УДК 517.946

О МАЛЫХ ОДНОМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Глушко, А. С. Рябенко

Воронежский государственный университет

В работе изучается начально-краевая задача, описывающая малые колебания стратифицированной жидкости в полупространстве. Доказано существование и единственность решения, а также построены асимптотики решения при $t \to \infty$.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: асимптотика, локализация, оценка решения, стабилизация решения, вязкая стратифицированная жидкость.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}\right)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0}\rho(t,x) = 0;$$

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} - \left(N^2 + gc^{-2}\right)\rho_0 V(t,x) + \rho_0 \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} - c^{-2}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} - N^2 \rho_0 V(t,x) = 0,$$

$$x > 0,\ t > 0.$$

Система дополнена начальными условиями

$$V(t,x)\big|_{t=0} = 0;\ P(t,x)\big|_{t=0} = 0;\ \rho(t,x)\big|_{t=0} = 0; \quad x > 0 \quad (2)$$

и граничным условием

$$V(t,x)\big|_{x=0} = W(t). \quad (3)$$

Начально-краевая задача (1)—(3) описывает в линейном приближении малые акустическо-гравитационные колебания вязкой жидкости. Колебания считаются одномерными (в направлении однородного поля тяготения). Результаты изучения задачи Коши для системы (1) содержатся в работе [1] и шестой главе монографии [2].

Использованы следующие обозначения:

$V(t,x), \rho(t,x), P(t,x)$ — скорость, отклонение от стационарной плотности, отклонение от стационарного давления в частице жидкости, находящейся в момент $t > 0$ в точке $x > 0$; μ, λ — первый и второй коэффициенты вязкости среды; c — скорость распространения звуковых колебаний в среде; ρ_0 — среднее значение стационарной плотности; g — ускорение свободного падения; $N\sqrt{g}$ — частота Вейсяля—Брента.

Система уравнений (1) выписана для экспоненциально стратифицированной жидкости $(N = \text{const})$ в приближении Буссинеска $(\rho_0 = \text{const})$.

Пусть функция $W(t)$ из (3), удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1.

1^0. Существует $\varepsilon > 0$, такое, что справедлива оценка

$$\left|W(t)\right| \le ce^{-2\varepsilon t},\ t \in [0,\infty).$$

2^0. $W(t) \in C\left([0,\infty)\right)$.

Условие 2.

1^0. $W(t) \in C^2\left([0;\infty)\right)$; $W(0) = 0$.

2^0. Существует $\varepsilon > 0$, такое, что справедливы оценки

$$\left|W^{(k)}(t)\right| \le ce^{-2\varepsilon t},\ t \in [0,\infty),\ k = 0,1,2.$$

1. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)—(3)

После применения к уравнениям (1)—(3) преобразования Лапласа $L_{t\to\gamma}$ с использованием условий (2) задача (1)—(3) перейдет в следующую задачу о нахождении ограниченного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной $x > 0$

$$-\left(\frac{2\mu + \lambda}{\rho_0}\right)\frac{d^2\,\mathrm{v}(\gamma,x)}{dx^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{dp(\gamma,x)}{dx} + \gamma\,\mathrm{v}(\gamma,x) + \frac{g}{\rho_0}\tilde{\rho}(\gamma,x) = 0; \quad (4)$$

$$\rho_0\frac{d\,\mathrm{v}(\gamma,x)}{dx} + \gamma\tilde{\rho}(\gamma,x) - \left(N^2 + gc^{-2}\right)\rho_0\,\mathrm{v}(\gamma,x) = 0$$

с уравнением связи

$$\gamma\tilde{\rho}(\gamma,x) - c^{-2}\gamma p(\gamma,x) - N^2\rho_0\,\mathrm{v}(\gamma,x) = 0 \quad (5)$$

и граничным условием

$$\mathrm{v}(\gamma,x)\big|_{x=0} = \mathrm{w}(\gamma). \qquad (6)$$

Используются следующие обозначения $\mathrm{w}(\gamma) = L_{t\to\gamma}[W(t)]$, $\mathrm{v}(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}[V(t,x)]$, $\tilde{\rho}(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}[\rho(t,x)]$, $p(\gamma,x) = L_{t\to\gamma}[P(t,x)]$.

