УДК 517.9

РЕЗОНАНСНЫЕ БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ УРАВНЕНИЙ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

А. П. Карпова, Ю. И. Сапронов

Воронежский государственный университет

Изучены бифуркации решений гладких слабо $SO(2)$-эквивариантных фредгольмовых уравнений из особой точки с 4-мерным вырождением. При исследовании использован метод Ляпунова—Шмидта и теория инвариантов ортогонального действия окружности в $\mathbb{R}^4$. Основной результат — описание алгебраической структуры главной части ключевого уравнения и порожденного им амплитудного уравнения. Описаны приложения к проблеме вычисления амплитуд периодических решений, бифурцирующих из точек покоя при наличии резонансов. Среди рассмотренных примеров — уравнения колебаний упругой балки на упругом основании, автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений и обобщенные системы гидродинамического типа. Материал статьи развивает и дополняет более ранние результаты исследований Б. М. Даринского, Ю. И. Сапронова и В. А. Смольянова.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бифуркация, метод Ляпунова—Шмидта, круговая симметрия, резонанс, цикл.

ВВЕДЕНИЕ

Предложенная здесь численно-аналитическая процедура анализа $SO(2)$- эквивариантных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах основана на методе Ляпунова—Шмидта [1]—[5] и теории алгебраических инвариантов ортогонального действия окружности в $\mathbb{R}^4$. Основной результат — описание алгебраической структуры главной части ключевого уравнения и порожденного им амплитудного уравнения (приведенного уравнения). Описаны приложения к проблеме вычисления амплитуд периодических решений, бифурцирующих из точек покоя при наличии резонансов. Среди рассмотренных примеров — уравнения колебаний упругой балки на упругом основании, автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений и обобщенные системы гидродинамического типа. Здесь затронуты некоторые из перечисленных приложений лишь с целью краткой иллюстрации. Подробному изложению результатов апробации будут посвящены отдельные статьи. Изложенная в статье процедура позволяет решать и задачу дискриминантного анализа ветвления решений. Материал статьи развивает и дополняет более ранние результаты исследований Б. М. Даринского, Ю. И. Сапронова и В. А. Смольянова [6], [7].

© Карпова А. П., Сапронов Ю. И., 2008

1. ФРЕДГОЛЬМОВЫ УРАВНЕНИЯ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Вопросам анализа дифференциальных уравнений с групповой симметрией посвящена обширная литература (см., например, монографии и статьи Л. В. Овсянникова, Н. Х. Ибрагимова, П. Олвера, А. М. Виноградова с соавторами, В. Ф. Зайцева, А. Т. Фоменко, В. А. Треногина, Б. В. Логинова и др. [8]—[4]). Ряд аспектов теории вариационных и общих операторных уравнений с групповой симметрией развивался при непосредственном воздействии эквивариантной теории Морса (А. Т. Фоменко, В. В. Шарко и др.) и теории ветвления решений нелинейных эквивариантных уравнений (J. E. Marsden, Н. А. Бобылев, Б. В. Логинов, В. А. Треногин, З. И. Баланов и др.). Уравнения с круговой, бикруговой и поликруговой симметриями изучались в работах Б. В. Логинова, В. Г. Звягина, В. Кравцевича, Ю. И. Сапронова, В. А. Смольянова, А. В. Гнездилова и др.

Основной результат данной статьи допускает абстрактную формулировку в терминах фредгольмова уравнения со слабой круговой симметрией, рассмотренного вблизи порождающей особой точки с четырехмерным вырождением и резонансом.

Пусть заданы банаховы пространства E, F и гильбертово пространство H такие, что E непрерывно вложено в F, F непрерывно вложено в H. И пусть задано семейство фредгольмовых отображений нулевого индекса $f : E \times \mathbb{R}^m \to F$, гладкое по совокупности переменных, представленное в виде

$$\mathcal{A}(\varepsilon)x + \mathcal{B}(x,x,\varepsilon) + \mathcal{C}(x,x,x,\varepsilon) + o(\|x\|_E^3),$$

где $\mathcal{A}(\varepsilon)$ — гладкое семейство линейных фредгольмовых операторов нулевого индекса, $\mathcal{B},\mathcal{C}$ — квадратичный и кубический операторы.

Пусть, далее, зафиксирован слабо гладкий гомоморфизм $\mathcal{T} : SO(2) \longrightarrow O(H)$ — из группы $SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований некоторого гильбертова пространства H (его непрерывность не предполагается)[1]. Гомоморфизм $\mathcal{T}$ задает ортогональное действие на пространстве H:

$$G \times H \to H, (g,x) \mapsto y = \mathcal{T}_g(x) \quad \forall (g,x) \in G \times H.$$

Предполагается, что E и F инвариантны, а f эквивариантно относительно данного действия:

$$\mathcal{T}_g(E) \subset E, \mathcal{T}_g(F) \subset F,$$

$$f(\mathcal{T}_g(\cdot),\varepsilon) = \mathcal{T}_g(f(\cdot,\varepsilon)) \quad \forall g \in SO(2), \varepsilon \in \mathbb{R}^m.$$

Из эквивариантности f следует эквивариантность его производной (в нуле) $\mathcal{A}(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,\varepsilon)$ и инвариантность подпространства $N := Ker\,\mathcal{A}(0)$.

Пусть

$$E = N \oplus R_*, \; F = N \oplus R, \; \dim N = 4,$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon)(N) \subset N, \; \mathcal{A}(\varepsilon)(R_*) \subset R.$$

Предположим также, что в N существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (не зависящий от ε), в котором матрица $A_4(\varepsilon)$ оператора $\mathcal{A}_4(\varepsilon) := A(\varepsilon)\,|_N$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) & -\beta_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ \beta_1(\varepsilon) & \alpha_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2(\varepsilon) & -\beta_2(\varepsilon) \\ 0 & 0 & \beta_2(\varepsilon) & \alpha_2(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что собственные значения матрицы $A_4(\varepsilon)$ суть следующие комплексные числа:

$$\lambda_1 = \alpha_1(\varepsilon) \pm \imath\beta_1(\varepsilon); \; \lambda_2 = \alpha_2(\varepsilon) \pm \imath\beta_2(\varepsilon).$$

В приложениях требуется, как правило, выполнение условия регулярности в нуле отображения

$$\varepsilon \mapsto (\alpha_1(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon), \beta_2(\varepsilon))^\top,$$

означающего, что ранг матрицы Якоби в нуле (этого отображения) равен четырем.

Пусть $\mathcal{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{N}, \mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$ — ортопроекторы (в H). Следуя методу Ляпунова—Шмидта [4]—[5], запишем исходное операторное уравнение $f(x,\varepsilon) = 0$ в виде системы двух уравнений

$$\left.\begin{array}{rcl} f_{(4)}(u+v,\varepsilon) & = & 0, \\ f_{(\infty-4)}(u+v,\varepsilon) & = & 0, \end{array}\right\}$$

где

$$u = \mathcal{P}x, \; v = \mathcal{Q}x, \; f_{(4)}(x,\varepsilon) := \mathcal{P}f(x,\varepsilon),$$

$$f_{(\infty-4)}(x,\varepsilon) := \mathcal{Q}f(x,\varepsilon).$$

Из второго уравнения этой системы получаем в силу теоремы о неявной функции выражение $v = \widetilde{\Phi}(u,\varepsilon) = \Phi(\xi,\varepsilon)$, $\xi = \hat{u}$[2]. Отображение Φ называется редуцирующим.

