УДК 517.925

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

О. В. Кривошеева

Воронежский государственный университет

В работе получены некоторые новые утверждения о дифференциальных неравенствах первого порядка.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифференциальные неравенства первого порядка, производные числа Дини, приращение функции в банаховом пространстве.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоремы о дифференциальных неравенствах широко используются в качественной теории и численных методах обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [1], [2]), а также в математическом анализе (см., например, [3]). В данной заметке доказываются некоторые новые утверждения о дифференциальных неравенствах первого порядка.

2. ТЕОРЕМА О СТРОГОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ С ПРАВЫМ НИЖНИМ ПРОИЗВОДНЫМ ЧИСЛОМ

Известна следующая теорема о строгом дифференциальном неравенстве с левым нижним производным числом (см., например, [4], с. 7).

Теорема 2.1. *Пусть непрерывная функция* $y(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$_*Dy(t) < f[t, y(t)] \ (a < t \le b), \ y(a) \le x_0 \qquad (1)$$

и, если $y(a) = x_0$, *то*

$$D^* y(a) < f(a, x_0).$$

Пусть $x(t)$ *— решение задачи*

$$x'(t) = f[t, x(t)], \ x(a) = x_0, \qquad (2)$$

определенное на $[a, b]$.

Тогда

$$y(t) < x(t) \ (a < t \le b). \qquad (3)$$

Изучен вопрос о том, можно ли в условии (1) левое нижнее производное число заменить правым нижним?

Следующий пример показывает, что с сохранением утверждения (3) этого сделать нельзя.

Рассмотрим задачу Коши (2) с правой частью $f(t,x) = 2\sqrt{|x|} + |x|$ и начальным условием $x(-1) = 0$. Нетрудно видеть, что функция $x(t) \equiv 0$ является ее решением.

Рассмотрим функцию

$$y(t) = \begin{cases} -t^2, & t < 0, \\ -t, & t \ge 0. \end{cases}$$

Заметим, что она непрерывна. Вычислим ее правую производную:

$$y'_+(t) = \begin{cases} -2t, & t < 0, \\ -1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно, $y(-1) \le 0$. Покажем, что

$$y'_+(t) < f[t, y(t)]. \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что неравенство (4) имеет место при $t \ge 0$. Вычислим $f[t, y(t)]$ при $t < 0$:

$$f[t, y(t)] = 2\sqrt{|-t^2|} + |-t^2| = -2t + t^2.$$

Так как $t \ne 0$, $-2t < -2t + t^2$, то есть неравенство (4) выполнено.

Таким образом, функция $y(t)$ удовлетворяет условиям сформулированной выше теоремы с заменой левого нижнего производного числа на правое нижнее, а строгое неравенство (3) при этом не выполнено в точке $t = 0$.

Однако если заменить (3) соответствующим нестрогим неравенством, то теорема остается верной.

Теорема 2.2. *Пусть непрерывная на* $[a, b]$ *функция* $y(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$D_* y(t) < f[t, y(t)] \ \ (a \le t < b), \ \ y(a) \le x_0. \qquad (5)$$

Пусть $x(t)$ *— решение задачи (2), определенное на* $[a, b]$.

Тогда

$$y(t) \le x(t) \ (a \le t \le b).$$

Доказательство. Предположим противное, то есть

$$\exists (t^* \in (a, b])[y(t^*) > x(t^*)].$$

Рассмотрим множество всех тех точек $t \in [a, b)$, в которых $y(t) > x(t)$. Оно открыто и, следовательно, представляет собой объединение попарно не пересекающихся интервалов. Рассмотрим любой из этих интервалов. Пусть $\overline{t}$ — его левый конец, тогда, очевидно, $y(\overline{t}) = x(\overline{t})$. Поэтому из (5) и (2) следует, что $D_* y(\overline{t}) < x'(\overline{t})$. Это означает, что $y(t_n) < x(t_n)$ на некоторой последовательности точек, сходящейся справа к $\overline{t}$. Но это невозможно для рассматриваемого интервала. Значит, таких интервалов не существует.

Следующее утверждение показывает, что если в (1) левое нижнее производное число заменить не нижним, а верхним правым, то заключение (3) «почти сохраняется».

3. ТЕОРЕМА О СТРОГОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ С ПРАВЫМ ВЕРХНИМ ПРОИЗВОДНЫМ ЧИСЛОМ

Теорема 3.1. *Пусть непрерывная на* $[a, b]$ *функция* $y(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$D^* y(t) < f[t, y(t)] \ (a \le t < b), \ \ y(a) \le x_0. \quad (6)$$

Пусть $x(t)$ *— решение задачи (2), определенное на* $[a, b]$.

Тогда (3) выполнено для всех $t \in [a, b]$ *за исключением не более чем счетного множества* E.

