma) = \hat{f}(\sigma) =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} \exp[i(x',\sigma')] j_\nu(x_n\sigma_n) f(x) |x_n|^{2\nu+1} dx, \; \sigma \in \mathbf{R}^n,$$

где $\nu = (k-1)/2$, $j_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{-\nu} J_\nu(z)$ — нормированная функция Бесселя.

Заметим, что если функция f финитна, то $\hat{f}(\sigma)$ является функцией класса $C_+^\infty(\mathbf{R}^n)$, допускающей аналитическое продолжение в n-мерное комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ по формуле

$$\hat{f}(s) = \int_{R^n} \exp[i(x',s')] j_\nu(x_n s_n) \times$$
$$\times f(x) |x_n|^{2\nu+1} dx, \quad (1.2)$$

где $s = (s', s_n) = \sigma + i\tau$, $\sigma, \tau \in \mathbf{R}^n$.

Пусть a_j, $j = 1,\dots,n$ — положительные постоянные, $a = (a_1,\dots,a_n)$ и

$$V_a = \left\{x \in \mathbf{R}^n : |x_1| \le a_1,\dots,|x_n| \le a_n\right\}.$$

В работе [8] доказан следующий аналог теоремы Пэли—Винера.

Теорема 1.1. *Целая аналитическая функция $\psi(s)$, четная по переменной s_n, является преобразованием Фурье—Бесселя функции $f(x) \in C_{0,+}^\infty(\mathbf{R}^n)$, сосредоточенной на множестве V_a, тогда и только тогда, когда для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ существует постоянная $C_\alpha > 0$ такая, что*

$$\left|s_1^{\alpha_1}\cdots s_n^{\alpha_n}\psi(s)\right| \le C_\alpha \exp\left(\sum_{j=1}^n a_j \left|\operatorname{Im} s_j\right|\right), \; s \in \mathbf{C}^n. \quad (1.3)$$

Через Z_+ обозначим множество всех четных по последней переменной функций линейного топологического пространства Z (преобразований Фурье функций из $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$) [15—17]. В пространстве Z_+ вводится топология, индуцированная в нем топологией пространства Z. Из теоремы 1.1 вытекает, что преобразование Фурье—Бесселя является линейным непрерывным изоморфизмом пространства $\mathcal{D}_+ \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}_+(\mathbf{R}^n)$ на Z_+, причем обратное преобразование имеет вид

$$F_\nu^{-1}[\psi](x) = c_{\nu,n} \int_{\mathbf{R}^n} \exp[-i(x',\sigma')] j_\nu(x_n\sigma_n) \times$$
$$\times \psi(\sigma) |\sigma_n|^k d\sigma, \quad \psi \in Z_+,$$

где $c_{\nu,n} = 1/\pi^{n-1} 2^{2\nu+n} \Gamma^2(\nu+1)$.

Через Z'_+ обозначим сопряженное к Z_+ пространство, наделенное слабой топологией. Каждая функция $g(\sigma) \in L^{loc}_{1,k,+}\left(\mathbf{R}^n\right)$, возрастающая на бесконечности не быстрее некоторой степени $|\sigma|$, порождает функционал $g \in Z'_+$, действующий по формуле

$$(g,\psi) = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{g(\sigma)}\psi(\sigma)\left|\sigma_n\right|^k d\sigma, \quad \psi \in Z_+. \quad (1.4)$$

Функционалы $g \in Z'_+$, действующие по формуле (1.4), будем называть р е г у л я р н ы м и, а все остальные функционалы из Z'_+ — с и н г у л я р н ы м и.

Так же, как и в пространстве $\mathcal{D}'_+$, в пространстве Z'_+ можно ввести операцию дифференцирования $D^{\alpha'}_{s'} B^{\alpha_n}_{s_n}$. Мультипликатором в пространстве Z_+ служит любая четная по переменной s_n функция, являющаяся мультипликатором в пространстве Z [16]; при этом операция умножения функционала $g \in Z'_+$ на функцию $h(s)$ определяется по формуле

$$(h(s)g(s),\psi(s)) = (g(s),\overline{h(\overline{s})}\psi(s)), \quad \psi \in Z_+.$$

Через $S_+ = S_+\left(\mathbf{R}^n\right)$ обозначим линейное топологическое пространство всех функций $\varphi(x) \in C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n\right)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Топология в пространстве S_+ вводится так же, как и в пространстве S [16]. Через S'_+ будем обозначать сопряженное к S_+ пространство, наделенное слабой топологией. Основные факты, касающиеся пространств S_+ и S'_+ и преобразования Фурье—Бесселя в этих пространствах, приведены в [18, 19]. Отметим, что каждая функция $\psi(s) \in Z_+$, рассматриваемая при вещественных значениях аргумента $s = \sigma$, принадлежит пространству S_+ и что преобразование Фурье—Бесселя изоморфно и непрерывно отображает пространство S_+ на себя.

Имеют место вложения

$$\mathcal{D}_+ \subset S_+ \subset S'_+ \subset \mathcal{D}'_+, \; Z_+ \subset S_+, \; S'_+ \subset Z'_+. \quad (1.5)$$

При этом каждое из пространств $\mathcal{D}_+$, S_+, Z_+ вкладывается в соответствующее объемлющее пространство вместе с топологией и образует всюду плотное множество в топологии последнего.

Преобразование Фурье—Бесселя $\hat{f} = F_\nu[f]$ функционала $f \in \mathcal{D}'_+$ определим как функционал из пространства Z'_+, действующий по формуле

$$\left(F_\nu[f],\psi\right) = c^{-1}_{\nu,n}\left(f, F^{-1}_\nu[\psi]\right), \quad \psi \in Z_+.$$

Преобразование F_ν изоморфно и непрерывно отображает пространство $\mathcal{D}'_+$ на Z'_+. Обратное преобразование задается по формуле

$$\left(F^{-1}_\nu[g],\varphi\right) = c_{\nu,n}\left(g, F_\nu[\varphi]\right),$$

$$g \in Z'_+, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Отметим, что преобразование Фурье—Бесселя является непрерывным автоморфизмом пространства S'_+.

Имеют место формулы [18, 19]

$$F_\nu\left[\delta\right] = 1, \quad (1.6)$$

$$F_\nu\left[P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)f\right](s) = P\left(s', -s_n^2\right)F_\nu\left[f\right](s), \quad (1.7)$$

$$P\left(D_{s'}, B_{s_n}\right)F_\nu\left[f\right](s) = F_\nu\left[P\left(-x', -x_n^2\right)f\right](s), \quad (1.8)$$

где $P(s)$ — произвольный многочлен с постоянными коэффициентами.

Пусть $f \in \Phi'_+ \overset{def}{=} \Phi'_+\left(\mathbf{R}^n\right)$ — финитный функционал. Тогда, как легко видеть, имеет место формула

$$\hat{f}_\nu(\sigma) = \left(\overline{f(x)}, \exp\left[i(x',\sigma')\right] j_\nu\left(x_n\sigma_n\right)\right),$$

которая доказывается с помощью тех же рассуждений, что и соответствующая формула преобразования Фурье финитного функционала из $\mathcal{D}'$ (см.,напр., [15, гл.2, § 3, п. 4]). При этом функция $\hat{f}_\nu(\sigma)$ принадлежит классу $C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n\right)$ и допускает аналитическое продолжение в n- мерное комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ по формуле

$$\hat{f}_\nu(s) = \left(\overline{f(x)}, \exp\left[i(x',s')\right] j_\nu\left(x_n s_n\right)\right).$$

Пусть $B_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < \varepsilon\}$ — шар радиуса ε с центром в начале координат и $G \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ — некоторое множество. Символом G^ε будем обозначать ε-окрестность множества G, то есть множество $G + B_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n : x = y + z, y \in G, z \in B_\varepsilon\}$. Легко видеть, что если множество G симметрично относительно гиперплоскости $x_n = 0$, то множество G^ε также симметрично относительно этой гиперплоскости.

Через Γ^0_G будем обозначать проекцию множества G на гиперплоскость $x_n = 0$, а через $\Gamma_{G,a'}$ — сечение множества G прямой $x' = a'$, где $a' \in \Gamma^0_G$ (здесь $n \geq 2$). Введем также обозначения:

$$x_n^{\max}\left(a', G\right) = \sup_{x \in \Gamma_{G,a'}} \left|x_n\right|, \quad a' \in \Gamma^0_G, \quad n \geq 2;$$

$$N^{\xi,j}_x(G) = \Big\{x \in \mathbf{R}^n : x' = \xi' + a',$$

$$x_n = (-1)^j\left|\xi_n\right| + t x_n^{\max}\left(a', G\right), -1 \leq t \leq 1, \; a' \in \Gamma^0_G\Big\},$$

$$\xi \in \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2, \quad j = 1,2;$$

$$N_x^{\xi}(G) = N_x^{\xi,1}(G) \cup N_x^{\xi,2}(G).$$

Нижний индекс в обозначении множества $N_x^{\xi}(G)$ указывает на то, как обозначаются точки этого множества. Заметим, что если $x_n^{\max}(a',G) = \infty$ для некоторого $a' \in \Gamma_G^0$, то приведенная выше запись для значений x_n означает, что соответствующее значение x_n изменяется на всей вещественной оси.

В случае $n = 1$ множество $N_x^{\xi}(G)$ определяется аналогичным образом.

Введем в рассмотрение интегральный оператор обобщенного сдвига T_x^y, действующий по формуле

$$T_x^y v(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} v\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}\right) \sin^{k-1}\theta d\theta,$$

$$x, y \in \mathbf{R}, \quad v(x) \in C_+(\mathbf{R}).$$

Оператор обобщенного сдвига обладает рядом свойств, расссмотренных впервые в работах [20, 21], которые позволяют эффективно использовать его в теории уравнений с частными производными, содержащих оператор Бесселя. Заметим, что функция $T_x^y v(x)$ четна по каждой из переменных x, y и что если $v \in S_+(\mathbf{R})$, то $T_x^y v(x) \in S_+(\mathbf{R})$ [19]. Имеют место также следующие свойства оператора T_x^y [21].

1) Ограниченность оператора T_x^y:

$$\left|T_x^y v(x)\right| \le T_x^y \left|v(x)\right| \le \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|v(x)\right|.$$

2) Если $v(x) = 0$ для $x \ge a > 0$, то $T_x^y f(x) = 0$ для $|x - y| \ge a$.

