УДК 517.954

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ*

Е. А. Критская, В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

В гильбертовом пространстве для абстрактного линейного параболического уравнения с нелокальным интегральным условием на решение доказана с помощью аппроксимации точной задачи по Галеркину теорема существования и единственности слабого решения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гильбертово пространство, метод Галеркина, параболическое уравнение.

Предполагается, что задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u,v)| \le M \|u\|_V \|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \ge \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A: V \to V'$ такой, что для $u, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au, v)$. Отсюда следует оценка $\|A\|_{V \to V'} \le M$. Здесь под выражением типа (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z, v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H.

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int_0^T u(t)dt = \bar{u}. \qquad (2)$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и элемент $\bar{u}$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

В случае когда в (2) вместо интегрального условия задано начальное условие $u(0) = u^0$, то есть для параболического уравнения рассматривается задача Коши, вопросы существования слабого решения обсуждаются, например, в [1], [2]. При доказательстве слабой разрешимости задачи (2) в настоящей работе используется, как и в [2], аппроксимация точной задачи приближенной по Галеркину задачей с последующим обоснованием соответствующего слабого предельного перехода. Заметим также, что разрешимость задачи типа (2) при других более существенных ограничениях на исходные данные изучалась в [3].

Определим необходимое нам множество $D(A) = \{v \in V \mid Av \in H\}$.

Теорема. *Предположим, что в (2) функция* $f \in L_1(0,T;H) \cap L_2(0,T;V')$, *а элемент* $\bar{u} \in D(A)$. *Тогда существует единственная функция* $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$ *и* $u' \in L_2(0,T;V')$, *удовлетворяющая почти всюду на* $[0,T]$ *уравнению в (2), и выполняется интегральное условие. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2 \right) dt \le$$
$$\le M \left\{ \|A\bar{u}\|_H^2 + \left(\int_0^T \|f(t)\|_H \, dt \right)^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt \right\}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Предположим, что задача (2) имеет два решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Тогда для функции $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ выполняются условия:

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad \int_0^T u(t)dt = 0. \qquad (4)$$

Из первого равенства в (4) следует $u(T) - u(0) + A\int_0^T u(t)\,dt = 0$, то есть $u(T) = u(0)$. Затем первое равенство в (4) умножим скалярно в H на $u(t)$, возьмем удвоенную вещественную часть и проинтегрируем от 0 до T. Получим

$$\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2 + 2\int_0^T \operatorname{Re} a(u(t), u(t))dt = 0.$$

Из полученного равенства, свойства $u(T) = u(0)$ и предположений (1) следует, что $\|u(t)\|_V = 0$, то есть $u_1(t) = u_2(t)$.

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 07-01-00131.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная линейно независимая система элементов в пространстве V. Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$.

На V_m можно рассматривать нормы пространств V, H и V'. Определим также на элементах $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V_m} = \sup|(u_m, v_m)|,$$

где точная верхняя граница берется по всем $v_m \in V_m$ таким, что $\|v_m\|_V = 1$.

Далее через P_m обозначаем ортогональный проектор в пространстве H на $V_m \subset H$. Как известно [4], оператор P_m допускает продолжение по непрерывности $\overline{P}_m$ на пространство V', и для элементов $u \in V'$ справедлива оценка $\|\overline{P}_m u\|_{V_m} \le \|u\|_{V'}$. Отметим также, что $(\overline{P}_m u, v) = (u, P_m v)$, где $u \in V'$ и $v \in H$.

Определенную на $[0,T]$ функцию $t \to u_m(t) \in V_m$ назовем приближенным решением задачи (2), найденным по методу Галеркина, если

$$u_m(t) + \overline{P}_m A u_m(t) = P_m f(t), \quad \int_0^T u_m(t)dt = \bar{u}_m. \quad (5)$$

Элемент $\bar{u}_m \in V_m$ определим позже.

