*УДК 517.546*

# ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

**Э. Г. Кирьяцкий**

*Вильнюсский технический университет*

В данной работе рассматриваются голоморфные в единичном круге $E$ функции: $f(z)$ и $f(\omega(z;\zeta))$, где $\omega(z;\zeta)=(z+\zeta)/(1+\bar{\zeta}z)$. Установлена формула, связывающая между собой коэффициенты Тейлора этих функций. С ее помощью оцениваются коэффициенты функций, принадлежащих различным классам.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: голоморфная функция, разделенная разность, производная, коэффициенты функций, класс функций.

## ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $S$ класс однолистных в $E$ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (см. [1], [2], [3]).

В 1984 г. американский математик Луи де Бранж (см.[4]) доказал следующую теорему.

**Теорема 1**. *Если*

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k \in S, \tag{1}$$

то

$$|a_k|\le k,\ k=2,3,4,\dots. \tag{2}$$

*Знаки равенства в* (2) *реализуется однолистными в* $E$ *функциями*

$$\Phi_\alpha(z)=\frac{z}{\left(1-e^{-\alpha i}z\right)^2}=z+\sum_{k=2}^{\infty}ke^{-(k-1)\alpha i}z^k,$$

$$0\le\alpha\le 2\pi.$$

Заметим, что в еще 1926 г. (см.[5]), после неудачных попыток доказать неравенства (2) для комплексных коэффициентов $a_k$, $k=2,3,4,\dots$, однолистных в $E$ функций (1), математик Э. Ландау, опираясь на предположение, что неравенства (2) имеют место, доказал следующую теорему.

**Теорема 2**. *Если* $f(z)\in S$, *то*

$$\frac{1}{p!}\left|f^{(p)}(z)\right|\le\frac{p+|z|}{\left(1-|z|\right)^{p+2}},$$

$$f(z)\in S,\ \ \forall z\in E,\ p=2,3,\dots. \tag{3}$$

*Знаки равенства реализуются функциями* $\Phi_\alpha(z)$, $0\le\alpha<2\pi$.

В 1987 г. И. Александров (см.[1], [2]), уже зная о теореме Луи де Бранжа, снова доказал неравенства (3) методом, который существенно отличался от метода Э. Ландау.



В данной работе мы докажем основную теорему 3, применяя которую очень просто получить неравенства (3), принадлежащие Э. Ландау и И. Александрову. Кроме того, мы познакомимся и с другими применениями теоремы 2.

1. Рассмотрим класс голоморфных в единичном круге $E$ (т.е. в круге $|z|<1$) функций

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k. \tag{4}$$

Введем множество аналитических в $E$ функций

$$\omega(z;\zeta)=\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z},$$

где $\zeta$ параметр и $\zeta\in E$.

Разложим функцию $f(\omega(z;\zeta))$ в ряд по степеням $z$, т.е.

$$f(\omega(z;\zeta))=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\zeta)z^k.$$

**Теорема 3**. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k,\ f(\omega(z;\zeta))=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\zeta)z^k.$$

*Тогда*

$$\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}=\frac{1}{\left(1-|\zeta|^2\right)^p}\sum_{m=0}^{p-1}B_{p-1}^m a_{p-m}(\zeta)\bar{\zeta}^m,\ \forall\zeta\in E,$$

$$p=1,2,3,\dots. \tag{5}$$

*где коэффициенты* $a_k(\zeta)$, $k=1,2,\dots$, *вычисляются по формуле*

$$a_k(\zeta)=\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m B_{k-1}^m\left(1-|\zeta|^2\right)^{k-m}\bar{\zeta}^m\frac{f^{(k-m)}(\zeta)}{(k-m)!},$$

$$k=1,2,\dots,\ a_0(\zeta)=f(\zeta). \tag{6}$$

*Здесь* $B_{k-1}^m=\dfrac{(k-1)!}{m!(k-1-m)!}$ *— биномиальные коэффициенты.*

Доказательство. Имеет место формула

$$\frac{\partial^k f(\omega(z;\zeta))}{k!\partial z^k} = \\ = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m B_{k-1}^m \left(1-|\zeta|^2\right)^{k-m} \bar{\zeta}^m}{\left(1+\bar{\zeta} z\right)^{2k-m}} \frac{d^{k-m} f(\omega(z;\zeta))}{d^{k-m}\omega(z;\zeta)}, \\ k = 1, 2, \dots. \quad (7)$$

В самом деле,

$$\frac{\partial f(\omega(z;\zeta))}{\partial z} = \frac{\left(1-|\zeta|^2\right)}{\left(1+\bar{\zeta} z\right)^2} \frac{df(\omega)}{d\omega}$$

и формула (7) справедлива при $k = 1$. Пользуясь индукцией по $k$, убедимся в справедливости формулы (7) при любом натуральном $k$. Полагая в (7) $z = 0$, получим формулу (6). Равенство $a_0(\zeta) = f(\zeta)$ очевидно.