3) Справедливы формулы

$$T_x^y 1 = 1, \tag{1.9}$$

$$T_x^y j_\nu(\lambda x) = j_\nu(\lambda y) j_\nu(\lambda x), \quad \lambda, x, y \in \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

4) Самосопряженность оператора T_x^y: если $f(x)$ — непрерывная функция класса $L_{1,k,+}(\mathbf{R})$ и $g(x)$ — функция класса $C_+(\mathbf{R})$, ограниченная в $\mathbf{R}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_x^y f(x) \cdot g(x) \,|\, x \,|^k dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) T_x^y g(x) \,|\, x \,|^k dx.$$

Согласно свойству 2) оператора обобщенного сдвига, если функция $v \in C_+^{\infty}(R)$ финитна и $\mathbf{R}_+ \cap \operatorname{supp} v \subset [a,b]$, где $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$, $b > a \ge 0$, то для каждого фиксированного $y \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{supp} T_x^y v(x) \subset \left[-|\,y\,| - b, -|\,y\,| + b\right] \cup$$
$$\cup \left[|\,y\,| - b, |\,y\,| + b\right].$$

Отсюда следует, что для любой функции $v \in C_+(\mathbf{R}^n)$, $n \ge 1$ и каждого фиксированного $\xi \in \mathbf{R}^n$ имеет место вложение

$$\operatorname{supp} T_{x_n}^{\xi_n} v(x' - \xi', x_n) \subset N_x^{\xi}(\operatorname{supp} v).$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть $f(x)$ — произвольная функция класса $C_+(\mathbf{R})$, удовлетворяющая условию*

$$|\, f(x) \,| \le C(1 + |\, x \,|)^N, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1.11}$$

где $C > 0$ и N — некоторые постоянные, и $\psi(x)$ — функция класса $S_+ = S_+(\mathbf{R})$. Тогда имеет место свойство самосопряженности оператора обобщенного сдвига, то есть для любого фиксированного $y \in \mathbf{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) T_x^y \psi(x) |x|^k dx = \int_{-\infty}^{\infty} T_x^y f(x) \cdot \psi(x) |x|^k dx. \tag{1.12}$$

Доказательство. Заметим, что в случае $N \le 0$ утверждение леммы следует из свойства 4) оператора обобщенного сдвига.

Пусть $N > 0$. Так как пространство D_+ плотно в S_+, то найдется последовательность функций $\varphi_m \in D_+$, $m = 1, 2, \ldots$, сходящаяся в пространстве S_+ к функции $\psi(x)$. Это означает, в частности, что последовательность φ_m, $m = 1, 2, \ldots$ равномерно сходится в $\mathbf{R}$ к функции $\psi(x)$. В силу свойства 4) оператора обобщенного сдвига имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) T_x^y \varphi_m(x) \,|\, x \,|^k dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T_x^y f(x) \cdot \varphi_m(x) \,|\, x \,|^k dx, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{1.13}$$

Так как $\psi \in S_+$, то для всех $x \in \mathbf{R}$ и $l = 0, 1, \ldots$ справедливы оценки

$$|\, \psi(x) \,| \le C_l (1 + |\, x \,|)^{-l},$$

где $C_l > 0$ — некоторые постоянные. Поэтому

$$\left|T_x^y \psi(x)\right| \le T_x^y \,|\, \psi(x) \,| \le C_l T_x^y (1 + |\, x \,|)^{-l}. \tag{1.14}$$

Пусть $x, y \ge 0$. Тогда, учитывая, что

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta} \ge \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} =$$
$$= |\, x - y \,|,$$

и используя оценку (1.14), находим, что

$$\left|T_x^y \psi(x)\right| \le C_l (1 + |\, x - y \,|)^{-l}. \tag{1.15}$$

Заметим теперь, что для всех $x, y \in \mathbf{R}$

$$1+|x| \le 1+|x-y|+|y| \le$$
$$\le (1+|y|)(1+|x-y|),$$

откуда следует неравенство

$$(1+|x-y|)^{-l} \le (1+|y|)^{l}(1+|x|)^{-l}, \quad l=0,1,\ldots. \tag{1.16}$$

Используя (1.15) и (1.16), находим, что для любых $x, y \in \mathbf{R}$ и всех $l = 0,1,\ldots$ справедливо неравенство

$$|T_x^y \psi(x)| \le C_l (1+|y|)^l (1+|x|)^{-l}.$$

Отсюда и из оценки (1.11) следует сходимость интеграла в левой части равенства (1.12). Аналогично можно доказать и сходимость интеграла в правой части этого равенства.

Используя свойство 1) оператора обобщенного сдвига, имеем:

$$\left|T_x^y \varphi_m(x) - T_x^y \psi(x)\right| \le T_x^y \left|\varphi_m(x) - \psi(x)\right| \le$$
$$\le \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\varphi_m(x) - \psi(x)\right| \to 0, \quad m \to \infty$$

для всех $x, y \in \mathbf{R}$.

Переходя теперь к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (1.13), получим равенство (1.12). Лемма доказана.

Пусть $g \in \mathcal{D}'_+ \overset{def}{=} \mathcal{D}'_+\left(\mathbf{R}^n\right)$ и $\varphi \in \mathcal{D}_+ \overset{def}{=} \mathcal{D}_+\left(\mathbf{R}^n\right)$. Рассмотрим функцию

$$\eta_{g,\varphi}(\xi) = \left(g(x), T_{x_n}^{\xi_n} \varphi(x' + \xi', x_n)\right), \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Для функционалов f, $g \in \mathcal{D}'_+$ определим обобщенную свертку $f \circledast g$ по формуле

$$\left(f \circledast g, \varphi\right) = \left(f(\xi), \eta_{g,\varphi}(\xi)\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Как доказано в [8], свертка $f \circledast g$ существует и определяет функционал из $\mathcal{D}'_+$, если один из функционалов f или g финитен. В этом случае для любых мультииндексов α имеют место равенства

$$D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} (f \circledast g) = D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} f \circledast g = f \circledast D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n} g. \tag{1.17}$$

Формулы (1.17) доказываются с помощью тех же рассуждений, что и формулы дифференцирования обычной свертки [15—17]. Легко видеть также, что

$$f \circledast \delta = \delta \circledast f = f. \tag{1.18}$$

Как показано в работе [8], для любой обобщенной функции $g \in \mathcal{D}'_+$ и основной функции $\varphi \in \mathcal{D}_+$ имеет место вложение

$$\operatorname{supp}\eta_{g,\varphi} \subset \overline{\bigcup_{x\in \operatorname{supp} g} N_\xi^{-x}(\operatorname{supp}\varphi)}. \tag{1.19}$$

Замечание 1.1. В случае, когда $f \in \mathcal{D}'_+$, $g \in \Phi'_+$ и нас интересуют значения свертки $f \circledast g$ на ограниченном открытом множестве $G_s \subset R^n$ (то есть то, как действует функционал $f \circledast g$ на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}_+\left(G_s\right)$), то достаточно знать значения функционала f лишь в произвольной ε-окрестности Q_s^ε множества $Q_s = \overline{\bigcup_{x\in \operatorname{supp} g} N_\xi^{-x}\left(G_s\right)}$. Иными словами, если $\chi \in \mathcal{D}_+$ — основная функция, равная 1 на множестве Q_s и нулю вне множества Q_s^ε (существование такой функции следует из леммы 2 работы [5]), то на множестве G_s имеет место равенство

$$f \circledast g = \chi f \circledast g.$$

Действительно, согласно (1.19),

$$\operatorname{supp}\eta_{g,\varphi} \subset Q_s, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+\left(G_s\right),$$

и так как функция $1-\chi$ сосредоточена на множестве $\mathbf{R}^n \setminus Q_s$, то

$$((1-\chi) f \circledast g, \varphi) = \left(f(\xi), (1-\chi)\eta_{g,\varphi}(\xi)\right) = 0,$$
$$\varphi \in \mathcal{D}_+\left(G_s\right).$$

В работе [8] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.2. *Если $f \in \mathcal{D}'_+$ и $g \in C_{0,+}^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$, то свертка $f \circledast g$ является обычной функцией класса $C_+^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$, причем $f \circledast g = g \circledast f$.*

Теорема 1.3. *Если $f \in \mathcal{D}'_+$ и $g \in \Phi'_+$, то*

$$F_\nu[f \circledast g] = F_\nu[g] F_\nu[f].$$

Теорема 1.4. *Целая аналитическая функция $U(s)$, четная по переменной s_n, является преобразованием Фурье—Бесселя финитной обобщенной функции $f \in \Phi'_+$, сосредоточенной на множестве V_a, тогда и только тогда, когда для некоторых постоянных $C > 0$ и $N \ge 0$*

$$\left|U(s)\right| \le C(1+|s|)^N \exp\left(\sum_{j=1}^n a_j \left|\operatorname{Im} s_j\right|\right), \; s \in C^n.$$

Пусть $\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$.

Через $L_{p,k} = L_{p,k}\left(\mathbf{R}_+^n\right)$, $(1 \le p \le \infty)$ будем обозначать множество всех определенных почти везде в $\mathbf{R}_+^n$ измеримых функций $u^+(\xi)$, для которых конечна норма

$$\left\|u^+\right\|_{L_{p,k}} = \left\|u^+\right\|_{p,k} =$$
$$= \begin{cases} \left(2\int\limits_{R_+^n} \left|u^+(\xi)\right|^p \xi_n^k d\xi\right)^{\frac{1}{p}} & \text{для} \quad p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,max}\left|u^+(\xi)\right| & \text{для} \quad p = \infty, \end{cases} \tag{1.21}$$

где $\operatorname{vrai}\max\left|u^+(\xi)\right|$ — существенная верхняя грань [22, гл. I, п. 3] функции $u^+(\xi)$ по множеству $\mathbf{R}^n_+$.

Хотя при $p=\infty$ норма (1.21) не зависит от k, для единообразия мы сохраняем обозначение $\|\cdot\|_{\infty,k}$. То же самое относится и ко всем вводимым ниже пространствам и соответствующим нормам.

Заметим, что $L_{p,k}\left(\mathbf{R}^n_+\right)$ можно рассматривать как пространство $L^p\left(\mathbf{R}^n_+,\mathcal{B},\tilde{m}\right)$ [22, гл. I, п. 3], где $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра бэровских подмножеств из $\mathbf{R}^n_+$ и $\tilde{m}(d\xi)=2\xi_n^k d\xi = d\xi' d\left(\dfrac{2}{k+1}\xi_n^{k+1}\right)$. Отсюда и из соответствующих теорем для пространств указанного типа [22, гл. I, п. 9, гл. IV, п. 9] сразу вытекает, что пространство $L_{p,k}\left(\mathbf{R}^n_+\right)$ является банаховым и что для $1\le p<\infty$ сопряженным к этому пространству является пространство

$$L'_{p,k}\left(\mathbf{R}^n_+\right)=L_{q,k}\left(\mathbf{R}^n_+\right), \qquad (1.22)$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$. (Здесь, как и везде в настоящей работе, пространство, (топологически) сопряженное к линейному топологическому пространству T, обозначается через T'. Равенство (1.22) и другие аналогичные равенства понимаются с точностью до изометрии и изоморфизма (указанного ниже в каждом конкретном случае)). При этом каждому функционалу $f^+=L'_{p,k}$ ставится в соответствие единственная (с точностью до значений на множестве лебеговой меры нуль) функция $y^+(\xi)\in L_{q,k}$, такая, что

$$(f^+,u^+)=2\int\limits_{\mathbf{R}^n_+}\overline{y^+(\xi)}u^+(\xi)\xi_n^k d\xi,\ \ u^+\in L_{p,k}, \qquad (1.23)$$

и обратно, для каждой функции $y^+(\xi)\in L_{q,k}$ функционал f^+, действующий по формуле (1.23), принадлежит $L'_{p,k}$. Кроме того, $\left\|f^+\right\|_{L'_{p,k}}=\left\|y^+\right\|_{L_{q,k}}$.

Пусть A_+ — оператор четного продолжения по последней переменной функции, определенной на R^n_+, на все пространство $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $L_{p,k,+}$ ($1\le p\le\infty$) множество всех функций $u(\xi)=A_+u^+(\xi)$, где $u^+(\xi)\in L_{p,k}\left(\mathbf{R}^n_+\right)$.