Задача (4)—(6) имеет решение

$$\mathrm{v}(\gamma,x) = \mathrm{w}(\gamma)\exp\left[-\sqrt{r(\gamma)}x\right];$$

$$\tilde{\rho}(\gamma,x) = \mathrm{w}(\gamma)\gamma^{-1}\exp\left[-\sqrt{r(\gamma)}x\right]\cdot\rho_0\left(\frac{a}{g}+\sqrt{r(\gamma)}\right); \quad (7)$$

$$p(\gamma,x) = c^2\rho_0\gamma^{-1}\,\mathrm{w}(\gamma)\exp\left[-\sqrt{r(\gamma)}x\right]\left(gc^{-2}+\sqrt{r(\gamma)}\right).$$

В (7): $\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\arg z\right), \arg z \in [-\pi;\pi]$ — арифметическая ветвь корня, $r(\gamma) = dc^{-2}\left(\gamma - d + (d^2+a)(\gamma+d)^{-1}\right)$; $d = \rho_0 c^2(2\mu+\lambda)^{-1}$; $a = g\left(N^2 + gc^{-2}\right)$.

Формальное решение задачи (1)—(3) можно записать в виде

$$V(t,x) = L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\mathrm{v}(\gamma,x)\right];$$
$$\rho(t,x) = L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\tilde{\rho}(\gamma,x)\right]; \qquad (8)$$
$$P(t,x) = L^{-1}_{\gamma\to t}\left[p(\gamma,x)\right].$$

Из (7) видно, что компоненты решения теряют аналитичность в точке $\gamma = -d$ (см. представление $r(\gamma)$), а также на контурах в комплексной плоскости, на которых подкоренное выражение в $\sqrt{r(\gamma)}$ вещественно и не положительно. Эти контуры можно параметризовать следующим образом:

$$\gamma_k(\xi) = \frac{1}{2}\left(-\xi^2 + (-1)^{k+1}\sqrt{\xi^4 - 4\left(a+\xi^2 d\right)}\right),$$
$$k = 1,2,\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Кроме этого, легко можно убедиться, что при всех $\xi \neq 0$ $\operatorname{Re}\gamma_k(\xi) < 0$. Для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что если $|\xi| \geq \delta$, то $\operatorname{Re}\gamma_k(\xi) \leq -\varepsilon < 0, k = 1,2$.

С помощью интегральной теоремы Коши в представлении (8) можно заменить контур интегрирования таким образом, что компоненты решения задачи (1)—(3) примут следующий вид

$$V(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} e^{\gamma t - \sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\,d\gamma + \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_k} e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\,d\gamma; \qquad (9)$$

$$\rho(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\gamma^{-1}\rho_0\left(\frac{a}{g}+\sqrt{r(\gamma)}\right)d\gamma + \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_k} e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\gamma^{-1}\rho_0\left(\frac{a}{g}+\sqrt{r(\gamma)}\right)d\gamma + e^{-\frac{\sqrt{a}x}{c}}\rho_0\left(\frac{a}{g}+\frac{\sqrt{a}}{c}\right)\int_0^\infty W(t)dt; \qquad (10)$$

$$P(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\gamma^{-1}c^2\rho_0\left(gc^{-2}+\sqrt{r(\gamma)}\right)d\gamma + \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_k} e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\gamma^{-1}c^2\rho_0\left(gc^{-2}+\sqrt{r(\gamma)}\right)d\gamma + e^{-\frac{\sqrt{a}x}{c}}c^2\rho_0\left(gc^{-2}+\frac{\sqrt{a}}{c}\right)\int_0^\infty W(t)dt. \qquad (11)$$