Пусть $p$ — некоторое натуральное число. Полагая в (6) последовательно $k = 1, \dots, p$, получим систему

$$\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m B_{k-1}^m \left(1-|\zeta|^2\right)^{k-m} \bar{\zeta}^m \frac{f^{(k-m)}(\zeta)}{(k-m)!} = a_k(\zeta), \\ k = 1, \dots, p, \quad (8)$$

из $p$ уравнений относительно неизвестных

$$\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}, \frac{f^{(p-1)}(\zeta)}{(p-1)!}, \dots, \frac{f^{(1)}(\zeta)}{1!}.$$

Решая систему (8), получим

$$\left(1-|\zeta|^2\right)^p \frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!} = \sum_{m=0}^{p-1} B_{p-1}^m a_{p-m}(\zeta) \bar{\zeta}^m. \quad (9)$$

Очевидно, (9) имеет место при любом натуральном $p$ и любом $\zeta \in E$, что и дает (5).

2. Теперь мы покажем как, опираясь на теорему 3, можно снова доказать неравенства (3). Если $f(z) \in S$, то

$$f(z;\zeta) = \frac{f(\omega(z;\zeta)) - f(\zeta)}{\left(1-|\zeta|^2\right) f'(\zeta)} \in S$$

при любом значении параметра $\zeta$ из $E$. Далее, имеем

$$f(z;\zeta) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(\zeta) z^k \in S.$$

Опираясь на (5) и (6) легко вычислить коэффициенты $b_k(\zeta)$, $k = 1, 2, \dots$, функции $f(z;\zeta)$ и коэффициенты Тейлора функции $f(z)$:

$$b_k(\zeta) = \\ = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m B_{k-1}^m \left(1-|\zeta|^2\right)^{k-1-m} \bar{\zeta}^m \frac{f^{(k-m)}(\zeta)}{(k-m)! f^{(1)}(\zeta)} \\ k = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!} = \frac{f^{(1)}(\zeta)}{\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} B_{p-1}^m b_{p-m}(\zeta) \bar{\zeta}^m, \\ \forall \zeta \in E,\ p = 1, 2, 3, \dots. \quad (10)$$

Из (10) следуют неравенства

$$\frac{\left|f^{(p)}(\zeta)\right|}{p!} \le \frac{\left|f^{(1)}(\zeta)\right|}{\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} B_{p-1}^m \left|b_{p-m}(\zeta)\right| \cdot \left|\bar{\zeta}\right|^m, \\ \forall \zeta \in E,\ p = 1, 2, 3, \dots. \quad (11)$$

Так как $f(z;\zeta) \in S$, то, согласно результату Л. де Бранжа, имеем

$$\left|b_{p-m}(\zeta)\right| \le p - m,\ m = 0, 1, \dots, (p-1). \quad (12)$$

Известно, что

$$\left|f^{(1)}(z)\right| \le \frac{1+|z|}{\left(1-|z|\right)^3}. \quad (13)$$

Учитывая оценки (12),(13), получим

$$\frac{1}{p!}\left|f^{(p)}(\zeta)\right| \le \\ \le \frac{1+|\zeta|}{\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-1}\left(1-|\zeta|\right)^3} \sum_{m=0}^{p-1} B_{p-1}^m (p-m)|\zeta|^m = \\ = \frac{p+|\zeta|}{\left(1-|\zeta|\right)^{p+2}}. \quad (14)$$

С помощью простых вычислений легко убедиться в том, что знаки равенства в (14) реализуется функциями $\Phi_\alpha(z)$.

3. Пусть $S^0$ класс однолистных в $E$ функций $f(z)$ вида (4), отображающих единичный круг $E$ на выпуклую область (см. [6]).

**Теорема 4.** *Если*

$$f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in S^0,$$

*то*

$$\frac{1}{p!}\left|f^{(p)}(\zeta)\right| \le \frac{1}{\left(1-|\zeta|\right)^{p+1}},\ p = 1, 2, 3, \dots. \quad (15)$$

*Знаки равенства в (14) реализуется функциями*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z}{1-e^{-i\alpha}z},\ 0 \le \alpha \le 2\pi,$$

*из класса* $S^0$.

Доказательство. Для коэффициентов $b_k$, $k = 2,3,\ldots$, функции $f(z)$ из класса $S^0$ известны оценки (см. [6])

$$|b_k| \le 1,\ k = 2,3,\ldots. \qquad (16)$$

Далее, функция

$$f(z;\zeta) = \frac{f(\omega(z;\zeta)) - f(\zeta)}{\left(1-|\zeta|^2\right) f^{(1)}(\zeta)}$$

также принадлежит классу $S^0$. Известно также, что

$$\left|f^{(1)}(z)\right| \le \frac{1}{\left(1-|z|\right)^2}. \qquad (17)$$

Применяя неравенства (11), (16), (17), получим

$$\frac{1}{p!}\left|f^{(p)}(\zeta)\right| \le \frac{1}{\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-1}\left(1-|\zeta|\right)^2} \sum_{m=0}^{p-1} B_{p-1}^m |\zeta|^m = \frac{1}{\left(1-|\zeta|\right)^{p+1}},\ p = 1,2,3,\ldots.$$

Простые вычисления показывают, что знаки равенства в (15) реализуются функциями $\varphi_\alpha(z)$.