Снабженное нормой

$$\|u\|_{p,k,+}=\left\|u^+\right\|_{p,k},$$

$L_{p,k,+}$ превращается в банахово пространство, изометрически изоморфное пространству $L_{p,k}$.

Заметим, что пространство $L'_{p,k,+}$ изометрически изоморфно пространству $L'_{p,k}=L_{q,k}$ ($1\le p<\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$), причем взаимнооднозначное соответствие между этими пространствами задается по формуле

$$(f,u)=(f^+,u^+),$$

где $f\in L'_{p,k,+}$, $u\in L_{p,k,+}$, $f^+\in L'_{p,k}$, $u^+\in L_{p,k}$, $u=A_+u^+$. Отсюда и из (1.23) сразу вытекает, что $L'_{p,k,+}=L_{q,k,+}$ для $1\le p<\infty$ и что общий вид функционала $f\in L'_{p,k,+}$ дается формулой

$$(f,u)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\overline{y(\xi)}u(\xi)\left|\xi_n\right|^k d\xi, \quad u\in L_{p,k,+}, \qquad (1.24)$$

где $y\in L_{q,k,+}$ и $\|f\|_{L'_{p,k,+}}=\|y\|_{L_{q,k,+}}$.

Следуя [9, 11], введем понятие медленно растущих весовых функций.

Определенная во всем пространстве $\mathbf{R}^n$ положительная функция μ называется *медленно растущей весовой функцией*, если существуют такие постоянные $C>0$ и $N>0$, что

$$\mu(\xi+\eta)\le(1+C\,|\,\xi\,|)^N\mu(\eta), \quad \xi,\eta\in\mathbf{R}^n.$$

Примерами медленно растущих весовых функций являются [9, 11]

$$\mu_t(\xi)=(1+|\,\xi\,|^2)^{t/2}, \quad t\in\mathbf{R}$$

и

$$\tilde{P}(\xi)=\left(\sum_{\alpha\ge0}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}P(\xi)}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $P(\xi)$ — многочлен от n переменных.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех медленно растущих весовых функций от n переменных, и пусть $\mathcal{M}_+$ — множество всех функций из $\mathcal{M}$, четных по последней переменной.

Через $L^\mu_{p,k,+}=L^\mu_{p,k,+}\left(\mathbf{R}^n\right)$, где $\mu\in\mathcal{M}_+$ и $1\le p\le\infty$, будем обозначать множество всех измеримых в $\mathbf{R}^n$ четных по последней переменной функций $v(\xi)$, для которых $\mu(\xi)v(\xi)\in L_{p,k,+}$. Норма в пространстве $L^\mu_{p,k,+}$ задается по формуле

$$\|v\|_{L^\mu_{p,k,+}}=\|v\|^{(\mu)}_{p,k}=\|\mu v\|_{p,k,+}.$$

Так как $\mu(\xi)\ne0$ для всех $\xi\in\mathbf{R}^n$, то отображение

$$L^\mu_{p,k,+}\ni v\to\mu v\in L_{p,k,+}$$

является изометрическим изоморфизмом пространств $L^\mu_{p,k,+}$ и $L_{p,k,+}$. Отсюда, в силу полноты пространства $L_{p,k,+}$, вытекает, что $L^\mu_{p,k,+}$ является банаховым пространством. С помощью тех же рассуждений, что и в [23, § 1] (см. также [9, теорема 2.2.1]), можно показать, что $L^\mu_{p,k,+}\subset S'_+$, причем вложение имеет место с топологией.

Через $\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+} = \mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}(\mathbf{R}^n)$ ($1 \le p \le \infty$, $\mu \in \mathcal{M}_+$) будем обозначать множество всех обобщенных функций $f \in \mathcal{D}'_+$, для которых $\hat{f}(\xi) = F_\nu[f](\xi) \in L^{\mu}_{p,k,+}$. Норма $\|\|\cdot\|\|_{\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}} = \|\|\cdot\|\|_{\mu,p,k}$ в пространстве $\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}$ задается по формуле

$$\|\|f\|\|_{\mu,p,k} = \|\hat{f}\|^{(\mu)}_{p,k} =$$

$$= \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|\mu(\xi)\hat{f}(\xi)\right|^p |\xi_n|^k d\xi \right)^{\frac{1}{p}} & \text{для} \quad p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,max} \left|\mu(\xi)\hat{f}(\xi)\right| & \text{для} \quad p = \infty \end{cases}$$

(здесь и в дальнейшем используется существенная верхняя грань соотвествующей функции по всему пространству $\mathbf{R}^n$).

Из данного определения вытекает, что

$$F_\nu \mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+} = L^{\mu}_{p,k,+}$$

(ср. с равенством (2.2) в [23]). Таким образом, оператор F_ν является изометрическим изоморфизмом пространства $\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}$ на $L^{\mu}_{p,k,+}$. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}$, как и $L^{\mu}_{p,k,+}$, является банаховым.

Покажем, что для $1 \le p < \infty$

$$\left(\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}\right)' = \mathcal{B}^{1/\mu}_{q,k,+},$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Действительно, если элемент $f \in \mathcal{B}^{1/\mu}_{q,k,+}$, то ему может быть поставлен в соответствие линейный функционал $\tilde{f}$, действующий по формуле

$$(\tilde{f}, \varphi) = \int\limits_{R^n} \overline{\hat{f}(\xi)} \hat{\varphi}(\xi) |\xi_n|^k d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{\mu(\xi)} \overline{\hat{f}(\xi)} \mu(\xi)\hat{\varphi}(\xi) |\xi_n|^k d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}, \tag{1/27}$$

причем из неравенства Гельдера вытекает, что интеграл (1.27) сходится и что $\tilde{f} \in \left(\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}\right)$.

Обратно, если задан функционал $\tilde{f} \in \left(\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}\right)$, то из неравенства

$$\left|(\tilde{f}, \varphi)\right| \le C \|\|\varphi\|\|_{\mu,p,k} = C \|\mu\hat{\varphi}\|_{p,k,+}, \quad \varphi \in \mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}$$

($C = C(\tilde{f}) > 0$ — постоянная) и того факта, что функции вида $\mu(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ пробегают все пространство $L_{p,k,+}$, вытекает, что функционал $\tilde{f}_1$, действующий по формуле $(\tilde{f}_1, \chi) = (\tilde{f}, \varphi)$, где $\chi = \mu\hat{\varphi}$, принадлежит пространству $\mathrm{L}'_{p,k,+} = L_{q,k,+}$. Отсюда и из (1.24) следует, что найдется единственная (с точностью до значений на множестве лебеговой меры нуль) функция $y(\xi) \in L_{q,k,+}$, такая, что

$$(\tilde{f}, \varphi) = (\tilde{f}_1, \chi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \overline{y(\xi)} \chi(\xi) |\xi_n|^k d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{\mu(\xi)} \overline{\hat{f}(\xi)} \mu(\xi)\hat{\varphi}(\xi) |\xi_n|^k d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+},$$

где $f(x) = F_\nu^{-1}[\mu y](x) \in \mathcal{B}^{1/\mu}_{q,k,+}$ и

$$\|\|f\|\|_{\mathcal{B}^{1/\mu}_{q,k,+}} = \|y\|_{q,k,+} = \|\tilde{f}_1\|_{L'_{p,k,+}} =$$

$$= \sup_{\|\chi\|_{p,k,+} \le 1} \left|\left(\tilde{f}_1, \chi\right)\right| = \sup_{\|\|\varphi\|\|_{\mu,p,k} \le 1} \left|\left(\tilde{f}, \varphi\right)\right| = \|\tilde{f}\|_{\left(\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}\right)}.$$

Таким образом, каждому функционалу $\tilde{f} \in \left(\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}\right)$ может быть однозначно сопоставлен элемент $f \in \mathcal{B}^{1/\mu}_{q,k,+}$, а формула (1.27) дает общий вид функционала $\tilde{f} \in \left(\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}\right)$ и определяет изометрический изоморфизм пространств $\left(\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}\right)$ и $\mathcal{B}^{1/\mu}_{q,k,+}$. Тем самым равенство (1.26) доказано.

С помощью соответствующей модификации доказательства плотности пространства $\mathcal{D}$ в H^μ [23, § 2] можно доказать, что пространство $\mathcal{D}_+$ (и, тем более, S_+) плотно в $\mathcal{D}^{\mu}_{p,k,+}$, если $1 \le p < \infty$. Отметим также, что для $1 \le p \le \infty$

$$S_+ \subset \mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+} \subset S'_+,$$

причем вложения имеют место с топологией и $\mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}$ плотно в S'_+ (ср. с [9, теорема 2.2.1]).

Обозначим через $W^t_{p,k,+}$ пространство $\mathcal{B}^{\mu_t}_{p,k,+}$, где $\mu_t(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{t/2}$, $t \in \mathbf{R}$. При этом норму $\|\|\cdot\|\|_{\mu_t,p,k}$ мы будем обозначать через $\|\cdot\|_{t,p,k}$.

Для дальнейшего нам потребуется

Теорема 1.5. *Если* $b \in S_+$ *и* $f \in W^t_{p,k,+}$, *где* $1 \le p \le \infty$, $t \in R$, $t \in R$, *то* $bf \in W^t_{p,k,+}$, *причем*

$$\|bf\|_{t,p,k} \le c_{t,p,k} \|f\|_{t,p,k}, \tag{1.28}$$

где $c_{t,p,k} = c_{\nu,n} c^{1/q}_{(k)} \tilde{c}^{1/p}_{t,p,k}$ *для* $1 \le p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$c_{(k)} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|\hat{b}(\xi)\right| |\xi_n|^k d\xi,$$

$$\tilde{c}_{t,p,k} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|)^{p|t|} \left|\hat{b}(\xi)\right| |\xi_n|^k d\xi, \tag{1.29}$$

$$c_{t,\infty,k} = c_{\nu,n}\, \tilde{c}_{t,1,k}.$$

Доказательство. Проведем доказательство в случае $1 \le p < \infty$, в случае $p = \infty$ доказательство аналогично.

Предварительно заметим, что формула вида (1.20)

$$F_\nu\left[f_1 \circledast f_2\right](\sigma) = F_\nu[f_2](\sigma) F_\nu[f_1](\sigma) \tag{1.30}$$

остается справедливой в пространстве S'_+, когда $f_1 \in S'_+$ и $f_2 \in S_+$. Чтобы показать это, рассмотрим функцию

$$\eta_{f_2,\varphi}(\xi) = \left(f_2(x), T_{x_n}^{\xi_n} \varphi\left(x' + \xi', x_n\right) \right) =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} \overline{f_2(x)} T_{x_n}^{\xi_n} \varphi\left(x' + \xi', x_n\right) |x_n|^k \, dx,$$
$$\varphi \in S_+, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Используя свойство самосопряженности оператора обобщенного сдвига и формулу (1.10), находим, что

$$F_\nu[\eta_{f_2,\varphi}](\sigma) = \overline{F_\nu[f_2](\sigma)} F_\nu[\varphi](\sigma), \quad \sigma \in \mathbf{R}^n$$

(ср. с формулой (4.19) работы [8]).