Нетрудно проверить, что имеет место следующее асимптотическое соотношение: $\Phi(\xi,\varepsilon) = o(\xi)$. Следовательно,

$$\Phi(\xi,\varepsilon) = \Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) + o(|\xi|^2), \tag{1}$$

где

$$\Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) = \sum_{|k|=2} \Phi_k \xi^k,$$

$$k = (k_1,k_2,k_3,k_4), \Phi_k\xi^k := \Phi_{k_1k_2k_3k_4}\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\xi_3^{k_3}\xi_4^{k_4},$$

$$|k| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4, k_j \in Z_+.$$

Легко заметить, что

$$\Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) = -\overline{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{B}_{(\infty-4)}(u,u,\varepsilon),$$

$$u := \sum_{j=1}^{4}\xi_j e_j, \; \overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A}\,|_{\mathcal{N}^\perp}, \; \mathcal{B}_{(\infty-4)} := \mathcal{Q}\mathcal{B}. \tag{2}$$

Перейдём к ключевому уравнению

$$\Theta(\xi,\varepsilon) := \Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) + \Theta^{(2)}(\xi,\varepsilon) +$$

$$+\Theta^{(3)}(\xi,\varepsilon) + o(|\xi|^3) = 0,$$

где

$$\Theta(\xi,\varepsilon) = f_{(4)}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j + \Phi(\xi,\varepsilon),\varepsilon\right).$$

Так как

$$f_{(4)}(x,\varepsilon) = \mathcal{A}_{(4)}(\varepsilon)x + \mathcal{B}_{(4)}(x,x,\varepsilon) + \mathcal{C}_{(4)}(x,x,x,\varepsilon) + \ldots,$$

$$\mathcal{B}_{(4)} := \mathcal{P}\mathcal{B}, \; \mathcal{C}_{(4)} := \mathcal{P}\mathcal{C},$$

то

$$\Theta(\xi,\varepsilon) = f_{(4)}(u + \Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon) + \ldots,\varepsilon) =$$

$$= \mathcal{A}_{(4)}u + \mathcal{B}_{(4)}(u,u,\varepsilon) + 2\mathcal{B}_{(4)}(u,\Phi^{(2)}(\xi,\varepsilon),\varepsilon)) +$$

$$+ \mathcal{C}_{(4)}(u,u,u,\varepsilon) + o(|\xi|)^3.$$

В частности,

$$\Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) = A_{(4)}(\varepsilon)\hat{u}.$$

[1] Слабая гладкость означает, что индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ является гладким.

[2] Символом ^ обозначается «снятие» координат с вектора $u \in N$.

Так как

$$\mathcal{A}_{(4)}(\varepsilon)e_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2,\ \mathcal{A}_{(4)}(\varepsilon)e_2 = -\beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2,$$

$$\mathcal{A}_{(4)}(\varepsilon)e_3 = \alpha_2 e_3 + \beta_2 e_4,\ \mathcal{A}_{(4)}(\varepsilon)e_4 = -\beta_2 e_3 + \alpha_2 e_4,$$

то для линейной части ключевого уравнения получаем представление

$$\Theta^{(1)}(\xi,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\varepsilon) & -\beta_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ \beta_1(\varepsilon) & \alpha_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2(\varepsilon) & -\beta_2(\varepsilon) \\ 0 & 0 & \beta_2(\varepsilon) & \alpha_2(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

1.1. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В $\mathbb{R}^4$ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ И РЕЗОНАНСНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА 1:2

Пусть задано алгебраическое отображение $\Theta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$\Theta(\xi) = \left(\Theta_1(\xi), \Theta_2(\xi), \Theta_3(\xi), \Theta_4(\xi)\right)^\top,$$

где

$$\Theta_j(\xi) = \sum_k \alpha_k^j \xi^k,$$

и пусть это отображение эквивариантно относительно стандартного действия окружности (группы $SO(2)$) на $\mathbb{R}^4$, соответствующего резонансу третьего порядка: если отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^4$ с комплексным вектором $z = (z_1, z_2)^\top \in C^2$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2, z_2 = \xi_3 + i\xi_4$, то действие задается соответствием

$$\mathbf{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(i\varphi)z_1, \exp(2i\varphi)z_2)^\top. \quad (4)$$

Эквивариантность означает выполнение соотношения

$$\Theta(\mathbf{T}_\varphi(\xi)) = \mathbf{T}_\varphi(\Theta(\xi)) \quad \forall\{\xi,\varphi\}. \qquad (5)$$

Множество ненулевых решений данного уравнения представляет собой набор одномерных подмногообразий (орбит действия (4), см. [11]), диффеоморфных окружности.

Пусть теперь

$$z_1 = \xi_1 + \imath\xi_2, z_2 = \xi_1 - \imath\xi_2,$$

$$z_3 = \xi_3 + \imath\xi_4, z_4 = \xi_3 - \imath\xi_4,\ z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^\top,$$

$$\mathbf{T}_\varphi(z) = \left(e^{\imath\varphi}z_1, e^{-\imath\varphi}z_2, e^{2\imath\varphi}z_3, e^{-2\imath\varphi}z_4\right)^\top.$$

Положив $\Upsilon(z) = \Theta(\xi)$, мы сможем записать (5) в виде

$$\mathbf{T}_\varphi\Upsilon(z) = \Upsilon(\mathbf{T}_\varphi(z_1,z_3), \mathbf{T}_{-\varphi}(z_2,z_4)). \qquad (6)$$

Здесь

$$\Upsilon(z) = \sum_k \gamma_{k_1k_2k_3k_4} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4},\ \gamma_k = \left(\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^3, \gamma_k^4\right)^\top,$$

$$\mathbf{T}_\varphi\Upsilon(z) = \sum_k \mathbf{T}_\varphi(\gamma_k) z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} =$$

$$= \sum_k \begin{pmatrix} e^{\imath\varphi}\gamma_k^1 \\ e^{-\imath\varphi}\gamma_k^2 \\ e^{2\imath\varphi}\gamma_k^3 \\ e^{-2\imath\varphi}\gamma_k^4 \end{pmatrix} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4},$$

$$\Upsilon(\mathbf{T}_\varphi(z)) = \sum_k \gamma_k e^{\imath\varphi((k_1-k_2)+2(k_3-k_4))} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} =$$

$$= \sum_k \begin{pmatrix} \gamma_k^1 \\ \gamma_k^2 \\ \gamma_k^3 \\ \gamma_k^4 \end{pmatrix} e^{\imath\varphi((k_1-k_2)+2(k_3-k_4))} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4}.$$

Равенство (6) означает, что коэффициенты при одинаковых мономах совпадают:

$$\begin{pmatrix} e^{\imath\varphi}\gamma_k^1 \\ e^{-\imath\varphi}\gamma_k^2 \\ e^{2\imath\varphi}\gamma_k^3 \\ e^{-2\imath\varphi}\gamma_k^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_k^1 \\ \gamma_k^2 \\ \gamma_k^3 \\ \gamma_k^4 \end{pmatrix} e^{\imath\varphi((k_1-k_2)+2(k_3-k_4))} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4}.$$

Обратимся к тейлоровскому разложению

$$\Theta(\xi) = \Theta^{(1)}(\xi) + \Theta^{(2)}(\xi) + \Theta^{(3)}(\xi) + \ldots,$$

где $\Theta^{(1)}(\xi)$, $\Theta^{(2)}(\xi)$ и $\Theta^{(3)}(\xi)$ — линейная, квадратичная и кубическая части разложения. Слагаемое $\Theta^{(k)}(\xi)$ состоит из мономов ξ^k порядка κ, т. е. $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, $|k| := k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = \kappa$.

