УДК 517.9

ОЦЕНКА ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МЕТРИКЕ $C([0,2\pi],H)$ ЧЕРЕЗ ИХ ОЦЕНКИ В $L([0,2\pi],H)$

К. С. Кобычев

Воронежский государственный университет

В работе содержится априорная оценка ограниченных решений периодической краевой задачи; приводится интегральное представление периодической функции. Как следствие рассматривается случай оператора с постоянными коэффициентами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: периодическая функция, дифференциальный оператор, оценка нормы, ряд Фурье, обратный оператор, банахова алгебра, банахово пространство, пространство Соболева.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = A(t)x + f, \tag{1}$$

где f принадлежит банахову пространству $C([0,2\pi],H)$, 2π-периодических функций со значениями в гильбертовом пространстве H. Операторнозначная функция $A:[0,2\pi]\to EndH$ принадлежит банахову пространству $C([0,2\pi],EndH)$, где $EndH$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов. Данное уравнение можно переписать в виде

$$(d/dt - A(t))x = f.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор:

$$L = d/dt - A(t) : W_2^1([0,2\pi],H) \subset$$
$$\subset L_2([0,2\pi],H) \to L_2([0,2\pi],H).$$

Его областью определения является пространство Соболева $W_2^1 = W_2^1([0,2\pi],H) = \{x \in L_2([0,2\pi],H) : \dot{x} \in L_2([0,2\pi],H), x(0) = x(2\pi)\}$. Символом $\|x\|_2$ обозначается норма функции $x \in L_2$ на отрезке $[0,2\pi]$ $(\|x\|_2 = (\int_0^{2\pi}\|x(t)\|^2\,dt)^{1/2})$. Если $x \in C([0,2\pi],H)$, то $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,2\pi]}\|x(t)\|$. Норма ограниченного оператора $B \in EndL_2$ обозначается через $\|B\|_2$. При доказательстве последующих утверждений существенно используются результаты, приведенные в статье [1]. По теореме вложения Соболева справедливо включение $W_2^1([0,2\pi],H) \subset C([0,2\pi],H)$, причем оператор вложения непрерывен. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любых $\beta \in \mathbb{R}$ и $x \in W_2^1([0,2\pi],H)$ верна оценка*

$$\|x\|_\infty \le \frac{1}{2}C(\beta)\left(\beta\|x\|_2 + \frac{1}{\beta}\|\dot{x}\|_2\right),$$

где $C(\beta) = \frac{\sqrt{1-e^{-4\pi\beta^2}+2\pi\beta^2 e^{-2\pi\beta^2}}}{1-e^{-2\pi\beta^2}}$.

Доказательство. По теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала получим представление для значения периодической функции в точке 0 вида

$$x(0) = \frac{1}{2}(\beta^2\int_{-\infty}^{\infty}x(s)\varphi_\beta(s)ds + \frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(s)\varphi_\beta(s)ds),$$

где $\varphi_\beta(s) = e^{-\beta^2|s|}$, $s\in\mathbb{R}$, а $\dot{x}\in L_2([0,2\pi],H)$. Если осуществить сдвиг на величину $t\in\mathbb{R}$, данное представление останется справедливым и примет вид

$$x(t) = \frac{1}{2}(\beta^2\int_{-\infty}^{\infty}x(t+s)\varphi_\beta(s)ds +$$
$$+\frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(t+s)\varphi_\beta(s)ds).$$

Периодическую функцию можно также представить в виде суммы функций, полученных сдвигом некоторой функции с компактным носителем на величину $2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(t+2\pi n) =$$
$$= \frac{1}{2}(\beta^2\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(t+s+2\pi n)\varphi_\beta(s)ds +$$
$$+\frac{1}{\beta^2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{y}(t+s+2\pi n)\varphi_\beta(s)ds).$$

Сделав замену переменных $u = s + 2\pi n$ и перенеся суммирование на φ_β, получим

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}y(t+2\pi n) =$$
$$= \frac{1}{2}(\beta^2\int_0^{2\pi}y(t+u)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_\beta(u-2\pi n)du +$$
$$+\frac{1}{\beta^2}\int_0^{2\pi}\dot{y}(t+u)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_\beta(u-2\pi n)du).$$

Поскольку $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2|u-2\pi n|} = \frac{e^{-\beta^2 u}+e^{\beta^2(u-2\pi)}}{1-e^{-2\beta^2\pi}}$, $u\in[0,2\pi]$, то $\tilde{\varphi}_\beta(t) = \frac{e^{-\beta^2 u}+e^{\beta^2(u-2\pi)}}{1-e^{-2\beta^2\pi}}$, $\dot{\tilde{\varphi}}_\beta(t) = -\beta^2\frac{-e^{-\beta^2 u}+e^{\beta^2(u-2\pi)}}{1-e^{-2\beta^2\pi}}$. Следовательно, представление для периодической функции x примет вид

$$x(t)=\frac{1}{2}(\beta^2\int_0^{2\pi}x(t+u)\tilde{\varphi}_\beta(u)du+$$
$$+\frac{1}{\beta^2}\int_0^{2\pi}\dot{x}(t+u)\dot{\tilde{\varphi}}_\beta(u)du).$$