Задача (5) сводится к решению конечной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение. Очевидно, что задача (5), как и задача (2), имеет не более одного решения. Покажем, что решение существует.

Поскольку линейный оператор $\overline{P}_m A : V_m \to V_m$ ограничен, то всякое абсолютно непрерывное решение уравнения (5) имеет вид

$$u_m(t) = e^{-\overline{P}_m A t} u_m(0) + \int_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)} \overline{P}_m f(s) ds. \quad (6)$$

Найдем значение $u_m(0) \in V_m$, при котором решение $u_m(t)$ удовлетворяет интегральному условию. Равенство (6) интегрируем по t от 0 до T. Получим

$$\bar{u}_m = \int_0^T e^{-\overline{P}_m A t} u_m(0) dt + \int_0^T \left[\int_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)} \overline{P}_m f(s) ds \right] dt. \quad (7)$$

Установим обратимость в V_m оператора $\int_0^T e^{-\overline{P}_m A t}\, dt$. Из условия непрерывного вложения $V \subset H$ следует существование константы $\beta > 0$ такой, что для всех $v \in V$ выполняется $\|v\|_V \ge \beta^{1/2} \|v\|_H$. Далее для $v_m \in V_m$ получим

$$\|\overline{P}_m A v_m\|_H \|v_m\|_H \ge |(\overline{P}_m A v_m, v_m)| = |(A v_m, v_m)| =$$
$$= |a(v_m, v_m)| \ge \operatorname{Re} a(v_m, v_m) \ge \alpha \|v_m\|_V^2 \ge \alpha\beta \|v_m\|_H^2.$$

Отсюда следует, что $\|\overline{P}_m A v_m\|_H \ge \alpha\beta \|v_m\|_H$, то есть определен обратный оператор $(\overline{P}_m A)^{-1} : V_m \to V_m$ и $\|(\overline{P}_m A)^{-1}\|_{H\to H} \le (\alpha\beta)^{-1}$. Таким образом, $\int_0^T e^{-\overline{P}_m A t} dt = (\overline{P}_m A)^{-1}(I - e^{-\overline{P}_m A T})$.

Оценим норму оператора $e^{-\overline{P}_m A T} : V_m \to V_m$. Для всякого элемента $v_m \in V_m$ функция $v_m(t) = e^{-\overline{P}_m A t} v_m$ является решением задачи Коши

$$v'_m(t) + \overline{P}_m A v_m(t) = 0, \quad v_m(0) = v_m. \quad (8)$$

Из (8), (1) и непрерывного вложения $V \subset H$ следует оценка

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|_H^2 + 2\alpha\beta \|v_m(t)\|_H^2 \le 0.$$

Отсюда получим оценку $\|v_m(t)\|_H \le e^{-\alpha\beta t} \|v_m\|_H$. Следовательно, $\|e^{-\overline{P}_m A t}\|_{H\to H} \le e^{-\alpha\beta t}$ для всех $t \in [0,T]$.

Так как $e^{-\alpha\beta T} < 1$, то существует оператор $(\int_0^T e^{-\overline{P}_m A t}\, dt)^{-1} = (I - e^{-\overline{P}_m A T})^{-1} \overline{P}_m A : V_m \to V_m$. Заметим также, что

$$\|(I - e^{-\overline{P}_m A T})^{-1}\|_{H\to H} \le \frac{1}{1 - e^{-\alpha\beta T}} = M_1. \quad (9)$$

Таким образом, из (7) следует, что $u_m(t)$ будет решением задачи (5), если в (6) взять

$$u_m(0) = (I - e^{-\overline{P}_m A T})^{-1} \overline{P}_m A \Big\{ \bar{u}_m - \int_0^T \left[\int_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)} \overline{P}_m f(s)\, ds \right] dt \Big\}. \quad (10)$$

Итак, для любого $\bar{u}_m \in V_m$ установлена однозначная разрешимость задачи (5).