Контуры l_k в (9)—(11) есть берега разрезов вдоль линий $\gamma_k(\xi)$, $k = 1, 2$, $\xi\in(-\delta;\delta)$ потери аналитичности подынтегральных выражений.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)—(3)

Теорема 1 (существование решения). Пусть функция $W(t)$ удовлетворяет условию 1. Тогда существует и представляется в явном виде (9)-(11) решение уравнения (1), компоненты которого являются бесконечно дифференцируемыми функциями аргументов $t \geq 0$, $x > 0$, равномерно ограниченными на множестве $t\in[0;\infty)$, $x\in[x_0,\infty)$, для любого $x_0 > 0$. Если выполнено условие 2, данное решение уравнения (1) является непрерывным, равномерно по $x\in[0;\infty)$, $t\in[0;\infty)$ и для него выполнены условия (2)—(3).

Приведем краткую схему доказательства.

Лемма 1. Пусть $\gamma = \xi + i\tau, \xi,\tau\in\mathbb{R}$, $-d < -2\delta < \xi$, тогда, если $|\gamma| > N$, где $N > 0$ — достаточно велико, то $\cos\left(\frac{1}{2}\arg r(y)\right) > \frac{1}{2}$.

Лемма 2. Существует $N > 0$, такое, что при $|\gamma| \geq N$, $x \geq 0$ справедлива оценка $\left|\exp\left(-\sqrt{r(\gamma)}\right)x\right| \leq \exp(-0,25|\gamma|^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}cx)$.

Доказательство основывается на лемме 1 и оценке $|r(\gamma)| \geq 0,5dc^{-2}\,|\,\gamma\,|$.

Лемма 3. Пусть функция $W(t)$ из (3) удовлетворяет условию (1). Тогда интеграл $\mathrm{w}(\gamma)$ из (6) является аналитической функцией

$\gamma : \operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$. Если же $W(t)$ удовлетворяет условию (2), то для $\mathrm{w}(\gamma)$ также выполнена оценка: $\left|\mathrm{w}(\gamma)\right| \le c\left(1+|\gamma|\right)^{-2}$, $\gamma \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$.

Доказательство дифференцируемости компонентов решения задачи (1)—(3) проводится в лемме 4.

Лемма 4. Пусть функция $W(t)$ удовлетворяет условию 1. Тогда компоненты решения (9)—(11) задачи (1)—(3) являются бесконечно дифференцируемыми функциями аргументов $t \ge 0$, $x > 0$, равномерно ограниченными на множестве $t \in [0;\infty)$, $x \in [x_0, \infty)$, для любого $x_0 > 0$. Если выполнено условие 2, данное решение уравнения (1) является непрерывным, равномерно по $x \in [0;\infty)$, $t \in [0;\infty)$.

Докажем первое утверждение леммы. Доказательство проведем на примере функции (11). Для выражений (9) и (10) доказательства аналогичны. Слагаемое $e^{-\sqrt{d}\frac{x}{c}}c^2\rho_0\left(gc^{-2}+\sqrt{a}c^{-1}\right)\int\limits_0^\infty W(t)dt$ имеет ограниченные по $x \in [0;\infty)$ производные любого порядка и постоянно по t. Первые два слагаемых в правой части (11) обозначим в сумме как $P_0(t,x)$ и оценим следующим образом:

$$\left|P_0(t,x)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty}\left|e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}c^2\rho_0\gamma^{-1}\mathrm{w}(\gamma)\left(gc^{-2}+\sqrt{r(\gamma)}\right)\right|d|\gamma| +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_k}\left|e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\gamma^{-1}\mathrm{w}(\gamma)\rho_0c^2\left(gc^{-2}+\sqrt{r(\gamma)}\right)\right|d|\gamma| \le$$

$$\le K\left[\int\limits_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty}e^{-\frac{\sqrt{d}}{c}\frac{|\gamma|^{\frac{1}{2}}}{4}x}\left(1+|\gamma|\right)|\gamma|^{-1}d|\gamma| + \right.$$

$$\left. +\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_k}e^{-\frac{\sqrt{d}}{c}\frac{|\gamma|^{\frac{1}{2}}}{4}x}\left(1+|\gamma|\right)|\gamma|^{-1}d|\gamma|\right].$$