Определим разделенную разность $n$-го порядка аналитической в $E$ функции $f(z)$ формулой (см. [7])

$$\left[f(z); z_0,\ldots,z_n\right] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\xi)\, dt_1 \ldots dt_n,$$

где

$$0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 1, \ldots, 0 \le t_n \le t_{n-1},$$

$$\xi = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \ldots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in E.$$

**Теорема 5**. *Если* $f(z) \in S$, *то*

$$\left|\left[f(z); z_0,\ldots,z_n\right]\right| \le \le \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}\right) \cdot \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}, \qquad (18)$$
$$n = 0,1,2,\ldots.$$

*Знаки равенства в* (18) *реализуются функцией* $\Phi_\alpha(z)$, *если* $z_k = r_k e^{i\alpha}$, $k = 0,1,\ldots,n$, *где* $0 \le \alpha < 2\pi$, *т.е. все точки* $z_k$ *расположены на одном и том же радиусе круга* $E$.

Доказательство. При любых $z_0,\ldots,z_n \in E$ имеем

$$\left|\left[f(z); z_0,\ldots,z_n\right]\right| = \left|\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\xi)\, dt_1 \ldots, dt_n\right| \le \le \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \left|f^{(n)}(\xi)\right| dt_1 \ldots dt_n. \qquad (19)$$

Пусть

$$\rho = r_0 + t_1(r_1 - r_0) + \ldots + t_n(r_n - r_{n-1}),$$

где $|z_0| = r_0, \ldots, |z_n| = r_n$.

Легко установить, что

$$|\xi| \le \rho \text{ и } \rho < 1. \qquad (20)$$

Пользуясь принципом максимума модуля для аналитических функций и неравенствами (5), (20), получим

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right| \le \max_{|z|=|\xi|}\left|f^{(n)}(z)\right| \le \max_{|z|=|\rho|}\left|f^{(n)}(z)\right| \le \le \frac{n+\rho}{(1-\rho)^{n+2}} = \Phi_0^{(n)}(\rho). \qquad (21)$$

Учитывая (19) и (21), получим

$$\left|\left[f(z); z_0,\ldots,z_n\right]\right| \le \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \left|f^{(n)}(\xi)\right| dt_1 \ldots dt_n \le \le \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \Phi_0^{(n)}(\rho)\, dt_1 \ldots dt_n = \left[\Phi_0(r); r_0,\ldots,r_n\right].$$

Легко убедиться в том, что

$$\left[\Phi_0(r); r_0,\ldots,r_n\right] = \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}\right) \cdot \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}.$$

Неравенства (18) доказаны. Простые вычисления показывают, что если взять $z_k = r_k e^{i\alpha}$, $k = 0,1,\ldots,n$, где $0 \le \alpha < 2\pi$ (все точки $z_k$ расположены на одном и том же радиусе круга $E$), то функция $\Phi_\alpha(z)$ реализует знак равенства в (18).

**Замечание.** Теорема 4 является в некотором смысле обобщением теоремы 3. В самом деле, если $z_0 = \ldots = z_n = 0$, то получим неравенства (2). Если $z_0 = \ldots = z_n = \zeta$, то получим неравенства (3).

Аналогичным образом доказывается

**Теорема 6**. *Если*

$$f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in S^0,$$

то

$$\left|\left[f(z); z_0,\ldots,z_n\right]\right| \le \left[\varphi(r); r_0,\ldots,r_n\right] = = \frac{1}{(1-r_0)\ldots(1-r_n)}. \qquad (22)$$

*Если взять* $z_k = r_k e^{i\alpha}$, $k = 0,1,\ldots,n$, *где* $0 \le \alpha < 2\pi$ (*все точки* $z_k$ *расположены на одном и том же радиусе круга* $E$), *то функция* $\varphi_\alpha(z)$ *реализует знак равенства в* (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И. А.* Доказательство Л. де Бранжа гипотезы И. М. Милина и гипотезы Л. Бибербаха / И. А. Александров // Сибирск. матем. журнал. — 1987. — Т. 28. — С. 7—20.

2. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций / И. А. Александров. — Томск : Томский госуниверситет. 2001. — С. 188—191.

3. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. — М. : Наука, 1956. — С. 1—621.

4. *де Бранж Л.* (Branges L). A proof of the Bieberbach conjecture / Л. де Бранж// LOMI preprintes, E–5–84. — P. 1—21.

5. *Landau E.* Einige Bemerkungen überschlichte Abbildung / E. Landau // Jber. Deutsch. Math. —Verein 34 (1925/26). — S. 239—243.

6. *Хейман В. К.* Многолистные функции / В. К. Хейман // Изд-во иностр. литературы, 1958. — С. 1—179.

7. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И. И. Ибрагимов. — М. : Наука, 1971. — С. 107—114.

*Поступила в редакцию 19.11.2007*