Доказательство. Пусть $t^* \in E$, $t^* \ne b$, тогда из (2) и (6) получаем:

$$D^* y(t^*) < f[t^*, y(t^*)] = f[t^*, x(t^*)] = x'(t^*). \quad (7)$$

Покажем далее, что точке t^* можно сопоставить интервал $(t^*, \ t^* + \delta(t^*))$, на котором $y(t) < x(t)$. Для этого заметим, что $x'(t^*) = D_* x(t^*)$ и $-D_* x(t^*) = D^*[-x(t^*)]$. Тогда из (7) следует, что

$$D^*[y(t^*) - x(t^*)] < 0.$$

Поэтому для функции $z(t) = y(t) - x(t)$ имеем:

$$0 > D^* z(t^*) = \overline{\lim_{t \to t^*+0}} \frac{z(t) - z(t^*)}{t - t^*} =$$

$$= \lim_{\tau \to t^*+0} \sup_{t^* < t \le \tau} \frac{z(t) - z(t^*)}{t - t^*}.$$

Следовательно,

$$\sup_{t^* < t \le \tau} \frac{z(t) - z(t^*)}{t - t^*} < 0$$

при τ, достаточно близких к t^* справа, и

$$\frac{z(t) - z(t^*)}{t - t^*} < 0$$

при t, достаточно близких к t^* справа. Значит, $z(t) < z(t^*)$, или $y(t) < x(t)$ при тех же значениях t.

Очевидно, интервалы, сопоставленные разным точкам t^*, не пересекаются. Поскольку любое множество попарно не пересекающихся интервалов не более чем счетно, отсюда следует, что E не более чем счетно.

4. ТЕОРЕМА ОБ ОЦЕНКЕ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известна следующая теорема (см., например, [3], с. 45).

Теорема 4.1. *Пусть*

$$f : [a, b] \to F, \ g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

— непрерывные отображения, где F *— банахово пространство. Предположим, что во всех точках* $x \in [a, b]$, *за возможным исключением некоторого счетного множества точек* E, *существуют правые производные* $f'_+(x)$ *и* $g'_+(x)$, *удовлетворяющие неравенству*

$$\|f'_+(x)\| \le g'_+(x)$$

для $a < x < b$. *Тогда* $\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a)$.

Получена следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть вещественная функция* $f(t, x)$ *непрерывна в открытом* (t, x)*-множестве* $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ *и* $x^0(t)$ *— максимальное решение задачи Коши (2). Пусть функция* $y : [a, b] \to F$ *(банахово пространство) непрерывна на* $[a, b]$, *удовлетворяет условию* $\|y(a)\| \le x_0$ *и неравенство*

$$\left\| y_+{}'(t) \right\| \le f(t, \ \|y(t)\|)$$

имеет место на $[a, b]$, *за возможным исключением не более чем счетного множества* E. *Тогда на* $[a, b_1]$ *выполняется неравенство*

$$\|y(t)\| \le x^0(t),$$

где $[a, b_1]$ *— общий отрезок существования функций* $y(t)$ *и* $x^0(t)$.

Для доказательства этого факта нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. *Если функция* $y(t)$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и*

$$D^* y(t) \le 0 \quad (8)$$

всюду, кроме, быть может, точек счетного множества $E = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, *и* $y(a) \le 0$, *то*

$$y(t) \le 0 \ \text{при} \ t \in [a, b].$$

Доказательство. Для каждой точки t отрезка $[a, b]$ обозначим через N_t множество таких целых чисел $n > 0$, что $t_n < t$. Для любого $\varepsilon > 0$ докажем неравенство

$$y(t) \le \varepsilon(\sum_{n \in N_t} 2^{-n}) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon, \quad (9)$$

в котором затем перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получим требуемое неравенство.

Правую часть в (9) обозначим $z(t)$. Нетрудно видеть, что эта функция возрастает, непрерывна слева на $[a, b]$ и справа на $[a, b] \setminus E$. Через U обозначим множество точек t отрезка $[a, b]$, для которых неравенство (9) не имеет места, то есть

$$y(t) > z(t). \qquad (10)$$

Мы хотим показать, что множество U пусто. Предположим противное, тогда U имеет нижнюю грань c и элемент c удовлетворяет следующим трем условиям.

1) $c > a$. Действительно, $y(a) \le 0 < \varepsilon \le z(t)$, поэтому в силу непрерывности функции $y(t)$ неравенство $y(t) < z(t)$ сохраняется в некоторой правой окрестности точки a.

2) $c \notin U$, то есть

$$y(c) \le z(c), \qquad (11)$$

иначе в силу непрерывности слева обеих частей неравенства (10) оно выполнялось бы в некоторой левой окрестности точки c, и, следовательно, нижняя грань множества U лежала бы левее c.

3) $c < b$. Действительно, иначе множество U состояло бы только из точки b, и тогда $c = b \in U$, что противоречит 2).

Далее возможны два случая: $c \in E$ и $c \notin E$.

Пусть $c \in E$, тогда $c = t_{n_0}$. Рассмотрим значения обеих частей неравенства (9) в точке $c+\alpha$ $(\alpha > 0)$. Тогда

$$y(c+\alpha) = y(c) + [y(c+\alpha) - y(c)] <$$
$$< z(c) + 2^{-n_0} + \varepsilon\alpha + [y(c+\alpha) - y(c)] - 2^{-n_0} =$$
$$= z(c+\alpha) + [y(c+\alpha) - y(c)] - 2^{-n_0}.$$

Последнее выражение при малом α строго меньше $z(c+\alpha)$, так что (10) остается верным в некоторой правой окрестности точки c, что противоречит определению этой точки.