Отсюда следует, что функции $F_\nu[\eta_{f_2,\varphi}]$ и $\eta_{f_2,\varphi}$ принадлежат S_+. Так как $f_1 \in S'_+$ и $\mathcal{D}_+$ плотно в S_+, то это означает, что свертка $f_1 \circledast f_2$, определяемая по формуле

$$(f_1 \circledast f_2, \tilde{\varphi}) = (f_1(\xi), \eta_{f_2,\tilde{\varphi}}(\xi)), \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}_+,$$

существует в пространстве $\mathcal{D}'_+$ и может быть однозначно продолжена до линейного непрерывного функционала на пространстве S_+. Для доказательства сделанного выше замечания остается применить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 4.4 работы [8] (при этом предполагается только, что функция φ (а, следовательно, и функция $\psi = F_\nu[\varphi]$) принадлежит S_+).

Определим д в о й н о е п р е о б р а з о в а н и е Ф у р ь е—Б е с с е л я функционала $f \in \mathcal{D}'_+$ по формуле

$$\left(F_\nu F_\nu f, F_\nu F_\nu \varphi\right) = \frac{1}{c_{\nu,n}} \left(F_\nu f, F_\nu \varphi\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+$$

(ср. с [17, гл. II, § 14]). Легко видеть, что

$$F_\nu F_\nu f = \frac{1}{c_{\nu,n}} f(-x', x_n), \tag{1.31}$$

где $f(-x', x_n)$ — функционал, действующий по формуле

$$\left(f\left(-x', x_n\right), \varphi(x)\right) = \left(f(x), \varphi\left(-x', x_n\right)\right),$$
$$\varphi \in \mathcal{D}'_+.$$

Пусть $f_1 = F_\nu[f]$ и $f_2 = F_\nu[b]$. Используя формулы (1.30) и (1.31) и учитывая, что функция f_1 принадлежит пространству $L_{p,k,+}^{\mu_t}$, а, следовательно, и S'_+, и что $f_2 \in S_+$, имеем:

$$F_\nu\left[F_\nu[f] \circledast F_\nu[b]\right](x) = F_\nu\left[F_\nu[b]\right](x) \times$$
$$\times F_\nu\left[F_\nu[f]\right](x) = \frac{1}{c_{\nu,n}^2} b\left(-x', x_n\right) f\left(-x', x_n\right),$$
$$F_\nu\left[F_\nu[bf]\right](x) = \frac{1}{c_{\nu,n}} b\left(-x', x_n\right) f\left(-x', x_n\right).$$

Следовательно, справедлива формула

$$\widehat{bf}(\xi) = c_{\nu,n}\left(\hat{f} \circledast \hat{b}\right)(\xi) =$$
$$= c_{\nu,n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\sigma) T_{\xi_n}^{\sigma_n} \hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right) |\sigma_n|^k \, d\sigma. \tag{1.32}$$

Оценим теперь сверху интеграл

$$I_1 = \|bf\|_{t,p,k}^p = \int_{\mathbf{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{pt}{2}} \left|\widehat{bf}(\xi)\right|^p |\xi_n|^k \, d\xi.$$

Из (1.32) и неравенства Гельдера следует, что

$$I_1 \le c_{\nu,n}^p \int_{\mathbf{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{pt}{2}} \times$$
$$\times \left[\int_{\mathbf{R}^n} \left|\hat{f}(\sigma)\right|^p \left|T_{\xi_n}^{\sigma_n} \hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right)\right| |\sigma_n|^k \, d\sigma \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left|T_{\xi_n}^{\sigma_n} \hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right)\right| |\sigma_n|^k \, d\sigma \right)^{p/q} \right] \times \tag{1.33}$$
$$\times |\xi_n|^k \, d\xi, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Используя свойства 1), 3), 4) оператора обобщенного сдвига, внутренний интеграл

$$I_2 = \int_{\mathbf{R}^n} \left|T_{\xi_n}^{\sigma_n} \hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right)\right| |\sigma_n|^k \, d\sigma$$

можно оценить следующим образом:

$$I_2 \le \int_{\mathbf{R}^n} T_{\xi_n}^{\sigma_n} \left|\hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right)\right| |\sigma_n|^k \, d\sigma =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left|\hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right)\right| |\sigma_n|^k \, d\sigma =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left|\hat{b}(\sigma)\right| |\sigma_n|^k \, d\sigma = c_{(k)}.$$

Из (1.33) теперь находим, что

$$I_1 \le c_{\nu,n}^p c_{(k)}^{p/q} \int_{R^n} |\ \hat{f}(\sigma)\ |^p |\ \sigma_n\ |^k \times$$
$$\times (\int_{R^n} \left(1 + |\ \xi\ |^2\right)^{\frac{pt}{2}} T_{\xi_n}^{\sigma_n} \left|\hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right)\right| \times$$
$$\times |\xi_n|^k \, d\xi) d\sigma.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_3 = \int_{\mathbf{R}^n} \left(1 + |\ \xi\ |^2\right)^{\frac{pt}{2}} T_{\xi_n}^{\sigma_n} \left|\hat{b}\left(\xi' - \sigma', \xi_n\right)\right| |\xi_n|^k \, d\xi.$$

Из леммы 1.1 следует, что

$$I_3 = 2 \int_{\mathbf{R}_+^n} T_{\xi_n}^{\sigma_n} \left(1 + |\ \xi' + \sigma', \xi_n\ |^2\right)^{\frac{pt}{2}} |\ \hat{b}(\xi)\ |\ \xi_n^k \, d\xi.$$

Используя оценки

$$T_{\xi_n}^{\sigma_n}\left(1+|\xi'+\sigma',\xi_n|^2\right)^t \le$$

$$\le\left(1+\left|\xi'+\sigma',\xi_n+(-1)^{\operatorname{sign} t}\sigma_n\right|^2\right)^t,$$

$$\xi,\sigma\in\mathbf{R}_+^n,\quad t\in\mathbf{R},$$

(ср. с оценками (1.14), (1.15)) и

$$(1+|\xi+\sigma|^2)^t\le(1+|\xi|)^{2|t|}(1+|\sigma|^2)^t,\ \ \xi,\sigma\in\mathbf{R}^n$$

(см. [11, с. 10, 11]), находим, что

$$I_3\le\tilde c_{t,p,k}(1+|\sigma|^2)^{\frac{pt}{2}},$$

где $\tilde c_{t,p,k}$ — постоянная, определяемая по формуле (1.29).

Таким образом,

$$I_1=\|bf\|_{t,p,k}^p\le c_{\nu,n}^p c_{(k)}^{p/q}\tilde c_{t,p,k}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left|\hat f(\sigma)\right|^p\left(1+|\sigma|^2\right)^{\frac{pt}{2}}|\,|\sigma_n|^k d\sigma=$$

$$=c_{t,p,k}^p\,\|f\|_{t,p,k}^p,$$

что и требовалось показать. Теорема доказана.

Обозначим через $\tilde C_+^m\left(\mathbf{R}^n\right)$ ($m\ge 0$ — целое) пространство всех функций $u(x)\in C_+^m\left(\mathbf{R}^n\right)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{\tilde C_+^m\left(\mathbf{R}^n\right)}=\|u\|_m=\sup_{|\alpha|\le m,x\in\mathbf{R}^n}\left|D_x^\alpha u(x)\right|.$$

Для дальнейшего нам потребуются оценки вида

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x_n^l}j_\nu(x_ns_n)\right|\le c^{(l)}\left|s_n\right|^l e^{\left|x_n\operatorname{Im}s_n\right|},l=0,1,2,\ldots,\quad(1.34)$$

где $0<c^{(l)}\le 1$ — некоторые постоянные, причем $c^{(0)}=1$. Эти оценки сразу следуют из представления функции j_ν в виде интеграла Пуассона [24, § 7.12)]:

$$j_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\dfrac12\right)}\int\limits_{-1}^{1}e^{izt}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac12}dt,$$

$$z\in C,\quad \nu>-\frac12.$$

Докажем теперь утверждение, аналогичное соответствующей теореме вложения для пространств Киприянова [12].

Теорема 1.6 *Если $1\le p\le\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ и функция $\mu\in\mathcal{M}_+$ такова, что $(1+|\xi|)^m/\mu(\xi)\in L_{q,k,+}$, то пространство $\mathcal{B}_{p,k,+}^\mu$ вложено в алгебраическом и топологическом смысле в пространство $\tilde C_+^m\left(\mathbf{R}^n\right)$.*

Доказательство. Для доказательства того, что функционал $f\in\mathcal{B}_{p,k,+}^\mu$ принадлежит классу $\tilde C_+^m\left(\mathbf{R}^n\right)$, достаточно показать равномерную сходимость каждого из интегралов

$$D_x^\alpha f(x)=c_{\nu,n}\int\limits_{R^n}\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}e^{-i(x,\xi)}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial\eta^{\alpha_n}}j_\nu(\eta)\right)\Bigg|_{\eta=x_n\xi_n}\hat f(\xi)\left|\xi_n\right|^k d\xi,$$

$$|\alpha|\le m,\quad x\in\mathbf{R}^n,$$

получаемых дифференцированием интеграла в формуле обратного преобразования Фурье—Бесселя функции $\hat f(\xi)$. Действительно, в этом случае функционал f может быть отождествлен с функцией $f(x)=F_\nu^{-1}[\hat f(\xi)](x)\in\tilde C_+^m\left(\mathbf{R}^n\right)$, так как

$$(f,\varphi)=c_{\nu,n}\left(\hat f(\xi),\hat\varphi(\xi)\right)=c_{\nu,n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\overline{\hat f(\xi)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\varphi(x)\,|\,x_n\,|^k dx\right)\left|\xi_n\right|^k d\xi=$$

$$=c_{\nu,n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\overline{\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{-i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\hat f(\xi)\left|\xi_n\right|^k d\xi}\right)\times$$

$$\times\varphi(x)\,|\,x_n\,|^k dx=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\overline{f(x)}\varphi(x)\,|\,x_n\,|^k dx,\ \ \varphi\in\mathcal{D}_+.$$

Используя оценки (1.34), неравенства

$$\left|\xi_j\right|^{\alpha_j}\le(1+|\xi|)^{\alpha_j},\quad j=1,\ldots,n$$

и неравенство Гельдера, из (1.35) находим, что

$$\left|D_x^\alpha f(x)\right|\le c_{\nu,n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left[\frac{(1+|\xi|)^m}{\mu(\xi)}\right]\mu(\xi)\times$$

$$\times|\hat f(\xi)|\left|\xi_n\right|^k d\xi\le c_{\nu,n}\left\|(1+|\xi|)^m/\mu(\xi)\right\|_{q,k,+}\times$$

$$\times\|f\|_{\mu,p,+}=\tilde c\,\|f\|_{\mu,p,+}<\infty,$$

$$|\alpha|\le m,\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

Отсюда сразу получаем оценку

$$\|f\|_m\le\tilde c\,\|f\|_{\mu,p,k},$$

которая и доказывает теорему.

Следствие 1.1. *Если $1\le p\le\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ и число t таково, что $t>\dfrac{n+k}{q}+m$, то пространство $W_{p,k,+}^t$ вложено в алгебраическом и топологическом смысле в пространство $\tilde C_+^m\left(\mathbf{R}^n\right)$.*

Пусть Ω_s — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Через $\mathcal{B}_{p,k,+}^{\mu,\mathrm{loc}}(\Omega_s)$ (соответственно, $W_{p,k,+}^{t,\mathrm{loc}}(\Omega_s)$) будем обозначать множество всех обобщенных функций $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$, таких что $\varphi f \in \mathcal{B}^{\mu}_{p,k,+}$ (соответственно, $\varphi f \in W^t_{p,k,+}$) для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_s)$. Мы будем использовать также обозначение $\mathcal{B}^{\mu,\text{loc}}_{p,k,+} = \mathcal{B}^{\mu,\text{loc}}_{p,k,+}(\mathbf{R}^n)$.