Используя «правило сравнения равных полиномов» (см. (6)), получим для $\Theta^{(1)}(\xi)$ представление в виде (3), а для квадратичной и кубической частей следующие представления:

$$\Theta^{(2)}(\xi) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4 \\ \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 \\ \xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

(a_k, b_j — вещественные числа), и

$$\Theta^{(3)}(\xi) =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & -c_2\mathcal{I}_1 - d_2\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ c_2\mathcal{I}_1 + d_2\mathcal{I}_2 & c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 & -c_4\mathcal{I}_1 - d_4\mathcal{I}_2 \\ 0 & 0 & c_4\mathcal{I}_1 + d_4\mathcal{I}_2 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mathcal{I}_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |z_1|^2,\ \mathcal{I}_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2 = |z_2|^2,$$

$$\mathcal{I}_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4,$$

$$\mathcal{I}_4 = -(\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4 + 2\xi_1\xi_2\xi_3.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для гладкого отображения* Θ, *удовлетворяющего условию круговой симметрии (5), имеет место следующее представление:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4\\ \xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3\\ \xi_1^2-\xi_2^2\\ 2\xi_1\xi_2\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} c_1\mathcal{I}_1+d_1\mathcal{I}_2 & -c_2\mathcal{I}_1-d_2\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ c_2\mathcal{I}_1+d_2\mathcal{I}_2 & c_1\mathcal{I}_1+d_1\mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3\mathcal{I}_1+d_3\mathcal{I}_2 & -c_4\mathcal{I}_1-d_4\mathcal{I}_2 \\ 0 & 0 & c_4\mathcal{I}_1+d_4\mathcal{I}_2 & c_3\mathcal{I}_1+d_3\mathcal{I}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}+$$

$$+O(|\xi|^4)=0.$$

Коэффициенты $\alpha_i,\beta_i,a_i,b_i,c_i,d_i$ в представлении отображения Θ, указанном в теореме, явно выражаются через «операторные коэффициенты» $f(x,\varepsilon)$.

1.2. ПЕРЕХОД К ПРИВЕДЕННОМУ УРАВНЕНИЮ

Уравнение $\Theta(\xi)=0$ можно заменить уравнением $\widetilde{\Theta}(\xi)=0$,

$$\widetilde{\Theta}(\xi)=\left(\widetilde{\Theta}_1(\xi),\widetilde{\Theta}_2(\xi),\widetilde{\Theta}_3(\xi),\widetilde{\Theta}_4(\xi)\right)^\top,$$

где компоненты $\widetilde{\Theta}_j$ представляют собой следующие скалярные произведения:

$$\widetilde{\Theta}_1(\xi):=\left(\Theta(\xi),z_1\right),\ \widetilde{\Theta}_2(\xi):=\left(\Theta(\xi),iz_1\right),$$

$$\widetilde{\Theta}_3(\xi):=\left(\Theta(\xi),z_2\right),\ \widetilde{\Theta}_4(\xi):=\left(\Theta(\xi),iz_2\right),$$

$$z_1:=(\xi_1,\xi_2,0,0)^\top,\ iz_1:=(-\xi_2,\xi_1,0,0)^\top,$$

$$z_2:=(0,0,\xi_3,\xi_4)^\top,\ iz_2:=(0,0,-\xi_4,\xi_3)^\top.$$

Легко проверить, что функции $\widetilde{\Theta}_k$ являются инвариантами. Более того, для них имеют место следующие представления:

$$\widetilde{\Theta}_1(\xi)=a_1\mathcal{I}_3-b_1\mathcal{I}_4+\left(\alpha_1+c_1\mathcal{I}_1+d_1\mathcal{I}_2\right)\mathcal{I}_1+o(|\xi|^4),$$

$$\widetilde{\Theta}_2(\xi)=b_1\mathcal{I}_3+a_1\mathcal{I}_4+\left(\beta_1+c_2\mathcal{I}_1+d_2\mathcal{I}_2\right)\mathcal{I}_1+o(|\xi|^4),$$

$$\widetilde{\Theta}_3(\xi)=a_2\mathcal{I}_3-b_2\mathcal{I}_4+\left(\alpha_2+c_3\mathcal{I}_1+d_3\mathcal{I}_2\right)\mathcal{I}_2+o(|\xi|^4),$$

$$\widetilde{\Theta}_4(\xi)=b_2\mathcal{I}_3+a_2\mathcal{I}_4+\left(\beta_2+c_4\mathcal{I}_1+d_4\mathcal{I}_2\right)\mathcal{I}_2+o(|\xi|^4).$$

Перейдя к комплексным переменным, получим соотношения

$$\widetilde{\Theta}_1+i\widetilde{\Theta}_2=$$
$$=u_1\left(\mathcal{I}_3+i\mathcal{I}_4\right)+\mathcal{I}_1\left(\lambda_1+v_1\mathcal{I}_1+w_1\mathcal{I}_2\right)+o(|\xi|^4),$$

где

$$\lambda_1:=\alpha_1+i\beta_1, u_1:=a_1+ib_1, v_1:=c_1+ic_2, w_1:=d_1+id_2,$$

и

$$\widetilde{\Theta}_3+i\widetilde{\Theta}_4=u_2\left(\mathcal{I}_3+i\mathcal{I}_4\right)+\mathcal{I}_2\left(\lambda_2+v_2\mathcal{I}_1+w_2\mathcal{I}_2\right)+o(|\xi|^4),$$

где

$$\lambda_2:=\alpha_2+i\beta_2, u_2:=a_2+ib_2, v_2:=c_3+ic_4, w_2:=d_3+id_4.$$

Из системы двух уравнений (с комплексными коэффициентами)

$$\widetilde{\Theta}_1+i\widetilde{\Theta}_2=\widetilde{\Theta}_3+i\widetilde{\Theta}_4=0$$

получим соотношения

$$\mathcal{I}_3+i\mathcal{I}_4=-u_1^{-1}\mathcal{I}_1\left(\lambda_1+v_1\mathcal{I}_1+w_1\mathcal{I}_2\right)+o(|\xi|^4)\quad(7)$$