Пусть теперь $c \notin E$. Оценим снизу $D_* z(c)$. Заметим, что $D_*\left[\varepsilon(\sum_{n\in N_t} 2^{-n})\right] \ge 0$, поскольку функция в квадратных скобках является неубывающей. Следовательно, $D_* z(c) \ge \varepsilon$. Из (8) и последнего неравенства получаем:

$$D^*[y(t) - z(t)]_{t=c} \le 0 - \varepsilon < 0.$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы 3.1, следует, что $y(t) < z(t)$ в некоторой достаточно малой правой окрестности точки c, что противоречит определению инфимума.

Таким образом, мы пришли к противоречию в обоих случаях, откуда вытекает, что множество U пусто. Значит, (9) имеет место при $t \in [a, b]$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое неравенство.

Лемма 4.2 (по-видимому, утверждение такого типа впервые доказано Г. В. Мартыненко). *Пусть функция $y(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и*

$$D^* y(t) \le f[t, y(t)] \qquad (12)$$

всюду, кроме, быть может, точек счетного множества E.

Пусть f и $x^0(t)$ такие же, как в теореме 4.2, и $y(a) \le x_0$. Тогда справедливо неравенство

$$y(t) \le x^0(t)$$

на общем промежутке существования функций $y(t)$ и $x^0(t)$.

Доказательство. Рассмотрим новую функцию

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & x \ge y(t), \\ f[t, y(t)], & x < y(t). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что она непрерывна по совокупности переменных. Пусть $x^*(t)$ – максимальное решение задачи Коши

$$x'(t) = F[t, x(t)], \; x(a) = x_0;$$

$[a, b_2]$ — отрезок, на котором определены функции $y(t)$ и $x^*(t)$. Покажем, что $y(t) \le x^*(t)$ на $[a, b_2]$. Предположим противное, тогда

$$\exists (t^* : a < t^* \le b_2])[y(t^*) > x^*(t^*)].$$

В силу непрерывности функций $y(t)$, $x^*(t)$ и неравенства $y(a) \le x_0$ найдется такое $\bar{t} \in [a, t^*)$, что $y(\bar{t}) = x^*(\bar{t})$ и $y(t) > x^*(t)$ $(\bar{t} < t \le t^*)$. Тогда, обозначив $z(t) = y(t) - x^*(t)$, из (12) и определения функции $F(t, x)$, имеем:

$$D^* z(t) = D^* y(t) - x^{*\prime}(t) \le$$
$$\le f[t, y(t)] - f[t, y(t)] = 0 \; (\bar{t} < t \le t^*).$$

Следовательно, по лемме 4.1 при тех же значениях t

$$z(t) \le 0,$$

то есть $y(t) \le x^*(t)$ $(\bar{t} < t \le t^*)$, а это противоречит определению точки $\bar{t}$. Значит, $y(t) \le x^*(t)$ на $[a, b_2]$. Заметим, что при тех же значениях t $F[t, x^*(t)] = f[t, x^*(t)]$, то есть $x^*(t)$ — решение задачи (2). Следовательно, $x^*(t) = x^0(t)$ и в качестве b_2 можно взять b_1.

Доказательство теоремы о приращении функции в банаховом пространстве.

Сначала заметим, что справедлива следующая оценка:

$$D^* \|y(t)\| \le \left\|y_+'(t)\right\|.$$

Действительно,

$$\left\|y_+{}'(t)\right\| = \lim_{\Delta t\to +0} \frac{\left\|y(t+\Delta t) - y(t)\right\|}{\Delta t} =$$

$$= \overline{\lim_{\Delta t\to +0}} \frac{\left\|y(t+\Delta t) - y(t)\right\|}{\Delta t} \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{\Delta t\to +0}} \frac{\left\|y(t+\Delta t)\right\| - \left\|y(t)\right\|}{\Delta t} = D^* \left\|y(t)\right\|.$$

Следовательно, для функции $z(t) = \left\|y(t)\right\|$ выполнены условия леммы 4.2, откуда и вытекает заключение доказываемой теоремы.

Замечание. Условие счетности множества, на котором может не выполняться дифференциальное неравенство, нельзя заменить условием, чтобы это неравенство выполнялось почти всюду. Действительно, известен пример непрерывной всюду на отрезке функции, производная которой почти всюду равна нулю, но сама функция имеет на отрезке положительное приращение (см., например, [5] , с. 341).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Наука, 1966. — 332 с.

2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

3. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. — М. : Мир, 1971. — 392 с.

4. *Мамедов А. Д.* Теоремы о неравенствах / А. Д. Мамедов, С. Аширов, С. Атдаев. — Ашхабад : Ылым, 1980. — 232 с.

5. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 623 с.

Поступила в редакцию 31 марта 2008 г.