Интегралы от выражений $e^{-\frac{\sqrt{d}}{c}\frac{|\gamma|^{\frac{1}{2}}}{4}x}P\left(|\gamma|\right)$, где $P\left(|\gamma|\right)$ — произвольный многочлен, сходятся при любом $x > 0$. Производные $\frac{\partial^l}{\partial t^l}$ и $\frac{\partial^l}{\partial x^l}$ от $P_0(t, x)$ лишь изменяют степень многочлена $P\left(|\gamma|\right)$. Непрерывность компонентов решения на множестве $x \in [0;\infty)$, $t \in [0;\infty)$ доказывается аналогично.

Лемма 5. Пусть выполнено условие 2, тогда компонента (9) решения задачи (1)—(3) удовлетворяет граничному условию (3), а компоненты (9)—(11) решения задачи (1)—(3) удовлетворяют начальному условию (2).

Доказательство выполнения условия (3) следует из свойств преобразования Лапласа и леммы 3.

Покажем, что компоненты решения задачи (1)—(3) удовлетворяют начальному условию. Из леммы 4 следует, что при выполнении условия 2 компоненты решения непрерывны при $x \ge 0$ и $t \ge 0$.

Рассмотрим доказательство выполнения начального условия на примере $P(t,x)$. $\lim\limits_{|\gamma|\to\infty}\left|\gamma p(\gamma,x)\right| = 0$. Но $\lim\limits_{|\gamma|\to\infty}\left|\gamma p(\gamma,x)\right| = \lim\limits_{t\to+0}\left|P(t,x)\right|$. Отсюда $\lim\limits_{t\to+0}\left|P(t,x)\right| = 0$. Существование предела $\lim\limits_{t\to+0}\left|P(t,x)\right|$ вытекает из непрерывности компонент решения вплоть до $t = +0$.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)—(3)

Теорема 2 (класс единственности решения). Пусть выполнено условие 2. Тогда при каждом $t \ge 0$ компоненты построенного в теореме 1 решения, а также их производные $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}, \frac{\partial V(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial P(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}$ принадлежат по переменной $x \in [0;\infty)$ пространству $L_2\left(\mathbb{R}^+\right)$, их нормы в $L_2\left(\mathbb{R}^+\right)$ непрерывны и ограничены равномерно на любом компакте $t \in [0;d]$. Это решение единственно в классе функций, принадлежащих вместе со своими производными $\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2}, \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial u_3(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t}$ при каждом $t \ge 0$ пространству $L_2\left(\mathbb{R}^+\right)$, нормы которых в $L_2\left(\mathbb{R}^+\right)$ локально интегрируемы по $t > 0$.

Доказательство проводится на основе следующих лемм.

Лемма 6. Пусть выполнено условие 2. Тогда при каждом $t \ge 0$ компоненты (9)—(11) решения, а также их производные $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}, \frac{\partial V(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial P(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t}$ принадлежат пространству $L_2\left(\mathbb{R}^+\right)$ и их нормы в $L_2\left(\mathbb{R}^+\right)$ непрерывны и ограничены равномерно на любом компакте $t \in [0;d]$.