и

$$u_2\mathcal{I}_1\left(\lambda_1+v_1\mathcal{I}_1+w_1\mathcal{I}_2\right)-$$
$$-u_1\mathcal{I}_2\left(\lambda_2+v_2\mathcal{I}_1+w_2\mathcal{I}_2\right)+o(|\xi|^4)=0.$$

Сгруппировав в последнем соотношении подобные слагаемые, получим **приведенное** уравнение

$$\mu_1\mathcal{I}_1+\mu_2\mathcal{I}_2+A\mathcal{I}_1^2+2B\mathcal{I}_1I_2+C\mathcal{I}_2^2+o(|\xi|^4)=0,\quad(8)$$

$$\mu_1=u_2\lambda_1,\ \mu_2=-u_1\lambda_2,\ A=u_2v_1,$$
$$B=-u_1w_2,\ C=u_2w_1-u_1v_2.$$

Из уравнений (7)—(8) можно находить соотношения между амплитудными, угловыми (фазовыми) переменными и параметрами (например, в теории колебаний — зависимость между амплитудой и периодом колебания), определять количество бифурцирующих решений и вычислять асимптотические представления для амплитудных переменных.

1.3. НОРМАЛИЗОВАННОЕ ПРИВЕДЕННОЕ УРАВНЕНИЕ

В случае общего положения уравнение (8) можно представить после овеществления и соответствующих преобразований переменных в виде системы уравнений

$$\left.\begin{array}{ll} y_1^2\pm y_2^2 + \delta_1y_1+\delta_2y_2 & =0,\\ y_1y_2 + \delta_3y_1+\delta_4y_2 & =0.\end{array}\right\}$$

Левая часть данной системы представляет собой нормальную форму миниверсальной деформации омбилической особенности (гиперболического или, соответственно, эллиптического типа — в зависимости от знака перед y_2^2 в первом уравнении) относительно контактных преобразований [18] векторных полей вида

$$\theta(y) \to A(y)\theta(\varphi(y)),\ \varphi(0)) = 0$$

($A(y)$ — гладкий пучок обратимых матриц, φ — локальный диффеоморфизм). Образцы дискриминантного анализа систем уравнений такого вида имеются в [18], [5].

В гиперболическом случае дискриминантное множество Σ допускает параметризацию

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_1 = r\cos(\psi),\\
&\delta_2 = r\sin(\psi),\\
&\delta_3 = \frac{r}{1-\cos(\varphi-\psi)}\times\\
&\quad\times\Big(\sin(\psi)(1+\sin(\varphi)\sin(\psi)-\cos(2\varphi))-\\
&\quad-\frac{3}{4}\sin(\varphi)+\frac{1}{4}\sin(3\varphi)\Big),\\
&\delta_4 = \frac{r}{1-\cos(\varphi-\psi)}\times\\
&\quad\times\Big(\cos(\psi)(1-\cos(\varphi)\cos(\psi)+\cos(2\varphi))-\\
&\quad-\frac{3}{4}\cos(\varphi)-\frac{1}{4}\cos(3\varphi)\Big).
\end{aligned}\right\}$$

Дополнение $\Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \Sigma$ является объединением четырех открытых попарно непересекающихся подмножеств

$$\Omega = \Omega_2^{-1} \cup \Omega_2^1 \cup \Omega_4^{-1} \cup \Omega_4^1$$

таких, что при $\delta \in \Omega_2^{-1}$ имеется два (регулярных) решения (их топологические индексы противоположны по знаку) и при этом топологический индекс нулевого решения равен -1, при $\delta \in \Omega_2^1$ система приведенных уравнений имеет лишь одно ненулевое решение и топологический индекс нуля равен 1, при $\delta \in \Omega_4^{-1}$ имеется четыре решения: два из них индекса -1 (включая нулевое) и два — индекса 1, а при $\delta \in \Omega_4^1$ имеется четыре решения, из которых два индекса 1 (включая нулевое) и два — индекса -1.

Аналогичное разбиение пространства параметров имеет место и в эллиптическом случае, с учетом, что сумма топологических индексов всех решений равна 2.

1.4. СЛУЧАЙ РЕЗОНАНСОВ $p:q,\ |p|+|q| \geq 4$

Случаю $|p|+|q| = 4$ соответствует (единственный) резонанс — 1:3. Пусть отображение Θ эквивариантно относительно действия $SO(2)$ на $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(i\varphi)z_1, \exp(3i\varphi)z_2)^\top \quad (9)$$

(при соответствующем отождествлении вектора $\xi \in \mathbb{R}^4$ с комплексным вектором $z = (z_1, z_2)^\top \in C^2$, $z_1 = \xi_1 + i\xi_2, z_2 = \xi_3 + i\xi_4$). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят в данном случае к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для отображения Θ, эквивариантного относительно действия (9), имеет место следующее представление:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0\\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2\\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0\\ b_1 & a_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & -b_2\\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4\\ (\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_4 - 2\xi_1\xi_2\xi_3\\ (\xi_1^2-3\xi_2^2)\xi_1\\ (3\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_2\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & -c_2\mathcal{I}_1 - d_2\mathcal{I}_2 & 0 & 0\\ c_2\mathcal{I}_1 + d_2\mathcal{I}_2 & c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 & -c_4\mathcal{I}_1 - d_4\mathcal{I}_2\\ 0 & 0 & c_4\mathcal{I}_1 + d_4\mathcal{I}_2 & c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix} +$$

$$+O(|\xi|^4) = 0.$$

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, a_i, b_i, c_i, d_i$ в представлении отображения Θ, указанном в теореме, явно выражаются через «операторные коэффициенты» $f(x,\varepsilon)$.

Уравнение $\Theta(\xi) = 0$ можно заменить уравнением $\widetilde{\Theta}(\xi) = 0$,

$$\widetilde{\Theta}(\xi) = \big(\widetilde{\Theta}_1(\xi), \widetilde{\Theta}_2(\xi), \widetilde{\Theta}_3(\xi), \widetilde{\Theta}_4(\xi)\big)^\top,$$

$$\widetilde{\Theta}_1(\xi) := \big(\Theta(\xi), z_1\big),\ \widetilde{\Theta}_2(\xi) := \big(\Theta(\xi), iz_1\big),$$

$$\widetilde{\Theta}_3(\xi) := \big(\Theta(\xi), z_2\big),\ \widetilde{\Theta}_4(\xi) := \big(\Theta(\xi), iz_2\big),$$

$$z_1 := (\xi_1, \xi_2, 0, 0)^\top,\ iz_1 := (-\xi_2, \xi_1, 0, 0)^\top,$$

$$z_2 := (0, 0, \xi_3, \xi_4)^\top,\ iz_2 := (0, 0, -\xi_4, \xi_3)^\top.$$

Функции $\widetilde{\Theta}_k$ являются инвариантами относительно действия (9), и для них имеют место следующие представления:

$$\widetilde{\Theta}_1(\xi) = a_1\mathcal{I}_3 - b_1\mathcal{I}_4 + \big(\alpha_1 + c_1\mathcal{I}_1 + d_1\mathcal{I}_2\big)\mathcal{I}_1 + o(|\xi|^4),$$

$$\widetilde{\Theta}_2(\xi) = b_1\mathcal{I}_3 + a_1\mathcal{I}_4 + \big(\beta_1 + c_2\mathcal{I}_1 + d_2\mathcal{I}_2\big)\mathcal{I}_1 + o(|\xi|^4),$$

$$\widetilde{\Theta}_3(\xi) = a_2\mathcal{I}_3 - b_2\mathcal{I}_4 + \big(\alpha_2 + c_3\mathcal{I}_1 + d_3\mathcal{I}_2\big)\mathcal{I}_2 + o(|\xi|^4),$$

$$\widetilde{\Theta}_4(\xi) = b_2\mathcal{I}_3 + a_2\mathcal{I}_4 + \big(\beta_2 + c_4\mathcal{I}_1 + d_4\mathcal{I}_2\big)\mathcal{I}_2 + o(|\xi|^4).$$

