УКД 621.391

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. В. Корзунина, М. С. Лопасов

Воронежский государственный университет

Рассматривается применение метода конечных элементов к определению напряженно-деформированного состояния тела при нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями. Предлагается модификация метода начальных напряжений, которая в отличии от итерационного метода, рассмотренного в [1], позволяет найти решение за один шаг. Метод иллюстрирован на примере расчета цилиндрической заготовки при ее изгибе с растяжением по жесткому пуансону.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: упруго-пластическая задача, численное решение, метод начальных напряжений.

Применение метода конечных элементов к задачам линейной упругости сводится к методу перемещений, который заключается в минимизации полной потенциальной энергии системы, выраженной через поле перемещений. Известно [1], что определяющей системой уравнений метода конечных элементов для задач линейной упругости является линейная алгебраическая система уравнений вида:

$$[K]\{\delta\}+\{F\}_p+\{F\}_b+\{F\}_{\varepsilon_0}+\{F\}_{\sigma_0}-\{R\}=0, \quad (1)$$

где обобщенная матрица жесткости $[K]$ зависит от упругих характеристик материала E — модуль упругости и v — коэффициент Пуассона, а $\{F\}_p$, $\{F\}_b$, $\{R\}$, $\{F\}_{\varepsilon_0}$, $\{F\}_{\sigma_0}$ — усилия, приведенные к узлам конечных элементов, возникающие за счет начальных напряжений и деформаций ($\{F\}_{\sigma_0}$ и $\{F\}_{\varepsilon_0}$), а также за счет распределенной нагрузки на границе ($\{F\}_b$) и распределенных объемных нагрузок ($\{F\}_p$); символом $\{R\}$ обозначены сосредоточенные нагрузки, приложенные к узлам конечных элементов. Близость решения, полученного по методу конечных элементов, к точному решению определяется геометрическими параметрами сетки конечных элементов.

Отметим, что при выводе уравнений (1) использовались соотношения между напряжениями $\{\sigma\}$ и деформациями $\{\varepsilon\}$ в виде

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}. \quad (2)$$

Для случая, когда напряжения и деформации связаны нелинейной зависимостью

$$F(\{\sigma\},\{\varepsilon\})=0, \quad (3)$$

О. Зенкевичем [1] были предложены метод начальных напряжений и деформаций и метод переменной жесткости, основная идея которого сформулирована следующим образом:

Если удастся найти такое решение уравнения (1), что при соответствующем подборе одного или нескольких входящих в (2) параметров $[D]$, $\{\varepsilon_0\}$, $\{\sigma_0\}$ это уравнение и соотношение (3) удовлетворяются при одинаковых значениях напряжений и деформаций, то полученное решение будет искомым.

Согласно О. Зенкевичу метод начальных напряжений является итерационным процессом, который сходится единственным образом. Сначала находят нулевое приближение для перемещений из уравнения (1). Зенкевич определяет начальные напряжения, необходимые для приведения упругого решения для нагрузок в соответствие с напряжениями, удовлетворяющими уравнению (3) при достигнутых упругих деформациях. Далее с учетом полученных начальных напряжений вычисляется поле перемещений и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока решение для перемещений не перестанут меняться.

Указанное выше соответствие между упругими решениями, полученными в рамках метода конечных элементов, и реальными значениями напряжений при достигнутых деформациях можно трактовать по-разному. Малинин считает, что при условиях простого нагружения и существовании единой кривой течения тензор напряжения однозначно определяется достигнутым уровнем деформации [2]. Так, для технических приложений важным является удовлетворение связи между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформации ε_i:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i). \qquad (4)$$

В этом случае методом начальных напряжений получим решение за один шаг. Пусть в отсутствие начальных напряжений и деформаций поле перемещений из уравнения (1) определяет напряжения $\{\sigma\}$ и деформации $\{\varepsilon\}$. Тогда по интенсивности тензора достигнутых упругих деформаций ε_i из (4) определяется интенсивность тензора истинных напряжений σ_i^*. Введем в рассмотрение коэффициент k:

$$k = 1 - \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i}, \qquad (5)$$

где σ_i — интенсивность достигнутых упругих напряжений. Если теперь положить начальные напряжения

$$\{\sigma_0\} = k\{\sigma\}, \qquad (6)$$

то очевидно, что метод конечных элементов даст значения тензора упругих напряжений с интенсивностью, равной σ_i^*. Таким образом, для того, чтобы достигнутые упругие напряжения в целом соответствовали истинным напряжениям, взятым из кривой течения, достаточно сделать одну итерацию — взять начальные напряжения, пропорциональные упругим напряжениям $\{\sigma\}$.

Отметим, что описанный выше способ определения начальных напряжений $\{\sigma_0\}$ в МКЭ может быть распространен на задачи, физическая специфика которых позволяет определять одни компоненты тензора напряжений и деформаций независимо от других компонент. Так, при определении напряженно-деформированного состояния цилиндрической заготовки при ее изгибе с растяжением по жесткому пуансону приближенными методами могут быть определены напряжения и деформации в направлении обтяжки. Обозначим плоскость некоторого поперечного сечения заготовки (x,y), тогда направление z является направлением обтяжки и, следовательно, значения σ_z и ε_z известны. Деформирование заготовки в плоскости поперечного сечения на качественном уровне можно рассматривать как задачу о плоской деформации и получать решение методом конечных элементов с начальными напряжениями. Тогда, для соответствия упругого решения кривой течения (4) достаточно взять начальные напряжения в виде

$$\begin{cases} \sigma_{0xx} = k(\sigma_{xx} - \sigma_z) \\ \sigma_{0yy} = k(\sigma_{yy} - \sigma_z) \Rightarrow \\ \sigma_{0xy} = k\sigma_{xy} \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^* = (1-k)\sigma_{xx} + k\sigma_z \\ \sigma_{yy}^* = (1-k)\sigma_{yy} + k\sigma_z \\ \sigma_{xy}^* = (1-k)\sigma_{xy}. \end{cases} \qquad (8)$$