Из теоремы 1.6 сразу вытекает

Следствие 1.2. *Если выполнены условия теоремы 1.6 (соответственно, следствия 1.1), то пространство $\mathcal{B}^{\mu,\text{loc}}_{p,k,+}(\Omega_s)$ (соответственно, $W^{t,\text{loc}}_{p,k,+}(\Omega_s)$) вложено (в алгебраическом смысле) в пространство $C^m_+(\Omega_s)$.*

Приведем, наконец, теорему, касающуюся некоторых свойств свертки обобщенных функций из введенных выше пространств.

Теорема 1.7. А) *Если* $f_1 \in \mathcal{B}^{\mu_1}_{\infty,k,+}$ *и* $f_2 \in \mathcal{B}^{\mu_2}_{p,k,+} \cap \Phi'_+$, *то* $f_1 \circledast f_2 \in \mathcal{B}^{\mu_1\mu_2}_{p,k,+}$ *и справедлива оценка*

$$\left\|f_1 \circledast f_2\right\|_{\mu_1\mu_2,p,k} \le \left\|f_1\right\|_{\mu_1,\infty,k} \left\|f_2\right\|_{\mu_2,p,k}. \quad (1.36)$$

Б) *Если* $f_1 \in W^{t_1,\text{loc}}_{\infty,k,+}$ *и* $f_2 \in W^{t_2}_{p,k,+} \cap \Phi'_+$, *то* $f_1 \circledast f_2 \in W^{t_1+t_2,\text{loc}}_{p,k,+}$.

Доказательство. А) Неравенство (1.36) вытекает непосредственно из формулы (1.30) и оценки

$$\mu_1(\xi)\left|\hat{f}_1(\xi)\right| \le \left\|f_1\right\|_{\mu_1,\infty,k},$$

справедливой для почти всех $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Перейдем к доказательству утверждения Б). Пусть $\varphi \in D_+$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset G_s$, где G_s — открытое ограниченное множество. Из приведенного выше замечания 1.1 вытекает, что если $\chi \in \mathcal{D}_+$ — функция, равная 1 на множестве $\overline{\bigcup_{x\in\operatorname{supp} g} N^{-x}_{\xi}(G_s)}$ и 0 вне некоторой ε-окрестности этого множества, то на всем пространстве $\mathbf{R}^n$ имеет место равенство

$$\varphi(f_1 \circledast f_2) = \varphi(\chi f_1 \circledast f_2).$$

Для завершения доказательства теперь достаточно воспользоваться утверждением А) и теоремой 1.5. Теорема доказана.

§ 2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В-ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Фундаментальным решением оператора $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$ (или уравнения $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)u = 0$) будем называть обобщенную функцию $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$, удовлетворяющую уравнению

$$P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)\mathcal{E}(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.1)$$

Применяя формально к обеим частям уравнения (2.1) преобразование Фурье—Бесселя и используя формулы (1.6), (1.7), получаем уравнение в функционалах на пространстве Z_+:

$$\bar{P}_1(s)E(s) = 1,$$

где $P_1(s) = \bar{P}(s', -s_n^2)$ — характеристический многочлен оператора $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$ и $E(s) = F_\nu[\mathcal{E}](s)$ (здесь $\bar{P}$ — многочлен, получаемый из P заменой его коэффициентов на комплексно сопряженные к ним).

В работе [6] доказано существование фундаментального решения $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'_+$ для любого сингулярного дифференциального оператора $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \not\equiv 0$.

Оператор $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \not\equiv \text{const}$ (и уравнение $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)u = f$, где $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_s)$) будем называть В-гипоэллиптическим (или сингулярным гипоэллиптическим), если гипоэллиптическим [9, 11] является его характеристический многочлен P_1 (при этом, как легко видеть, гипоэллиптическим является и многочлен $P(s', -s_n^2)$).

Отметим, что В-гипоэллиптическими являются все В-эллиптические [18] и В-параболические операторы (оператор $P\left(i\dfrac{\partial}{\partial t}, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ называется В-параболическим, если параболическим, по Петровскому [25], является его характеристический многочлен $\bar{P}(\lambda, s', -s_n^2)$). Примером неклассического В-гипоэллиптического уравнения является линеаризованное стационарное вязкое трансзвуковое уравнение с осевой симметрией [26—28]

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2),$$

где $f(x_1, x_2)$ — заданная функция. В случае $n = 1$ В-гипоэллиптическим (точнее, В-эллиптическим) является любой сингулярный дифференциальный оператор $P(B_x) \not\equiv \text{const}$.

Пусть $n \ge 2$ и

$$d(\xi) = \inf_{s\in C^n : P_1(s)=0} |s - \xi|$$

— расстояние от некоторой точки $\xi \in \mathbf{R}^n$ до поверхности $P_1(s) = 0$.

Так как $P_1(s)$ — гипоэллиптический многочлен, то найдется такое число $R > 0$, что при $|\xi| \ge R$

$$d(\xi) \ge c\,|\,\xi\,|^\gamma, \quad (2.2)$$

где $c > 0$ и $0 < \gamma \le 1$ — постоянные, не зависящие от ξ.

Точная верхняя грань тех значений γ, для которых справедливо неравенство (2.2), называется показателем гипоэллиптичности многочлена $P_1(\xi)$. Известно, что показатель гипоэллиптичности многочлена $P_1(\xi)$ равен 1 тогда и только тогда, когда этот многочлен является эллиптическим.

В [9] показано также, что условие (2.2) эквивалентно следующему: для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha', \alpha_n) \neq 0$ существует не зависящая от ξ постоянная $c^{(\alpha)} > 0$, такая, что при $|\xi| \geq R$

$$\frac{|D_\xi^\alpha P_1(\xi)|}{P_1(\xi)} \leq c^{(\alpha)} |\xi|^{-|\alpha|\gamma}. \qquad (2.3)$$

Пусть

$$\tilde{P}_1(\xi) = \left(\sum_{\alpha \geq 0} \left|D_\xi^\alpha P_1(\xi)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.4)$$

Учитывая, что $P_1(\xi)$ — четный по переменной ξ_n многочлен, легко видеть, что функция $\tilde{P}_1(\xi)$ четна по ξ_n. Так как $\tilde{P}_1(\xi)$ является медленно растущей весовой функцией (см. § 1 настоящей работы), то это означает, что $P_1 \in \mathcal{M}_+$. Заметим также, что $\tilde{\tilde{L}}(\xi) = \tilde{L}(\xi)$ для любого многочлена $L(\xi)$.

Используя неравенство (2.3), находим, что при $|\xi| \geq R$

$$|P_1(\xi)| \geq c_1 \tilde{P}_1(\xi) \geq c_2 |\xi|^{m\gamma} \geq c_3 \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m\gamma}{2}}, \qquad (2.5)$$

где m — степень многочлена P_1 и c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные, не зависящие от ξ, причем $c_3 \leq c_2\left[1 + (1/R^2)\right]^{-m\gamma/2}$.

Из результатов работ [9, 29] следует, что гипоэллиптический многочлен $P_1(s)$ может быть записан в виде

$$P_1(s) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j s_j^{m_j} + P_2\left(s', -s_n^2\right), \quad s \in C^n, \qquad (2.6)$$

где $\rho_j \neq 0$ — некоторые постоянные, $m_1 \geq 1, \ldots, m_{n-1} \geq 1$, $m_n \geq 2$ (число m_n четное), а степень многочлена $P_2\left(s', -s_n^2\right)$ по каждой из переменных s_j ($1 \leq j \leq n$) при фиксированных остальных переменных меньше, чем m_j. При этом, если $P_1(s)$ — эллиптический многочлен степени $2m$, то $m_1 = \ldots = m_n = 2m$.

Пусть $s^1 = (s_2, \ldots, s_n)$,

$$s^j = (s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_n),$$

для $j = 2, \ldots, n-1$, $s^n = s' = (s_1, \ldots, s_{n-1})$, $s_j = \sigma_j + i\tau_j$ для $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\chi_{j,l}\left(s^j\right)$, $l = 1, \ldots, m_j$ корни $P_1(s)$ как многочлена от переменной s_j при фиксированных остальных переменных. Тогда

$$P_1(s) = \rho_j\left(s_j - \chi_{j,1}\left(s^j\right)\right) \cdots \left(s_j - \chi_{j,m_j}\left(s^j\right)\right),$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Введем в рассмотрение векторы

$$\mu^{1,l} = \left(\chi_{1,l}\left(\sigma^1\right), \sigma^1\right), \quad l = 1, \ldots, m_1,$$
$$\mu^{j,l} = \left(\sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}, \chi_{j,l}\left(\sigma^j\right), \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_n\right),$$
$$j = 2, \ldots, n-1, \quad l = 1, \ldots, m_j,$$
$$\mu^{n,l} = \left(\sigma^n, \chi_{n,l}\left(\sigma_n\right)\right), \quad l = 1, \ldots, m_n.$$

Очевидно, что для всех $j = 1, \ldots, n$ и $l = 1, \ldots, m_j$

$$P_1\left(\mu^{j,l}\right) = 0.$$

Отсюда и из (2.2) следует, что при $|\sigma| \geq R$

$$\left|\sigma_j - \chi_{j,l}\left(\sigma^j\right)\right| = \left|\mu^{j,l} - \sigma\right| \geq d(\sigma) \geq c|\sigma|^\gamma \qquad (2.8)$$

для всех $j = 1, \ldots, n$ и $l = 1, \ldots, m_j$.

Перейдем теперь к построению фундаментального решения оператора $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$.

Пусть $Q_1 = \left\{\sigma^1 \in \mathbf{R}^{n-1} : \left|\sigma^1\right| < R\right\}$. Так как корни $\chi_{1,1}\left(\sigma^1\right), \ldots, \chi_{1,m_1}\left(\sigma^1\right)$ являются непрерывными функциями от σ^1, то найдется постоянная $R_1 > 0$, такая, что для всех $l = 1, \ldots, m_1$ и $\sigma^1 \in \bar{Q}_1$

$$\left|\chi_{1,l}(\sigma^1)\right| < R_1. \qquad (2.9)$$

Пусть $R_2 = \max(R, R_1)$, $Q_2 = (-R_2, R_2)Q_1$ и $Q_3 = \mathbf{R}^n \setminus Q_2$. Очевидно, что оценки (2.5) выполняются при $\sigma = \xi \in Q_3$.

Пусть Σ^1 — произвольная кусочно-гладкая кривая в s_1-плоскости, соединяющая точки $M_1 = (-R_2, 0)$ и $M_2 = (R_2, 0)$ и лежащая вне круга $\sigma_1^2 + \tau_1^2 < R_2^2$. Предполагается, что кривая Σ^1 ориентирована от точки M_1 к точке M_2. Из формулы (2.7) при $j = 1$ и неравенства (2.9) следует, что

$$\left|P_1\left(s_1, \sigma^1\right)\right| \geq \mathrm{const} > 0 \qquad (2.10)$$

при $\left(s_1, \sigma^1\right) \in \Sigma^1 \times \bar{Q}_1$.