Далее, посчитав нормы функций $\tilde{\varphi}_\beta(t)$ и $\dot{\tilde{\varphi}}_\beta(t)$ в $L_2([0,2\pi],H)$, получим оценку

$$\|x\|_\infty \le \frac{1}{2}\left(\beta^2\|x\|_2\left\|\tilde{\varphi}_\beta\right\|_2+\frac{1}{\beta^2}\|\dot{x}\|_2\left\|\dot{\tilde{\varphi}}_\beta\right\|_2\right)\le$$
$$\le\frac{1}{2}C\left(\beta\|x\|_2+\frac{1}{\beta}\|\dot{x}\|_2\right).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть оператор* $L=d/dt-A(t):W_2^1([0,2\pi],H)\subset L_2\to L_2$ *обратим. Тогда он обратим в* $C([0,2\pi],H)$ *и для любого* $\beta>0$ *верна оценка*

$$\left\|L^{-1}\right\|_\infty \le \frac{1}{2}C(\beta)\left(\beta\left\|L^{-1}\right\|_2+\frac{1}{\beta}(1+\left\|L^{-1}\right\|_2\|A\|_\infty)\right)=$$
$$=\Phi(\beta,A),$$

где $\left\|L^{-1}\right\|_\infty$ *— норма оператора* L^{-1}, *рассматриваемого в* $C([0,2\pi],H)$. *Для нормы решения оценка имеет вид:* $\|x\|_\infty\le\Phi(\beta,A)\|f\|_\infty$.

Доказательство. Обратимость оператора в $L_2([0,2\pi],H)$ влечет за собой его обратимость в $C([0,2\pi],H)$. Так как L^{-1} существует и ограничен в L_2, то решение уравнения будет иметь вид

$$x=L^{-1}f.$$

Тогда норму $\|x\|_2$ можно оценить через произведение норм оператора и функции

$$\|x\|_2\le\left\|L^{-1}\right\|_2\|f\|_2. \qquad (2)$$

Оценивая норму $\|\dot{x}\|_2$ через норму правой части уравнения (1), получим

$$\|\dot{x}\|_2\le\|A\|_\infty\|x\|_2+\|f\|_2\le(\|A\|_\infty\left\|L^{-1}\right\|_2+1)\|f\|_2. \qquad (3)$$

Обозначим $\|L\|_2=l$ и, используя лемму 1 и оценки (2) и (3), заключаем, что

$$\|x\|_\infty\le\frac{1}{2}C(\beta\|x\|_2+\frac{1}{\beta}\|\dot{x}\|_2)\le$$
$$\le\frac{1}{2}C(\beta l\|f\|_2+\frac{1}{\beta}(1+l\|A\|_\infty)\|f\|_2)\le$$
$$\le\frac{1}{2}C(\beta l+\frac{1}{\beta}(1+l\|A\|_\infty))\|f\|_\infty.$$

Таким образом, получаем доказываемую оценку. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\beta=\sqrt{\frac{1+\left\|L^{-1}\right\|_2\|A\|_\infty}{\left\|L^{-1}\right\|_2}}$, *тогда оценка примет вид*

$$\left\|L^{-1}\right\|_\infty\le C(\beta)\sqrt{\left\|L^{-1}\right\|_2(1+\left\|L^{-1}\right\|_2\|A\|_\infty)}.$$

Следствие 2. *Пусть дифференциальный оператор* $L=d/dt-A(t)$ *имеет постоянные коэффициенты* $A(t)=A_0\in EndH$ *и* $\sigma(A_0)\cap i\mathbb{R}=\varnothing$, *тогда он обратим в* $C([0,2\pi],H)$ *и имеет место оценка*

$$\left\|L^{-1}\right\|_\infty\le\frac{1}{2}C(\beta)(\beta\max_{n\in Z}\left\|(inI-A_0)^{-1}\right\|+$$
$$+\frac{1}{\beta}(1+\max_{n\in Z}\left\|(inI-A_0)^{-1})\right\|\|A\|_\infty)). \qquad (4)$$

Доказательство. Запишем разложение в ряд Фурье для функций $x(t)$ и $f(t)$:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{int}, f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n e^{int}.$$

Подставим эти представления в формулу $Lx(t)=f(t)$ и, выражая x_n через f_n, получим $x_n=(inI-A_0)^{-1}f_n$, тогда по теореме Планшереля получаем

$$\|x\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|x_n\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|(inI-A_0)^{-1}f_n\right\|^2\le$$
$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|(inI-A_0)^{-1}\right\|^2\|f_n\|^2\le$$
$$\le\max_{n\in Z}\left\|(inI-A_0)^{-1}\right\|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f_n\|^2=$$
$$=\max_{n\in Z}\left\|(inI-A_0)^{-1}\right\|^2\|f\|_2^2.$$

Извлекая корень из обеих частей в данном неравенстве получим, что $\left\|L^{-1}\right\|_2=\max_{n\in Z}\left\|(inI-A_0)^{-1}\right\|$. Подставив данное выражение в оценку для $\left\|L^{-1}\right\|_\infty$, полученную в теореме 1, получим неравенство 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений / А. Г. Баскаков // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 3. — С. 413—415.

2. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970.

Поступила в редакцию 09.02.2008