Здесь $\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4$ — «образующие» инварианты действия (9):

$$\mathcal{I}_3 = (\xi_1^3 - 3\xi_1\xi_2^2)\xi_3 + (3\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^3)\xi_4,$$

$$\mathcal{I}_4 = (\xi_1^3 - 3\xi_1\xi_2^2)\xi_4 - (3\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^3)\xi_3.$$

Перейдя к комплексным переменным, получим соотношения

$$\widetilde{\Theta}_1 + i\widetilde{\Theta}_2 =$$
$$= u_1\left(\mathcal{I}_3 + i\mathcal{I}_4\right) + \mathcal{I}_1\left(\lambda_1 + v_1\mathcal{I}_1 + w_1\mathcal{I}_2\right) + o(|\xi|^4),$$

где $\lambda_1 := \alpha_1 + i\beta_1, u_1 := a_1 + ib_1, v_1 := c_1 + ic_2, w_1 := := d_1 + id_2$, и

$$\widetilde{\Theta}_3 + i\widetilde{\Theta}_4 =$$
$$= u_2\left(\mathcal{I}_3 + i\mathcal{I}_4\right) + \mathcal{I}_2\left(\lambda_2 + v_2\mathcal{I}_1 + w_2\mathcal{I}_2\right) + o(|\xi|^4),$$

где $\lambda_2 := \alpha_2 + i\beta_2, u_2 := a_2 + ib_2, v_2 := c_3 + ic_4, w_2 := := d_3 + id_4$. Из системы двух уравнений (с комплексными коэффициентами)

$$\widetilde{\Theta}_1 + i\widetilde{\Theta}_2 = \widetilde{\Theta}_3 + i\widetilde{\Theta}_4 = 0$$

получим соотношения

$$\mathcal{I}_3 + i\mathcal{I}_4 = -u_1^{-1}\mathcal{I}_1\left(\lambda_1 + v_1\mathcal{I}_1 + w_1\mathcal{I}_2\right) + o(|\xi|^4)$$

и

$$u_2\mathcal{I}_1\left(\lambda_1 + v_1\mathcal{I}_1 + w_1\mathcal{I}_2\right) -$$
$$- u_1\mathcal{I}_2\left(\lambda_2 + v_2\mathcal{I}_1 + w_2\mathcal{I}_2\right) + o(|\xi|^4) = 0.$$

Сгруппировав в последнем соотношении подобные слагаемые, получим **приведенное** уравнение

$$\mu_1\mathcal{I}_1 + \mu_2\mathcal{I}_2 + A\mathcal{I}_1^2 + 2B\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 + C\mathcal{I}_2^2 + o(|\xi|^4) = 0,$$
$$\mu_1 = u_2\lambda_1,\ \mu_2 = -u_1\lambda_2,\ A = u_2v_1,$$
$$B = -u_1w_2,\ C = u_2w_1 - u_1v_2,$$

из которых также можно находить соотношения между амплитудами, угловыми (фазовыми) переменными и параметрами, определять количество бифурцирующих решений и вычислять асимптотические представления для амплитудных переменных.

В случае **слабого резонанса** $p : q(|p| + |q| \geq 5)$ вычисления существенно упрощаются, так как вторая пара образующих инвариантов I_3, I_4 приобретает порядок выше четвертого и, следовательно, не оказывает влияния на формирование главной части приведенного уравнения.

1.5. РЕЗОНАНС 1:1

Случай резонанса 1:1, строго говоря, не укладывается в описанную выше схему и требует модификации. Опуская подробности, заметим, что потребовав, как и ранее, выполнение условия 4-мерности вырождения, получим ключевое отображение в следующей (комплексной) форме:

$$\Theta(\xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 c_{1,k}\mathcal{I}_k & \sum_{k=1}^4 d_{1,k}\mathcal{I}_k \\ \sum_{k=1}^4 c_{2,k}\mathcal{I}_k & \sum_{k=1}^4 d_{2,k}\mathcal{I}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + o(|\xi|^4).$$

Отображение Θ эквивариантно относительно действия ($SO(2)$ на $\mathbb{R}^4$)

$$\mathbf{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \mapsto \exp(i\varphi)z. \qquad (10)$$

Здесь I_3, I_4 — образующие инварианты действия (10):

$$\mathcal{I}_3 = \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4,\ \mathcal{I}_4 = -\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3.$$

Уравнение $\Theta(\xi) = 0$ можно заменить уравнением $\widetilde{\Theta}(\xi) = 0$,

$$\widetilde{\Theta}(\xi) = \left(\widetilde{\Theta}_1(\xi), \widetilde{\Theta}_2(\xi), \widetilde{\Theta}_3(\xi), \widetilde{\Theta}_4(\xi)\right)^\top,$$
$$\widetilde{\Theta}_1(\xi) := \left(\Theta(\xi), z_1\right),\ \widetilde{\Theta}_2(\xi) := \left(\Theta(\xi), iz_1\right),$$
$$\widetilde{\Theta}_3(\xi) := \left(\Theta(\xi), z_2\right),\ \widetilde{\Theta}_4(\xi) := \left(\Theta(\xi), iz_2\right).$$

Функции $\widetilde{\Theta}_k$ инвариантны относительно действия (10), и для них имеют место представления вида (с вещественными коэффициентами)

$$\widetilde{\Theta}_j(\xi) = \sum_{k,l=1}^4 u_{j,k,l}\mathcal{I}_k\mathcal{I}_l + o(|\xi|^4)$$

при условии $u_{1,2,2} = u_{2,2,2} = u_{3,1,1} = u_{4,1,1} = 0.$

После введения в уравнение $\widetilde{\Theta}(\xi) = 0$ полярных координат $z_1 = r_1\exp(i\varphi_1), z_2 = r_2\exp(i\varphi_2)$ и отбрасывания общих множителей получается система уравнений в форме, достаточно удобной для проведения дискриминантного анализа.

Замечание. Некоторые бифуркационные эффекты в случае резонанса 1:1 изучены В. В. Стрыгиным и его учениками методами теории усреднений в задаче синхронизации пары динамических систем (см., например, [13]).