Докажем, что и в этом случае коэффициент k может быть определен по формуле (5). Так как

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_z)^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_z)^2 + 6\sigma_{xy}^2}, \qquad (9)$$

а с учетом (8)

$$\sigma_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-k)^2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (1-k)^2(\sigma_{xx} - \sigma_z)^2 + (1-k)^2(\sigma_{yy} - \sigma_z)^2 + 6(1-k)^2\sigma_{xy}^2}, \qquad (10)$$

тогда разделим (10) на (9) и получим $k = 1 - \dfrac{\sigma_i^*}{\sigma_i}$.

Что и требовалось доказать. Отличительной особенностью предложенного алгоритма является то, что он позволяет найти решение всего за один шаг. Таким образом, метод начальных напряжений фактически перестает быть итерационным, что существенно сокращает время расчета и требует меньше ресурсов ЭВМ, а также существенно повышает точность полученного результата.

Рассмотрим применение предложенного алгоритма к задаче об изгибе с растяжением цилиндрической заготовки по жесткому пуансону. Обозначим плоскость некоторого поперечного сечения заготовки (x,y), тогда направление z является направлением обтяжки. В силу физической специфики задачи приближенными методами могут быть определены значения σ_z и ε_z. Рассмотрим деформирование поперечного сечения заготовки, принимая гипотезы плоской деформации. Разобьем область поперечного сечения заготовки на треугольные элементы, в качестве узловых параметров выберем u_i и v_i перемещения вдоль осей x и y соответственно. Выберем функции формы:

$$[N] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta}$$

где $L_2 = \dfrac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta}$, а $\Delta = \dfrac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} =$

$$L_3 = \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta}$$

=площадь треугольника 123 и $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$, остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов $1 \to 2 \to 3$. В качестве закона (4) возьмем зависимость $\sigma_i = A\varepsilon_i^m$, где A, m — параметры материала, описывающие его пластические свойства.

Параметры материала:

- модуль упругости 70000 Н/м²;
- коэффициент Пуассона 0.3;
- $\varepsilon_i = 468.39 {*} \sigma_i^{0,26}$;
- $\sigma_{i\ \text{предел упругости}} = 257.0$ Н/м².

Далее на рисунках слева представлено деформированное поперечное сечение заготовки, а справа распределение соответствующих напряжений по поперечному сечению заготовки.

Сравнение расчетных напряжений с экспериментальными данными, подтверждает возможность применения предложенного метода в инженерных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич О. М.* Метод конечных элементов в технике / О. М. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 543 с.

2. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. — М. : Машиностроение, 1975. — 400 с.

Поступила в редакцию 12.12.2007

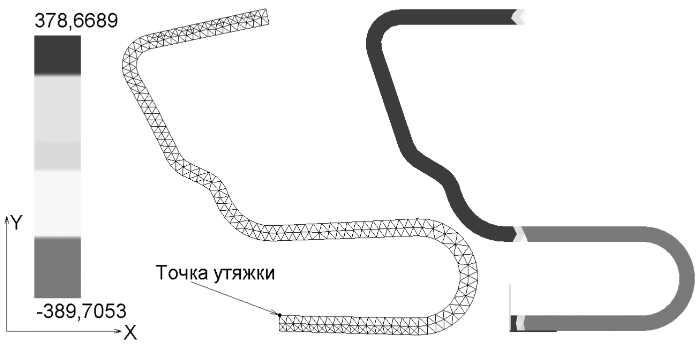

Рис.1. Распределение σ_x

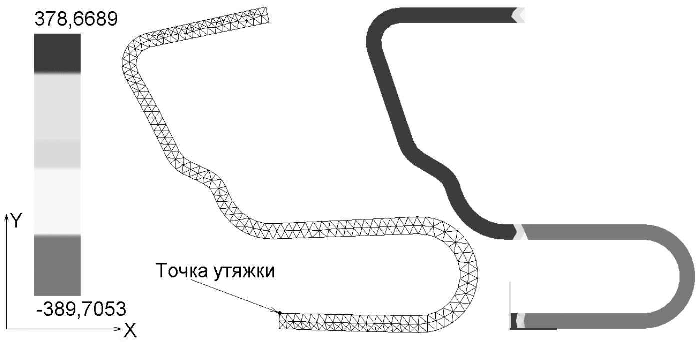

Рис. 2. Распределение σ_y

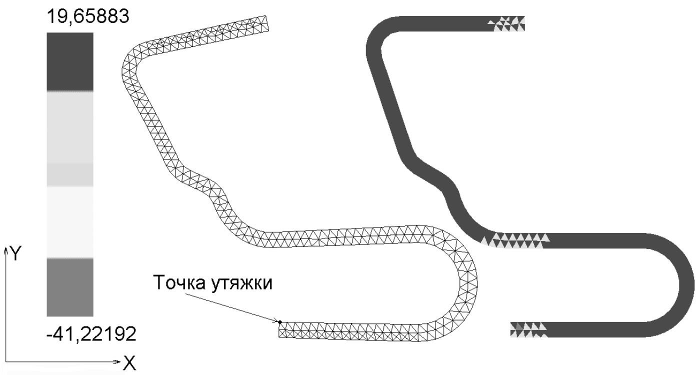

Рис. 3. Распределение σ_{xy}