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Для решения $u_m(t)$ задачи (5) получим соотношение

$$(u'_m(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)).$$

Отсюда, с учетом (1), следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \alpha \|u_m(t)\|_V^2 \le \frac{1}{\alpha} \|f(t)\|_{V'}^2.$$

Последнее неравенство интегрируем от 0 до $t \le T$.

$$\|u_m(t)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 + \alpha\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2\, ds \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha}\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\, ds.$$

В результате получаем оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt \le$$
$$\le C\{\|u_m(0)\|_H^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\}. \qquad (11)$$

Покажем, что $\|u_m(0)\|_H$ оценивается равномерно по $m\in\mathbb{N}$. Из (10) и (9) следует оценка

$$\|u_m(0)\|_H \le M_1\|\overline{P}_m A\overline{u}_m\|_H +$$
$$+M_1\left\|\overline{P}_m A\int_0^T\left[\int_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}\overline{P}_m f(s)ds\right]dt\right\|_H. \quad (12)$$

Теперь зададим элемент $\overline{u}_m\in V_m$ так, что для всех $v_m\in V_m$ выполняется равенство

$$a(\overline{u}_m, v_m) = a(\overline{u}, v_m). \qquad (13)$$

Существование и единственность такого элемента следует из теоремы Лакса—Мильграмма [5]. Кроме того, в силу полноты системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ в пространстве V выполняется $\|\overline{u}_m - \overline{u}\|_V \to 0$ при $m\to\infty$. Далее воспользуемся равенством $\overline{P}_m A\overline{u}_m = \overline{P}_m A\overline{u}$, следующим из (13). А так как $\overline{u}\in D(A)$, то получим $\|\overline{P}_m A\overline{u}_m\|_H \le \|A\overline{u}\|_H$.

Для оценки второго слагаемого в правой части (12) проведем преобразование.

$$\overline{P}_m A\int_0^T\left[\int_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}\overline{P}_m f(s)ds\right]dt =$$
$$= \overline{P}_m A\int_0^T\left[\int_s^T e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\right]\overline{P}_m f(s)ds =$$
$$= -\int_0^T\left[\int_s^T \frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\right]\overline{P}_m f(s)ds =$$
$$= \int_0^T (I - e^{-\overline{P}_m A(T-s)})\overline{P}_m f(s)ds. \qquad (14)$$

Из (14) следует оценка

$$\left\|\overline{P}_m A\int_0^T\left[\int_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}\overline{P}_m f(s)ds\right]dt\right\|_H \le$$
$$\le 2\int_0^T \|f(s)\|_H\, ds.$$

Таким образом, из оценки (12) получена следующая оценка

$$\|u_m(0)\|_H^2 \le C\{\|A\overline{u}\|_H^2 + (\int_0^T \|f(t)\|_H\, dt)^2\}.$$

В результате оценка (11) примет окончательный вид

$$\max_{0\le t\le T}\|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt \le$$
$$\le C\left\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \left(\int_0^T \|f(t)\|_H\, dt\right)^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\right\}. \quad (15)$$

ОБОСНОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА

Из оценки (15) следует, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$. Отсюда следует [2], [6], что существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}\subset\{u_m(t)\}$, слабо сходящаяся в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторому элементу $u\in L_2(0,T;V)$. Покажем, что функция $u(t)$ является решением задачи (2).