2. ПРИМЕРЫ

2.1. РЕЗОНАНСНЫЕ БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА

Рассмотрим простейшее нелинейное скалярное уравнение из класса уравнений соболевского типа [12]:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + du + u^3 = 0. \qquad (11)$$

Поиск периодических волновых решений в виде

$$u = w(kx - \omega t) \qquad (12)$$

($v = \frac{\omega}{k}$ — скорость распространения волны) приводит, после подстановки (12) в (11) и подходящих масштабирующих преобразований, к уравнению вида

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_1 w + w^3 = 0 \qquad (13)$$

(параметр ε будем считать малым). В итоге получаем задачу построения периодического решения уравнения (13).

Если рассмотреть бифурцирующие волновые решения, допускающие представление

$w(x,t) = r_1 \sin(py + \varphi_1) + r_2 \sin(qy + \varphi_2) + o(r_1, r_2)$,

$y = k\,x - \omega\,t, p, q \in \mathbf{Z}$, НОД $(p,q) = 1$, то получим совокупность решений, в пределах которого реализуется значительное разнообразие профилей и «скоростных» свойств изучаемых волн.

Заметим, что отображение $f: E \to F$, где

$$f(w) := \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_1 w + w^3,$$

$E = \Pi_T^4$ — пространство T-периодических функций класса C^4, F — пространство непрерывных T-периодических функций, является гладким фредгольмовым нулевого индекса отображением банаховых пространств. В дальнейшем полагаем $T = 2\pi$.

Изучение решений (вблизи нуля) уравнения $f(w) = 0$, при локализации параметров

$$\kappa_2 = 5 + \delta_1, \kappa_1 = 4 + \delta_2$$

(см. [7]), можно осуществить через редукцию Ляпунова—Шмидта в пространство ключевых координат $\xi_k = \langle w, e_k \rangle$, где $\{e_k\}$ — набор мод бифуркации, $k \le 4$, $e_1 = \sqrt{2}\cos(x), e_2 = \sqrt{2}\sin(x)$, $e_3 = \sqrt{2}\cos(2x), e_4 = \sqrt{2}\sin(2x)$.

Гомоморфизм $T: G \to O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H, заданный соотношением

$$T_g(w)(x) = w(x + \varphi)$$

(φ — каноническая координата элемента $g \in SO(2), g = (g_{ij}), g_{11} = g_{22} = \cos(\varphi), g_{21} = -g_{12} = \sin(\varphi)$), определяет слабо гладкое ортогональное действие

$$G \times H \to H, (g, w) \mapsto y = T_g(w) \quad \forall (g, w) \in G \times H.$$

Очевидно, что пространства E, F инвариантны относительно данного действия. Очевидна также эквивариантность ключевого отображения относительно индуцированного полусвободного действия $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров $\mathbb{R}^4$. Следовательно, к нему применимы все утверждения и выводы первых двух параграфов.

2.2. ЦИКЛЫ, БИФУРЦИРУЮЩИЕ ИЗ СЛОЖНОГО ФОКУСА С РЕЗОНАНСОМ 1:2

Обратимся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + B(x,x,\varepsilon) + C(x,x,x,\varepsilon) + o(|x|^3),$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}^3, \qquad (14)$$

при условии, что две пары комплексно сопряженных точек спектра матрицы $A(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ трансверсально пересекают мнимую ось с резонансом $1:2$, а остальная часть спектра находится (при всех ε) внутри левой комплексной полуплоскости [15]. Здесь $B(x,x,\varepsilon)$ и $C(x,x,x,\varepsilon)$ — квадратичное и кубическое отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, гладко зависящие от ε ($B(x,y,\varepsilon)$ и $C(x,y,z,\varepsilon)$ — симметричные билинейная и 3-линейная формы с векторными коэффициентами, гладко зависящими от ε).

Запишем уравнение (14) в виде операторного уравнения

$$f(x, \varepsilon) = 0, \qquad (15)$$

в котором x — функция $x(t)$, принадлежащая банахову пространству Π_T^1 (T – периодических непрерывно дифференцируемых функций со значениями в $\mathbb{R}^n$), а f — фредгольмово отображение с квадратичной нелинейностью, действующее из пространства Π_T^1 в банахово пространство Π_T^0 (непрерывных T – периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^n$), заданное соответствием

$$f(\cdot, \varepsilon): x(t) \to y(t) :=$$
$$:= \dot{x}(t) - \nu(A(\varepsilon)x + B(x,x,\varepsilon) + C(x,x,x,\varepsilon)) + \ldots.$$

Параметр $\nu = 1 + \varepsilon_4$ введен для «нормировки» периода. В дальнейшем будем считать $T = 2\pi$.

Применив к уравнению (15) схему Ляпунова—Шмидта, сведем исследование данного уравнения к исследованию уравнения (в $\mathbb{R}^4$)

$$\theta(\xi, \varepsilon) = 0, \xi \in \mathbb{R}^4$$
$$(\theta(\xi,\varepsilon) = (\theta_1(\xi,\varepsilon), \theta_2(\xi,\varepsilon), \theta_3(\xi,\varepsilon), \theta_4(\xi,\varepsilon))^\top).$$

Итак, пусть задана динамическая система (14), где

$$B(x,x,\varepsilon) = \sum_{|k|=2} b_k x^k,$$
$$C(x,x,x,\varepsilon) = \sum_{|k|=3} c_k x^k,$$
$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1(\varepsilon) & 0 \\ 0 & A_2(\varepsilon) \end{pmatrix},$$
$$A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} a_1(\varepsilon) & -w_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ w_1(\varepsilon) & a_1(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2(\varepsilon) & -w_2(\varepsilon) \\ 0 & 0 & w_2(\varepsilon) & a_2(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$a_1(0)=0$, $a_2(0)=0$, $w_2(0)=2\,w_1(0)$.

Напоминаем, что задача о бифуркации циклов рассматривается, как правило, при условии, что две пары комплексно сопряженных точек

$$\{\lambda_1(\varepsilon),\bar{\lambda}_1(\varepsilon)\},\{\lambda_2(\varepsilon),\bar{\lambda}_2(\varepsilon)\} \qquad (16)$$

матрицы $A(\varepsilon)$ трансверсально пересекают мнимую ось с резонансом $1:2$ (остальная часть спектра находится при всех рассматриваемых значениях ε внутри левой комплексной полуплоскости) [15], [16].

«Способ пересечения» мнимой оси описывается соотношениями

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{Re}\lambda_1(0) &=& 0,\\ \operatorname{Re}\lambda_2(0) &=& 0,\\ \operatorname{Im}\lambda_1(0) &=& \omega_1,\\ \operatorname{Im}\lambda_2(0) &=& \omega_2. \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Пусть

$$\omega=\omega_1\left(=\frac{\omega_2}{2}\right),\ \kappa(\varepsilon)=2\operatorname{Im}\lambda_1(\varepsilon)-\operatorname{Im}\lambda_2(\varepsilon).$$

Условие регулярности (трансверсальности) означает, что для рассматриваемого резонанса выполняется соотношение:

$$\det\frac{\partial(\operatorname{Re}\lambda_1,\operatorname{Re}\lambda_2,\kappa)}{\partial(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}\neq 0.$$

Итак, исходное дифференциальное уравнение представлено в операторном виде $f(x,\varepsilon)=0$, где

$$f(x,\varepsilon,\nu)=\dot{x}-\nu(A(\varepsilon)x+B(x,x,\varepsilon)+$$
$$+C(x,x,x,\varepsilon))+\ldots,\nu=1+\varepsilon_4,$$
$$f(\cdot,\varepsilon):\Pi^1_{2\pi}\to\Pi^0_{2\pi}$$

— эквивариантное относительно слабо гладкого действия T_g окружности, заданного соотношением

$$T_g(x)(t)=x(t+\varphi)$$

(φ — каноническая «угловая» координата элемента $g\in SO(2)$).