Рассмотрим функционал $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}(x) \in \mathcal{D}'_+$, действующий по формуле

$$\left(\tilde{\mathcal{E}}, \varphi\right) = c_{\nu,n} \int_{\Sigma^1} ds_1 \int_{Q_1} \frac{\hat{\varphi}\left(s_1, \sigma^1\right)}{P_1\left(s_1, \sigma^1\right)} |\sigma_n|^k d\sigma^1 +$$
$$+ c_{\nu,n} \int_{Q_3} \frac{\hat{\varphi}(\sigma)}{P_1(\sigma)} |\sigma_n|^k d\sigma, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+. \qquad (2.11)$$

Существование интегралов в правой части формулы (2.11) следует из оценок (2.5), (2.10) и теоремы 1.1. Легко видеть также, что функционал $\tilde{\mathcal{E}}(x)$ является фундаментальным решением оператора $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$.

Изучим теперь более подробно каждое из слагаемых в формуле (2.11). Рассмотрим вначале функционал $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{D}'_+$, действующий по формуле

$$(\mathcal{E}_1, \varphi) = c_{\nu,n} \int_{\Sigma^1} ds_1 \int_{Q_1} \frac{\hat{\varphi}\left(s_1, \sigma^1\right)}{P_1\left(s_1, \sigma^1\right)} \mid \sigma_n \mid^k d\sigma^1, \quad (2.12)$$
$$\varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Пусть $\tilde{x} = \left(x_2, \ldots, x_{n-1}\right)$, $\tilde{\sigma} = \left(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\right)$ при $n \geq 3$ и $\tilde{x} = \tilde{\sigma} = 0$ при $n = 2$. Записывая функцию $\hat{\varphi}\left(s_1, \sigma_1\right)$ по формуле (1.2) и изменяя порядок интегрирования в (2.12) (что возможно, так как все рассматриваемые интегралы распространяются на ограниченные множества), находим, что

$$\left(\mathcal{E}_1, \varphi\right) = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{\mathcal{E}_1(x)} \varphi(x) \left|x_n\right|^k dx,$$

где

$$\overline{\mathcal{E}_1(x)} = c_{\nu,n} \int_{\Sigma^1} ds_1 \int_{Q_1} \frac{\exp\left[i x_1 s_1 + i\left(\tilde{x}, \tilde{\sigma}\right)\right]}{P_1\left(s_1, \sigma^1\right)} \times$$
$$\times j_\nu\left(x_n, \sigma_n\right) \mid \sigma_n \mid^k d\sigma^1.$$

Отсюда следует, что функции $\overline{\mathcal{E}_1(x)}$ и $\mathcal{E}_1(x)$ являются аналитическими в $\mathbf{R}^n$ и четными по последней переменной.

Пусть $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{D}'_+$ — функционал, действующий по формуле

$$\left(\mathcal{E}_2(x), \varphi(x)\right) = c_{\nu,n} \int_{Q_3} \frac{\hat{\varphi}(\sigma)}{P_1(\sigma)} \left|\sigma_n\right|^k d\sigma, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Легко видеть, что $\mathcal{E}_2(x) \in \mathcal{B}^{\tilde{P}_1}_{\infty,k,+}$. Действительно, используя (2.5), находим, что

$$\left|\left(\mathcal{E}_2, \varphi\right)\right| \leq \frac{c_{\nu,n}}{c_1} \int_{Q_3} \frac{\left|\hat{\varphi}(\sigma)\right|}{\tilde{P}_1(\sigma)} < \frac{c_{\nu,n}}{c_1} \left\|\varphi\right\|_{1/\tilde{P}_1, 1, k}, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Следовательно, в силу теоремы Хана—Банаха, функционал $\mathcal{E}_2$ может быть продолжен до линейного непрерывного функционала на пространстве $\mathcal{B}^{1/\tilde{P}_1}_{1,k,+}$. Так как $\left(\mathcal{B}^{1/\tilde{P}_1}_{1,k,+}\right) = \mathcal{B}^{\tilde{P}_1}_{\infty,k,+}$, то это и доказывает наше утверждение.

В работе [4] доказано также, что $\mathcal{E}_2(x) \in C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}\right)$, а из теоремы 3 статьи [5] следует, что если обобщенная функция $u(x) \in \mathcal{D}'_+$ является решением уравнения

$$P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) u(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (2.13)$$

то $u(x) \in C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n\right)$. Отсюда и из того факта, что любое фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ оператора $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$ можно записать в виде

$$\mathcal{E}(x) = \tilde{\mathcal{E}}(x) + u_0(x),$$

где $u_0(x)$ — решение уравнения (2.13) во всем пространстве $\mathbf{R}^n$, вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если $P\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$ есть B-гипоэллиптический оператор, то любое его фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ принадлежит классу $C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}\right)$ и может быть записано в виде*

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x) + \mathcal{E}_2(x),$$

где $\mathcal{E}_1(x) \in C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n\right)$ и $\mathcal{E}_2(x) \in C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}\right) \cap \mathcal{E}^{\tilde{P}_1}_{\infty,k,+}$.

§ 3. B-ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предварительно приведем некоторые определения и вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем.

Зафиксируем число $h > 0$. Через $W^{t,h}_{p,k,+}$, где $p \geq 1$ и $t \in \mathbf{R}$, будем обозначать пространство $\mathcal{B}^{\mu_{t,h}}_{p,k,+}$, где $\mu_{t,h}(\xi) = \left(1 + \mid h\xi \mid^2\right)^{t/2}$. При этом норму в пространстве $W^{t,h}_{p,k,+}$ (то есть норму $\left\| \cdot \right\|_{\mu_{t,h},p,k}$) мы будем обозначать через $\left\| \cdot \right\|_{t,p,k,h}$. Ясно, что норма $\left\| \cdot \right\|_{t,p,k,h}$ и норма $\left\| \cdot \right\|_{t,p,k} = \left\| \cdot \right\|_{t,p,k,1}$ пространства $W^t_{p,k,+}$ эквивалентны. Поэтому пространства $W^{t,h}_{p,k,+}$ и $W^t_{p,k,+}$ состоят из одних и тех же элементов, то есть $W^{t,h}_{p,k,+} = W^t_{p,k,+}$. В ряде случаев, однако, удобнее использовать норму $\left\| \cdot \right\|_{t,p,k,h}$, а не $\left\| \cdot \right\|_{t,p,k}$.

В работе [3, § 3.2] доказано следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Если $b \in S_+$, $p \geq 1$ и $t \in \mathbf{R}$, то найдется число $h_0 = h_0(b, t, p, k) > 0$ такое, что для всех $0 < h < h_0$ и всех $f \in W^t_{p,k,+} = W^{t,h}_{p,k,+}$*

$$\left\| bf \right\|_{t,p,k,h} \leq c^{(p,k)} \left\| f \right\|_{t,p,k,h},$$

где

$$c^{(p,k)} = \tilde{c}^{(p)} c_{\nu,n} \int_{\mathbf{R}^n} \mid \hat{b}(\xi) \left\| \xi_n \right|^k d\xi,$$

$\tilde{c}^{(p)} = 2^{1/p}$ для $1 \leq p < \infty$, $\tilde{c}^{(\infty)} = 2$.

Пусть $V(y, r)$ — шар с центром в некоторой точке $y \in \mathbf{R}^n$ радиуса r, и пусть $y^+ = \left(y', \mid y_n \mid\right)$, $y^- = \left(y', - \mid y_n \mid\right)$. Обозначим через Γ^0 гиперплоскость $x_n = 0$. Пусть $\varepsilon < 1$ — положительное число, меньшее, чем расстояние от точки y до Γ^0, если $y \notin \Gamma^0$. Пусть, далее, $\Lambda(x)$ — функция класса $C^\infty_{0,+}\left(R^n\right)$, равная 1 при $\mid x \mid \leq 1/2$ и 0 при $|x| \geq 1$, и пусть $\Lambda^+_\varepsilon(x) = \Lambda\left[(x - y^+)/\varepsilon\right]$. Рассмотрим функцию $\Lambda_\varepsilon(x)$, совпадающую с функцией $\Lambda^+_\varepsilon(x)$, если $y \in \Gamma^0$ или с четным продолжением по переменной x_n на все пространство R^n сужения функции $\Lambda_\varepsilon^+(x)$ на $\mathbf{R}_+^n$, если $y \notin \Gamma^0$. Ясно, что $\Lambda_\varepsilon(x) \in C_{0,+}^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$, причем $\Lambda_\varepsilon(x) = 1$ при $x \in \overline{V_s^{(\varepsilon/2)}(y)}$ и $\Lambda_\varepsilon(x) = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus V_s^{(\varepsilon)}(y)$, где $V_s^{(\varepsilon)}(y) = V\left(y^+, \varepsilon\right) \cup V\left(y^-, \varepsilon\right)$.

Имеет место следующее вспомогательное утверждение, доказанное в работе [3, § 3.2].

Лемма 3.2. *Пусть U_s — некоторая окрестность множества $V_s^{(\varepsilon)}(y)$, $v(x)$ — функция класса $C_+^\infty\left(U_s\right)$, обращающаяся в нуль в точках $x = y^+$ и $x = y^-$, и $g_\varepsilon(x) = \Lambda_\varepsilon(x)v(x)$. Предположим также, что $0 < k < 2$. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|\hat{g}_\varepsilon(\xi)\right|\left|\xi_n\right|^k d\xi \le \tilde{C}\varepsilon^{\frac{2-k}{2+\theta}},$$

где $\tilde{C}$ и θ — положительные постоянные, не зависящие от ε.

Пусть $Q \subset \mathbf{R}^n$ — некоторое множество, $Q^+ = R_+^n \cap Q$, Q^- — зеркальное отражение множества Q^+ относительно гиперплоскости Γ^0, $\Gamma_Q = Q \cap \Gamma^0$ (если $Q = Q_s$, (то есть множество Q симметрично относительно гиперплоскости $x_n = 0$), то множество $\mathbf{R}_+^n \cap Q_s$ будем также обозначать через Q^+, а не через Q_s^+). Пусть $x^+ = \left(x', x_n\right)$ — некоторая точка множества $Q^+ \cup \Gamma_Q$, $x^- = \left(x', -x_n\right)$ и V — некоторая окрестность точки x^+. Симметричное относительно гиперплоскости Γ^0 множество $V_s = V^+ \cup \Gamma_V \cup V^-$ будем называть окрестностью пары точек $\left(x^+; x^-\right)$ (если точка x^+ лежит в гиперплоскости Γ^0, то под парой точек $\left(x^+; x^-\right)$ понимается точка x^+).

Пусть L и M — многочлены от n переменных с постоянными коэффициентами. Будем говорить, что оператор $L\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$ слабее оператора $M\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$ и писать $L\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \prec M\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$, если многочлен $L_1(\xi) = \bar{L}\left(\xi', -\xi_n^2\right)$ слабее в смысле Хёрмандера [9, 29] многочлена $M_1(\xi) = \bar{M}\left(\xi', -\xi_n^2\right)$, то есть существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in R^n$

$$\frac{\tilde{L}_1(\xi)}{\tilde{M}_1(\xi)} < C_0, \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{L}_1(\xi) = \left(\sum_{\alpha \ge 0}\left|D_\xi^\alpha L_1(\xi)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если

$$L\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \prec M\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \prec L\left(D_{x'}, B_{x_n}\right),$$

то будем говорить, что операторы L и M и многочлены $L_1(\xi)$ и $M_1(\xi)$ одинаково сильны.