Для всех μ из (5) получим

$$(u'_\mu(t),\varphi_j) + a(u_\mu(t),\varphi_j) = (f(t),\varphi_j) \quad (j=\overline{1,\mu}). \quad (16)$$

Умножим (16) на скалярную функцию $\psi\in C_0^\infty(0,T)$. После интегрирования по частям первого слагаемого получим равенства

$$-\int_0^T (u_\mu(t),\psi'(t)\varphi_j)dt + \int_0^T a(u_\mu(t),\psi(t)\varphi_j)dt =$$
$$= \int_0^T (f(t),\psi(t)\varphi_j)dt \quad (j=\overline{1,\mu}). \qquad (17)$$

Заметим, что функции $\psi'(t)\varphi_j, \psi(t)\varphi_j\in L_2(0,T;V)$. Тогда из (17) при $\mu\to\infty$ для всех $j\in\mathbb{N}$ получим

$$-\int_0^T (u(t),\psi'(t)\varphi_j)dt + \int_0^T a(u(t),\psi(t)\varphi_j)dt =$$
$$= \int_0^T (f(t),\psi(t)\varphi_j)dt \quad (j=\overline{1,\mu}). \qquad (18)$$

Так как система элементов $\{\varphi_j\}$ является полной в пространстве V, то из (18) предельным переходом установим равенство для всех $v\in V$:

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)dt + \int_0^T a(u(t),v)\psi(t)dt =$$
$$= \int_0^T (f(t),v)\psi(t)dt. \qquad (19)$$

Из (19) следует равенство в смысле обобщенных функций

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v).$$

Последнее равенство означает [2], [6], что функция $u(t)$ удовлетворяет в (2) уравнению.

Установим, что в (2) выполняется и интегральное условие. Напомним, что для всех μ справедливо равенство $\int_0^T u_\mu(t)\,dt = \overline{u}_\mu$ и $\|\overline{u}_\mu - \overline{u}\|_V \to 0$ при $\mu\to\infty$. Следовательно, для любого $v\in V'$

$$\left(\int_0^T u_\mu(t)dt, v\right) = (\bar{u}_\mu, v). \qquad (20)$$

Очевидно, что в (20) $(\bar{u}_\mu, v) \to (\bar{u}, v)$ при $\mu \to \infty$. Заметим теперь, что на функциях $z \in L_2(0,T;V)$ отображение $\Phi_v(z) = (\int_0^T z(t)\,dt, v)$ при всяком фиксированном $v \in V$ есть линейный функционал. Покажем, что этот функционал на $L_2(0,T;V)$ ограничен.

$$\left|\Phi_v(z)\right| \le \left\|\int_0^T z(t)dt\right\|_V \|v\|_{V'} \le$$

$$\le \sqrt{T}\,\|v\|_{V'} \left(\int_0^T \|z(t)\|_V^2\, dt\right)^{1/2}.$$

В таком случае $\Phi_v(u_\mu) \to \Phi_v(u)$ при $\mu \to \infty$. В результате из (20) получили, что

$$\left(\int_0^T u(t)dt, v\right) = (\bar{u}, v)$$

для любого $v \in V'$. Следовательно, $\int_0^T u(t)\,dt = \bar{u}$.

Осталось показать, что решение задачи (2) $u \in C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$ и обосновать оценку (3).

Так как решение $u \in L_2(0,T;V)$ и функция $f \in L_2(0,T;V')$, то из уравнения (2) следует, что $u' \in L_2(0,T;V')$. Но тогда [1], [2], функция $u \in C([0,T],H)$ и справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_H^2 \le K\int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2)dt. \qquad (21)$$

Поскольку $u(t)$ есть слабый предел в $L_2(0,T;V)$ последовательности функций $\{u_\mu(t)\}$, для которых выполняется оценка (15), то и для $u(t)$

$$\int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt \le$$

$$\le C\left\{\left\|A\bar{u}\right\|_H^2 + \left(\int_0^T \|f(t)\|_H\, dt\right)^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\right\}. \qquad (22)$$

Теперь оценка (3) следует из (2), (21) и (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 372 с.

2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 415 с.

3. *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений / В. В. Шелухин// Сибирский математ. журнал. — 1993. — Т. 34. — № 2. — С. 191—207.

4. *Вайникко Г. М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя// Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — № 7. — С. 1269—1277.

5. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М. : Мир, 1980. — 512 с.

6. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.