Как обычно, анализ данного уравнения начинается с изучения линеаризованного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\varepsilon)h=0,$$

при локализациях параметров вблизи бифуркационного значения $\varepsilon=0$. При этом имеем

$$N:=Ker\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=Span\{e_1,e_2,e_3,e_4\},$$

где

$$e_1=(\cos(t),\sin(t),0,0,0,\ldots,0)^\top,$$
$$e_2=(-\sin(t),\cos(t),0,0,0,\ldots,0)^\top,$$
$$e_3=(0,0,\cos(2t),\sin(2t),0,\ldots,0)^\top,$$
$$e_4=(0,0,-\sin(2t),\cos(2t),0,\ldots,0)^\top.$$

Пространство $\Pi^1_{2\pi}$ разлагается в прямую сумму подпространства N и ортогонального к нему дополнения $N^\perp$ в метрике $L_2([0,2\pi],\mathbb{R}^n)$. Таким образом,

$$x=u+v,\ u\in N,\ v\perp N,$$
$$u=\xi_1\cdot e_1+\xi_2\cdot e_2+\xi_3\cdot e_3+\xi_4\cdot e_4.$$

В соответствии со схемой редукции, основное уравнение разбивается в систему

$$\left.\begin{array}{l} f^{(4)}(u+v,\varepsilon,\nu)=0,\\ f^{(\infty-4)}(u+v,\varepsilon,\nu)=0, \end{array}\right\} \qquad (18)$$

где

$$f^{(4)}(u+v,\varepsilon,\nu)=\sum_{i=1}^4\left\langle f(u+v,\varepsilon,\nu),e_i\right\rangle e_i,$$

$$f^{(\infty-4)}(u+v,\varepsilon,\nu)=f(u+v,\varepsilon,\nu)-f^{(4)}(u+v,\varepsilon,\nu),$$

$$\left\langle x,y\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x(t),y(t))dt,\ \ (x,y)=\sum_{i=1}^n x_i(t)y_i(t).$$

Переменная v явно выражается в силу второго уравнения системы (18) через $\xi_1,\xi_2,\ \xi_3,\xi_4$ (по теореме о неявной функции).

Для левой части соответствующего ключевого уравнения имеет место представление, указанное в теореме 1.

2.3. СИСТЕМА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ И ТРЕНИЕМ

Рассмотрим пример динамической системы с квадратично-кубической нелинейностью из класса обобщенных «систем гидродинамического типа» [19], [20].

Рассмотрим сначала обобщенное двумерное уравнение Навье—Стокса [20]—[21]

$$\dot{v}+\frac{\partial v}{\partial x}v=$$
$$=\nu\Delta(v)+\mu v+c\operatorname{grad}(P)+\lambda B\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \qquad (19)$$

(Δ — двумерный лапласиан) с условием несжимаемости

$$\operatorname{div}(v)=0 \qquad (20)$$

на ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ с гладкой границей и «какими-нибудь» стандартными краевыми условиями. Мы предполагаем, что, кроме традиционного вектора силы вязкости $\nu\Delta(v)$, уравнение содержит вектор дополнительных сил торможения μv и упругой вязкости $\lambda B(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})$ [17], [20]. Положим, для определенности (см. [17]),

$$B\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) := \operatorname{div}(dD) = D\operatorname{grad}(d) + \frac{1}{2}d\Delta(v),$$

где $D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}^{\top} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ — тензор скоростей деформации, $d = \det D$.

Для простоты ограничимся рассмотрением решений, периодических по x_1, x_2 (случай уравнения на плоском торе). Будем разыскивать решение в виде (см. условие (20))

$$v := s\operatorname{grad}(\psi) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\top},$$

где ψ — вихревая функция. Нетрудно проверить, что вместо (19)—(20) получим после применения двумерного ротора скалярное уравнение

$$\begin{aligned}\Delta(\dot\psi) &= [\Delta(\psi),\psi] + \nu\Delta^2(\psi) + \\ &+ \mu\Delta(\psi) + \widetilde{B}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3},\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right),\end{aligned} \qquad (21)$$

где $[\psi,\varphi]$ — якобиан функций ψ,φ.

Посредством одной из процедур дискретизации по пространственным переменным (например, разностной аппроксимацией или специальным галеркинским приближением [21], [19], [20]) можно получить обобщенную конечномерную систему гидродинамического типа

$$\dot w = A(w) + [Mw, w] + B(w,w,w),\ w \in \mathbb{R}^n,$$

в которой M — симметричная матрица, матрица A, вообще говоря, не является симметричной (ее спектр может содержать комплексные числа с ненулевыми мнимыми частями), $[\cdot,\cdot]$ — кососимметрическая билинейная операция, задающая структуру алгебры Ли на $\mathbb{R}^n$, $B(w,w,w)$ — некоторое кубическое отображение.

В случае галеркинской аппроксимации по базисной системе $c_1, s_1, c_2, s_2, c_3, s_3$,

$$c_1 = 2\cos(x),\ c_2 = 2\cos(y),\ c_3 = 2\cos(x+y),$$

$$s_1 = 2\sin(x),\ s_2 = 2\sin(y),\ s_3 = 2\sin(x+y),$$

получим динамическую систему

$$\dot w = Aw + B(w,w) + C(w,w,w),\ w \in \mathbb{R}^6, \quad (22)$$

в которой

$$A = \begin{pmatrix} -\delta_1 & p+\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p-\varepsilon_1 & -\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_1 & q+\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q-\varepsilon_2 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_2 & p+q+O(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(p+q)+O(\varepsilon) & -\delta_2 \end{pmatrix},$$

$$B(w,w) = \begin{pmatrix} w_3w_5 - w_4w_6 \\ -w_3w_6 - w_4w_5 \\ -w_1w_5 + w_2w_6 \\ w_1w_6 + w_2w_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\delta_1 = \nu - \mu,\quad \delta_2 = 2\nu - \mu.$

Коэффициенты $C(w,w,w)$ допускают явное представление. Параметры $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ появляются за счет малых «шевелений» периодов по переменным x_1, x_2.