Пусть

$$P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_{x'}^{\alpha'} B_{x_n}^{\alpha_n}$$

— сингулярный дифференциальный оператор с комплекснозначными переменными коэффициентами. Введем следующие обозначения:

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

$$P_1(x, \xi) = \bar{P}\left(x, \xi', -\xi_n^2\right) = \\ = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{\alpha_n} \overline{a_\alpha(x)} (\xi')^{\alpha'} \xi_n^{2\alpha_n}, \\ \xi \in R^n.$$

Пусть y — некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^n$ и $y^+ = \left(y', \left|y_n\right|\right)$, $y^- = \left(y', -\left|y_n\right|\right)$. Мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) Существует окрестность H_s пары точек $\left(y^+; y^-\right)$ такая, что $a_\alpha(x) \in C_+^\infty\left(H_s\right)$, $|\alpha| \le m$;

2) Оператор $P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ сохраняет постоянную силу на множестве H_s, то есть для любых фиксированных точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in H_s$ операторы $P\left(x^{(1)}, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ и $P\left(x^{(2)}, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ одинаково сильны.

Пусть $\bar{P}^{(1)}\left(\xi', -\xi_n^2\right) \overset{def}{=} P_1^{(1)}(\xi), \ldots,$ $\bar{P}^{(l)}\left(\xi', -\xi_n^2\right) \overset{def}{=} P_1^{(l)}(\xi)$ — базис в конечномерном линейном пространстве четных по последней переменной многочленов с постоянными коэффициентами, которые слабее, чем $P_1(y, \xi)$. Так как для любых фиксированных точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in H_s$ многочлены $P_1\left(x^{(1)}, \xi\right)$ и $P_1\left(x^{(2)}, \xi\right)$ одинаково сильны, то имеет место разложение

$$P_1(x, \xi) = \sum_{j=1}^{l} c_j(x) P_1^{(j)}(\xi), \quad x \in H_s, \quad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

где коэффициенты $c_j(x)$ определяются единственным образом и принадлежат классу $C_+^\infty\left(H_s\right)$.

Отсюда следует, что

$$P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right) = \sum_{j=1}^{l} \overline{c_j(x)} P^{(j)}\left(D_{x'}, B_{x_n}\right), \ \ x \in H_s.$$

Последнее равенство можно также записать в виде

$$P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right) = P\left(y, D_{x'}, B_{x_n}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{l} b_{j,y}(x) P^{(j)}\left(D_{x'}, B_{x_n}\right), \tag{3.2}$$

где $b_{j,y}(x) = \overline{c_j(x)} - \overline{c_j(y)}$ — функции класса $C_+^\infty\left(H_s\right)$, обращающиеся в нуль в точках $x = y^+$ и $x = y^-$.

Пусть

$$\tilde{P}_{1,y}(\xi) = \left(\sum_{\alpha \geq 0} \left|D_\xi^\alpha P_1(y,\xi)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 3.1. *Пусть оператор* $P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ *является B-гипоэллиптическим в некоторой точке* $x = y \in R^n$ *и выполнены сформулированные выше условия 1), 2). Предположим также, что* $0 < k < 2$. *Тогда, если* $\Omega_s \Subset H_s$ *— некоторая достаточно малая окрестность пары точек* $\left(y^+; y^-\right)$, *то существует линейное отображение* E_y *пространства* Φ'_+ *в* $\mathcal{D}'_+$ *такое, что на множестве* Ω_s *имеют место равенства*

$$P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right) E_y f = f \tag{3.3}$$

и

$$E_y P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right) v = v \tag{3.4}$$

для всех $f \in \Phi'_+$ *и* $v \in \Phi'_+\left(\Omega_s\right)$. *Кроме того, если* $f \in \Phi'_+ \cap W_{p,k,+}^t$, $1 \leq p < \infty$, $t \in \mathbf{R}$, *то* $E_y f \in \mathcal{B}_{p,k,+}^{\tilde{P}_{1,y}\mu_t}$, *где* $\mu_t(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{t/2}$, *причем справедлива оценка*

$$\left\|E_y f\right\|_{\tilde{P}_{1,y}\mu_t, p, k} \leq C\left\|f\right\|_{\mu_t, p, k} = C\left\|f\right\|_{t,p,k} \tag{3.5}$$

с постоянной $C > 0$, *не зависящей от* f.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что при $x \in H_s$ оператор $P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ может быть записан в виде (3.2). Пусть $\mathcal{E}_y(x)$ — фундаментальное решение оператора $P\left(y, D_{x'}, B_{x_n}\right)$ (который рассматривается как оператор с постоянными коэффициентами, зависящими от y). Согласно теореме 2.1, фундаментальное решение $\mathcal{E}_y(x)$ представимо в виде

$$\mathcal{E}_y(x) = \mathcal{E}_{1,y}(x) + \mathcal{E}_{2,y}(x),$$

где $\mathcal{E}_{1,y}(x) \in C_+^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$ и

$$\mathcal{E}_{2,y}(x) \in C_+^\infty\left(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}\right) \cap \mathcal{B}_{\infty,k,+}^{\tilde{P}_{1,y}}.$$

Пусть χ — функция класса $C_{0,+}^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$, равная 1 на множестве $Q_s = \overline{\bigcup_{x \in H_s} N_\xi^{-x}\left(H_s\right)}$ и 0 вне некоторой ε-окрестности Q_s^ε множества Q_s. Рассмотрим функцию

$$F_y\left(x\right) = \chi(x)\mathcal{E}_{1,y}(x) + \mathcal{E}_{2,y}(x).$$

Так как функция $\chi(x)\mathcal{E}_{1,y}(x)$ принадлежит классу $C_{0,+}^\infty\left(\mathbf{R}^n\right)$, а, следовательно, и любому из классов $\mathcal{B}_{p,k,+}^\mu$, где $p \geq 1$ и $\mu \in \mathcal{M}_+$, то $F_y(x) \in \mathcal{B}_{\infty,k,+}^{\tilde{P}_{1,y}}$.

В силу замечания 1.1, на множестве H_s имеет место равенство $\chi\mathcal{E}_{1,y} \circledast v = \mathcal{E}_{1,y} \circledast v$ для всех $v \in \Phi'_+\left(H_s\right)$, и, следовательно,

$$\begin{gathered} P\left(y, D_{x'}, B_{x_n}\right)\left(F_y \circledast v\right) = \left(\chi\mathcal{E}_{1,y} + \mathcal{E}_{2,y}\right) \circledast \\ \circledast P\left(y, D_{x'}, B_{x_n}\right) v = \mathcal{E}_y \circledast P\left(y, D_{x'}, B_{x_n}\right) v = v, \\ v \in \Phi'_+\left(H_s\right) \end{gathered} \tag{3.6}$$

(здесь мы воспользовались равенствами (1.17), (1.18), (2.1)).

Пусть ε_0 — положительное число, такое, что

$$\varepsilon_0 < \begin{cases} 1, & \text{если } \ y_n = 0, \\ \min\left(1, |\, y_n \,|\right), & \text{если } \ y_n \neq 0 \end{cases}$$

и $V_s^{(\varepsilon_0)} = V_s^{(\varepsilon_0)}(y) \in H_s$. Рассмотрим функцию $\omega_\varepsilon(x) = \Lambda_{2\varepsilon}(x)$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 / 2$.

Докажем, что при достаточно малых ε уравнение

$$\begin{gathered} g(x) + \sum_{j=1}^l \omega_\varepsilon(x) b_{j,y}(x) \times \\ \times P^{(j)}\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)\left(F_y \circledast g\right)(x) = \omega_\varepsilon(x) f(x) \end{gathered} \tag{3.7}$$

имеет единственное решение $g \in \Phi'_+\left(H_s\right)$ для любого $f \in \Phi'_+$. Для этого изучим линейный оператор A_y, действующий по формуле

$$A_y \varphi = \sum_{j=1}^l \omega_\varepsilon b_{j,y} P^{(j)}\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)\left(F_y \circledast \varphi\right),$$

$$\varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Предварительно заметим, что так как $P^{(j)}\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) \prec P\left(y, D_{x'}, B_{x_n}\right)$, $F_y \in \mathcal{B}_{\infty,k,+}^{\tilde{P}_{1,y}}$ и $\tilde{\tilde{L}}(\xi) = \tilde{L}(\xi)$ для любого многочлена $L(\xi)$, то

$$\begin{gathered} \left\|P^{(j)}\left(D_{x'}, B_{x_n}\right) F_y\right\|_{1,\infty,k} = \\ = \operatorname{vrai\,max} |\, P^{(j)}(\xi', -\xi_n^2)\hat{F}_y(\xi) \,| \leq \\ \leq \operatorname{vrai\,max} |\, \tilde{P}_1^{(j)}(\xi)\hat{F}_y(\xi) \,| \leq \\ \leq C_1 \operatorname{vrai\,max} |\, \tilde{P}_{1,y}(\xi)\hat{F}_y(\xi) \,| = C_2 < \infty, \\ j = 1, \ldots, l, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, зависящие только от операторов $P\left(y, D_{x'}, B_{x_n}\right)$, $P^{(j)}\left(D_{x'}, B_{x_n}\right)$ ($j = 1, \ldots, l$) и от y.

Оценим теперь норму функции $A_y\varphi$ в пространстве $W_{p,k,+}^{t,h}$, где $t \in R^n$, $1 \leq p < \infty$, $h > 0$. Используя лемму 3.1, часть А) теоремы 1.7 и (3.8), находим, что при всех достаточно малых $h > 0$

$$\left\|A_y\varphi\right\|_{t,p,k,h} \le \sum_{j=1}^{l} C_{\varepsilon,j,y} \times$$

$$\times\left\|P^{(j)}\left(D_{x'},B_{x_n}\right)F_y \circledast \varphi\right\|_{t,p,k,h} \le \sum_{j=1}^{l} C_{\varepsilon,j,y} \times \qquad (3.9)$$

$$\times\left\|\left|P^{(j)}\left(D_{x'},B_{x_n}\right)F_y\right|\right\|_{1,\infty,k} \left\|\varphi\right\|_{t,p,k,h} \le$$

$$\le C_{\varepsilon,y}\left\|\varphi\right\|_{t,p,k,h},$$

где

$$C_{\varepsilon,y} = C_2\sum_{j=1}^{l} C_{\varepsilon,j,y} = 2^{1/p}c_{\nu,n}C_2 \times$$

$$\times\sum_{j=1}^{l}\int_{R^n}\left|F_\nu\left[\omega_\varepsilon b_{j,y}\right](\xi)\right|\left|\xi_n\right|^k d\xi.$$

Выберем число $0<\varepsilon<\varepsilon_0/2$ так, чтобы $C_{\varepsilon,y}\le 1/2$ (это возможно в силу леммы 3.2). Для дальнейшего важно заметить, что выбор ε не зависит от t.