Запишем уравнение (22) в операторном виде

$$f(w,\delta,\varepsilon) = 0, \qquad (23)$$

где

$$f(w,\delta,\varepsilon) = \dot w - A(\delta,\varepsilon)w - B(w,w) - C(w,w,w).$$

Как обычно, анализ этого уравнения начинается с рассмотрения линеаризованного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,\delta,\varepsilon)h = 0$$

(при значениях параметров δ,ε, близких к нулю). При этом

$$N := Ker\frac{\partial f}{\partial z}(0) = Span_C\{g_1, g_2, g_3, g_4\},$$

где

$$g_1 = (\cos(pt), -\sin(pt), 0,0,0,0)^{\top},$$

$$g_2 = (\sin(pt), \cos(pt), 0,0,0,0)^{\top},$$

$$g_3 = (0,0,\cos(qt), -\sin(qt), 0,0)^{\top},$$

$$g_4 = (0,0,\sin(qt), \cos(qt), 0,0)^{\top}.$$

Пространство $E := \Pi^1_{2\pi}$ разлагается в прямую сумму подпространства N и ортогонального к нему (в метрике $L_2[0,2\pi]$) дополнения $R_* := N^{\perp} \cap E$. Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= u + v,\ u \in N,\ v \perp N, \\ u &= \xi_1\cdot g_1 + \xi_2\cdot g_2 + \xi_3\cdot g_3 + \xi_4\cdot g_4. \end{aligned} \qquad (24)$$

В соответствии со схемой редукции по Ляпунову—Шмидту уравнение (23) разбивается в систему

$$\left.\begin{array}{rcl} f^{(4)}(u+v,\delta,\varepsilon) &=& 0,\\ f^{(\infty-4)}(u+v,\delta,\varepsilon) &=& 0,\end{array}\right\} \qquad (25)$$

где

$$f^{(4)}(u+v,\delta,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{4}\left\langle f(u+v,\delta,\varepsilon),g_i\right\rangle\cdot g_i,$$

$$f^{(\infty-4)}(u+v,\delta,\varepsilon)=f(u+v,\delta,\varepsilon)-f^{(4)}(u+v,\delta,\varepsilon),$$

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x(t)y(t))dt,(x,y)=\sum_{i=1}^{4}x_i(t)y_i(t).$$

Переменная v явно выражается в силу второго уравнения системы (25) через ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4.

На основе полученных ранее соотношений нетрудно вычислить коэффициенты главной части ключевого уравнения (см. соотношения (1)—(2)) и, соответственно, приведенного уравнения.

Исследовав по ранее описанной схеме ключевое уравнение, получим асимптотическое представление его решения (в промасштабированных координатах) вида

$$\begin{pmatrix} r_1(\sin(\alpha)\cos(pt)+\cos(\alpha)\sin(pt))\\ r_1(-\sin(\alpha)\sin(pt)+\cos(\alpha)\cos(pt))\\ r_2(\sin(\beta)\cos(qt)+\cos(\beta)\sin(qt))\\ r_2(-\sin(\beta)\sin(qt)+\cos(\beta)\cos(qt))\end{pmatrix}+o(r_1,r_2),$$

где $r_1=O(\delta,\varepsilon)$, $r_2=O(\delta,\varepsilon)$ — амплитудные переменные.

Соответственно, для вихревой функции получим представление

$$\psi(x_1,x_2,t)=qx_1-px_2+\varphi(x_1,x_2,t), \qquad (26)$$

где

$$\varphi(x_1,x_2,t)=r_1(\cos(\alpha+pt)\cos(x_1)+$$
$$+\sin(\alpha+pt)\sin(x_1))+r_2(\cos(\beta+qt)\cos(x_2)+$$
$$+\sin(\beta+qt)\sin(x_2))+o(r_1,r_2)=$$
$$=r_1\cos(x_1-\alpha-pt)+r_2\cos(x_2-\beta-qt)+o(r_1,r_2)=$$
$$=r_1\cos(\tilde{x}_1)+r_2\cos(\tilde{x}_2)+o(r_1,r_2)=\tilde{\varphi}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$$

— после замены

$$x_1-\alpha-pt=\tilde{x}_1, x_2-\beta-qt=\tilde{x}_2.$$

Зарождающиеся волновые движения жидкости определяются двумерной гамильтоновой системой

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\\ \dot{x}_2 &=& \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\end{array}\right\}$$

или системой

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{x}_1 &=& -\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}_2}\\ \tilde{x}_2 &=& \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{x}_1}\end{array}\right\}. \qquad (27)$$

Замечание. Переход к системе (27) можно осуществить без промежуточного перехода к системе (22). Для этого достаточно рассмотреть решения уравнения (21) в форме бегущей волны (26), что дает возможность сведения задачи к стационарному уравнению Навье—Стокса, для которого допускается непосредственное применение схемы Ляпунова—Шмидта.

Переход к системе (22) дает некоторые дополнительные возможности: можно исследовать зарождения условно периодических колебаний, устойчивость зарождающихся волновых движений и пр. [14]—[16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А.* Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. — М. : Наука, 1969. — 456 с.

2. *Красносельский М. А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

3. *Marsden J. E.* On the geometry of the Liapunov-Schmidt procedure / J. E. Marsden// Lect. Notes in Math. — 1979. — Vol. 755. — P. 77—82.

4. *Треногин В. А.* Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркации, симметрия / В. А. Треногин, Н. А. Сидоров, Б. В. Логинов// ДАН СССР. — 1989. — Т. 309, № 2. — С. 286—289.

5. *Зачепа В. Р.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В. Р. Зачепа, Ю. И. Сапронов / Воронеж : ВГУ, 2002. — 185 с.

6. *Сапронов Ю. И.* Обобщенная редукция Каччиополи и бифуркация решений уравнений при разрушении непрерывных симметрий / Ю. И. Сапронов, В. А. Смольянов // Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж : ВГУ, 2001. — С. 125—139.

7. *Даринский Б. М.* Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов // Современная математика и ее приложения. — Тбилиси, 2003. — Т. 7. — С. 72—86.

8. *Зайцев В. Ф.* Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Ф. Зайцев. — Л. : ЛГПИ, 1989. — 80 с.

9. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.

10. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978.

11. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир, 1989. — 639 с.

12. *Свиридюк Г. А.* Линейные уравнения соболевского типа / Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров. — Челябинск : Челяб. гос. ун-т. 2003. — 179 с.

13. *Стрыгин В. В.* Бифуркация малых синхронных автоколебаний двух динамических систем с близкими частотами / В. В. Стрыгин, Г. Ю. Северин // Вестник ВГУ. Сер.: Физика, математика. — 2006. — № 2.

14. *Рабинович М.И.* Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. — М. : Наука, 1984. — 432 с.

15. *Хэссард Б.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. — М. : Мир, 1985. — 280 с.

16. *Бибиков Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации / Ю. Н. Бибиков. — Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1991. — 144 с.

17. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория / П. Жермен. — М. : Высш. шк., 1983. — 399 с.

18. *Арнольд В. И.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. — М. : Наука, 1982. — 304 с.

19. *Обухов А. М.* Турбулентность и динамика атмосферы / А. М. Обухов. — Л. : Гидрометеоиздат, 1988. — 414 с.

20. *Арнольд В. И.* Топологические методы в гидродинамике / В. И. Арнольд, Б. А. Хесин. — М. : МЦНМО, 2007. — 392 с.

21. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.