Из оценки (3.9) теперь следует, что

$$\left\|A_y\varphi\right\|_{t,p,k,h} \le \frac{1}{2}\left\|\varphi\right\|_{t,p,k,h}, \quad \varphi\in\mathcal{D}_+, \qquad (3.10)$$

Так как D_+ плотно в $W^t_{p,k,+}=W^{t,h}_{p,k,+}$, то это означает, что оператор A_y может быть продолжен по непрерывности на пространство $W^{t,h}_{p,k,+}$ и, кроме того, $\left\|A_y\right\|\le\frac{1}{2}$. Поэтому уравнение (3.7), которое может быть записано в виде

$$g + A_y g = \omega_\varepsilon f, \qquad (3.11)$$

имеет единственное решение $g\in W^t_{p,k,+}$ для любого $f\in W^t_{p,k,+}$ (здесь мы учитываем, что $W^{t,h}_{p,k,+}=W^t_{p,k,+}$). Из (3.7) непосредственно следует, что $\operatorname{supp} g\subset V_s^{(\varepsilon_0)}\subset H_s$. Заметим теперь, что если f — произвольный функционал из Φ'_+, то, в силу теоремы 1.4, $f\in W^t_{p,k,+}$ для каждого фиксированного $p\ge 1$ и некоторого $t=t(f,n,p,k)\in R$. Отсюда и из предыдущего следует, что уравнение (3.7) имеет единственное решение $g=g(f)\in\Phi'_+\left(H_s\right)$ для любого $f\in\Phi'_+$.

Определим отображение $E_y:\Phi'_+\to\mathcal{D}'_+$ по формуле

$$E_y f = F_y\circledast g, \quad g=g(f), \quad f\underset{def}{\in}\Phi'_+. \qquad (3.12)$$

Покажем, что на множестве $\Omega_s=V_s^{(\varepsilon)}$ имеют место равенства (3.3) и (3.4).

Так как $g\in\Phi'_+\left(H_s\right)$, то из (3.2), (3.6) и (3.7) следует, что для всех $f\in\Phi'_+$

$$P\left(x,D_{x'},B_{x_n}\right)E_y f = P\left(y,D_{x'},B_{x_n}\right)\left(F_y\circledast g\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\omega_\varepsilon b_{j,y}P^{(j)}\left(D_{x'},B_{x_n}\right)\left(F_y\circledast g\right)=$$

$$= g+\sum_{j=1}^{l}\omega_\varepsilon b_{j,y}P^{(j)}\left(D_{x'},B_{x_n}\right)\left(F_y\circledast g\right)=\omega_\varepsilon f = f$$

на множестве Ω_s. Далее, если $v\in\Phi'_+\left(\Omega_s\right)$, то решением уравнения (3.7) при $f=P\left(x,D_{x'},B_{x_n}\right)v$ является функционал $g=P\left(y,D_{x'},B_{x_n}\right)v$. Действительно, согласно (3.6)

$$F_y\circledast g = F_y\circledast\left(P\left(y,D_{x'},B_{x_n}\right)v\right)=v,$$

и поэтому, в силу (3.2),

$$g+\sum_{j=1}^{l}\omega_\varepsilon b_{j,y}P^{(j)}\left(D_{x'},B_{x_n}\right)\left(F_y\circledast g\right)=$$

$$=P\left(y,D_{x'},B_{x_n}\right)v+\sum_{j=1}^{l}\omega_\varepsilon b_{j,y}\times$$

$$\times P^{(j)}\left(D_{x'},B_{x_n}\right)v = P\left(x,D_{x'},B_{x_n}\right)v=$$

$$= f = \omega_\varepsilon f$$

на множестве Ω_s. Отсюда и из (3.6) и (3.12) следует, что на множестве Ω_s

$$E_y P\left(x,D_{x'},B_{x_n}\right)v = F_y\circledast\left(P\left(y,D_{x'},B_{x_n}\right)v\right)=v.$$

Таким образом, равенства (3.3) и (3.4) доказаны.

Предположим теперь, что f — произвольный функционал, принадлежащий пространству $\Phi'_+\cap W^t_{p,k,+}=\Phi'_+\cap W^{t,h}_{p,k,+}$, где $1\le p<\infty$, $t\in R$ и h — достаточно малое положительное число. Тогда, используя (3.10) и (3.11), находим, что

$$\left\|\omega_\varepsilon f\right\|_{t,p,k,h} = \left\|g+A_y g\right\|_{t,p,k,h}\ge$$

$$\ge\left\|g\right\|_{t,p,k,h}-\left\|A_y\right\|_{t,p,k,h}\ge\frac{1}{2}\left\|g\right\|_{t,p,k,h}. \qquad (3.13)$$

Из теоремы 1.7, леммы 3.1 и неравенства (3.13) вытекает, что

$$\left\|\left|E_y f\right|\right\|_{\tilde{P}_{1,y}\mu_{t,h},p,k} = \left\|\left|F_y\circledast g\right|\right\|_{\tilde{P}_{1,y}\mu_{t,h},p,k}\le$$

$$\le\left\|\left|F_y\right|\right\|_{\tilde{P}_{1,y},\infty,k}\left\|g\right\|_{t,p,k,h}\le 2\left\|\left|F_y\right|\right\|_{\tilde{P}_{1,y},\infty,k}\times$$

$$\times\left\|\omega_\varepsilon f\right\|_{t,p,k,h}\le\tilde{c}\left\|f\right\|_{t,p,k,h},$$

где $\mu_{t,h}(\xi)=\left(1+|h\xi|^2\right)^{t/2}$, $\tilde{c}$ — положительная постоянная, не зависящая от f. Так как нормы $\left\|\left|\cdot\right|\right\|_{\tilde{P}_{1,y}\mu_{t,h},p,k}$ и $\left\|\cdot\right\|_{t,p,k,h}$ эквивалентны соответственно нормам $\left\|\left|\cdot\right|\right\|_{\tilde{P}_{1,y}\mu_t,p,k}$ и $\left\|\cdot\right\|_{t,p,k}$, то это означает справедливость оценки (3.5). Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1, и пусть f — произвольный функ-*

ционал из $\mathcal{D}'_+\left(H_s\right)$. Тогда существует обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'_+$, являющаяся на множестве $\mathbf{\Omega}_s \Subset H_s$ решением уравнения

$$P\left(x, D_{x'}, B_{x_n}\right)u = f.$$

При этом, если $f \in W^{t,\mathrm{loc}}_{p,k,+}\left(H_s\right)$, где $1 \le p < \infty$, $t \in \mathbf{R}$, то $u \in \mathcal{B}^{\tilde{P}_{1,y}\mu_t}_{p,k,+}$. В частности, если m — степень многочлена $\bar{P}\left(y, \xi', -\xi_n^2\right)$ и γ — показатель гипоэллиптичности этого многочлена по совокупности переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то $u \in W^{t+m\gamma}_{p,k,+}$; если $f \in C^\infty_+\left(H_s\right)$, то $u \in C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n\right)$.

Доказательство. Пусть число η таково, что для η-окрестности $\mathbf{\Omega}^\eta_s$ множества $\mathbf{\Omega}_s$ справедливо вложение $\mathbf{\Omega}^\eta_s \Subset H_s$. Пусть $\omega(x)$ — функция, равная 1 на множестве $\bar{\mathbf{\Omega}}_s$ и 0 на множестве $R^n \setminus \mathbf{\Omega}^\eta_s$. Положим

$$u = E_y(\omega f),$$

где E_y — построенное выше отображение пространства $\mathbf{\Phi}'_+$ в $\mathcal{D}'_+$. Используя теоремы 3.1, 1.6, а также оценки (2.5), легко видеть, что обобщенная функция u обладает всеми свойствами, перечисленными в следствии 3.1. Заметим лишь, что для справедливости последнего из утверждений (то есть того, что из условия $f \in C^\infty_+\left(H_s\right)$ следует, что $u \in C^\infty_+\left(\mathbf{R}^n\right)$) важен тот факт, что выбор множества $\mathbf{\Omega}_s$ не зависит от значений $t \in \mathbf{R}$, фигурирующих в теореме 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликов А. А.* О фундаментальных решениях и гипоэллиптичности некоторых сингулярных дифференциальных операторов / А. А. Куликов // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 266. — № 5. — С. 1049—1051.

2. *Куликов А. А.* О существовании и гладкости обобщенных решений B-гипоэллиптических уравнений / А. А. Куликов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273. — № 2. — С. 284—289.

3. *Куликов А. А.* Фундаментальные решения и гипоэллиптичность дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя : дисс. ... канд. физ.-мат. наук / А. А. Куликов. — Воронеж, 1983. — 128 с.

4. *Киприянов И. А.* Фундаментальные решения B-гипоэллиптических уравнений / И. А. Киприянов, А. А. Куликов // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27. № 8. — С. 1387—1395.

5. *Куликов А. А.* Некоторые свойства обобщенных решений B-гипоэллиптических уравнений / А. А. Куликов // Вестник факультета прикладной математики и механики. — Вып. 6. — Воронеж : ВГУ, 2007. — С. 73—83.

6. *Куликов А. А.* Фундаментальные решения дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя / А. А. Куликов// Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 2. — С. 299—305.

7. *Киприянов И. А.* Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя / И. А. Киприянов, А. А. Куликов // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 298. № 1. — С. 22—25.

8. *Куликов А. А.* Преобразование Фурье—Бесселя в теории сингулярных дифференциальных уравнений / А. А. Куликов, И. А. Киприянов // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35. — № 3. — С. 340—350.

9. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хёрмандер. — М. : Мир, 1965. — 380 с.

10. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными / Л. Хёрмандер. — М. : Мир, 1986. — Т. 1. — 464 с.

11. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными / Л. Хёрмандер. — М. : Мир, 1986. — Т. 2. — 456 с.

12. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов / И. А. Киприянов // Труды Матем. института АН СССР. — 1967. — Т. 89. — С. 130—213.

13. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука. Физматлит, 1997. — 208 с.

14. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1979. — 320 с.

15. *Гельфанд И. М.* Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 440 с.

16. *Гельфанд И. М.* Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 308 с.

17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

18. *Киприянов И. А.* Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений / И. А. Киприянов, В. И. Кононенко // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3. — № 1. — С. 114—129.

19. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с диференцмальными операторами типа Бесселя / Я. И. Житомирский// Матем. сборник. — 1955. — Т. 36. — № 2. — С. 299—310.

20. *Weinstain A.* Discontinuos integrals and generalized potential theory / A. Weinstain // Trans. Am. Math. Soc. — 1948. — Vol. 63. — P. 342—354.

21. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. М. Левитан// Успехи матем. наук. — 1951. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 102—143.

22. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

23. *Волевич Л. Р.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения / Л. Р. Воле-

вич, Б. П. Панеях // Успехи матем. наук. — 1965. — Т. 20. — Вып. 1. — С. 3—74.

24. *Бейтман Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.

25. *Шилов Г. Е.* Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициенами / Г. Е. Шилов // Успехи матем. наук. — 1959. — Т. 14. — Вып. 5. — С. 3—44.

26. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа / О. С. Рыжов // Прикл. матем. и мех. — 1965. — Т. 29. — Вып. 6. — С. 1004—1014.

27. *Диесперов В. Н.* Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ-уравнения / В. Н. Диесперов, Л. А. Ломакин // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. — 1974. — Т. 14. — № 5. — С. 1244—1260.

28. *Засорин Ю. В.* Неклассическая задача для пространственного вязкого трансзвукового уравнения / Ю. В. Засорин // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. — 1995. — Т. 35. — № 9. — С. 1401—1419.

29. *Хёрмандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. — М. : Изд-во иностр. литер., 1959. — 131 с.

30. *Люстерник Л. А.* Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Наука, 1965. —520 с.

Поступила в редакцию 28.11.2007