Доказательство проведем на примере компоненты (11). Представим функцию $P(t,x)$ в виде $P(t,x)=\sum_{k=0}^{3}P_k$, где

$$P_0(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{-i\infty+\varepsilon}e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}c^2\rho_0\gamma^{-1}\left(gc^2+\sqrt{r(\gamma)}\right)\mathrm{w}(\gamma)\,d\gamma;$$

$$P_k(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_k}e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}c^2\rho_0\gamma^{-1}\left(gc^2+\sqrt{r(\gamma)}\right)\mathrm{w}(\gamma)\,d\gamma,$$

$$k=1,2;$$

$$P_3(x)=e^{-\sqrt{a}xc^{-1}}c^2\rho_0\left(gc^{-2}+\sqrt{a}c^{-1}\right)\int_0^\infty W(t)dt.$$

Утверждение леммы относительно слагаемого $P_3(x)$ очевидно. Перейдем к оценке функции $P_0(t,x)$. При $x\in[0;1]$ воспользуемся результатами леммы 4, согласно которым $P_0(t,x)$ — непрерывная, равномерно по $(t,x)\in[0;\infty)\times[0;1]$ ограниченная функция. Пусть теперь $x\in[1;\infty)$. Для оценки $P_0(t,x)$ воспользуемся оценками, приведенными ранее и очевидными неравенствами $|r(\gamma)|^{\frac{1}{2}}\geq\delta(1+|\gamma|)^{\frac{1}{2}}$; $|\gamma|^{-1}\leq\dfrac{c(\varepsilon)}{1+|\tau|}$. Получим при $x\geq1$ $(\gamma=-\varepsilon+i\tau,\ \tau\in\mathbb{R})$

$$|P_0(t,x)|\leq c_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\delta(1+|\tau|)^{0,5}x}\frac{1}{(1+|\tau|)^2}d\tau=$$

$$=2c_0\int_0^\infty e^{-\delta(1+|\tau|)^{0,5}x}\frac{1}{(1+\tau)^2}d\tau\leq2c_0\int_0^\infty e^{-\delta(1+|\tau|)^{0,5}x}d\tau=$$

$$=\frac{2c_0}{\delta^2x^2}\int_0^\infty e^{-\delta(1+|\tau|)^{0,5}x}d\left(x^2+\tau x^2\right)\delta^2\leq\frac{2c_0}{\delta^2x^2}\int_0^\infty e^{-\sqrt{z}}dz\leq\frac{c'}{x^2}.$$

Объединяя полученные относительно $P_0(t,x)$ результаты, получаем оценку, которая аналогично повторяется для $P_k(t,x)$:

$$|P_0(t,x)|\leq c''(1+x^2)^{-1};$$
$$|P_k(t,x)|\leq c_1(1+t)(1+x)^{-1},\qquad(12)$$
$$t\geq0,\ x\geq0,\ k=1,2.$$

Из оценок (12) следует утверждение леммы.

Лемма 7. Решение задачи (1)—(3) единственно в классе функций, принадлежащих вместе со своими производными $\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x},\dfrac{\partial^2u_1(t,x)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t},\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_3(t,x)}{\partial x},\dfrac{\partial u_3(t,x)}{\partial t}$ при каждом $t\geq0$ пространству $L_2(\mathbb{R}^+)$, нормы которых в $L_2(\mathbb{R}^+)$ локально интегрируемы по $t>0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (1)—(3) с однородными начальными и краевыми условиями. Компоненты ее решения обозначим через $(u_1,\ u_2,\ u_3)$. Покажем, что у этой задачи есть только нулевое решение. Энергетическое тождество, записанное для решения этой задачи на множестве $x\in\mathbb{R}^+$, $t\in[0;\,d]$, имеет вид (использовано обозначение $\nu=(\lambda+2\mu)\rho^{-1}$)

$$0=\frac{\|u_1(d,\cdot)\|_2^2}{2}+\nu\int_0^d\|u_1(t,\cdot)\|_2^2dt+\frac{1}{2\rho_0^2c^2}\|u_3(d,\cdot)\|_2^2+$$
$$+\frac{g}{2N^2\rho_0^2c^4}\Big[\|u_3(d,\cdot)\|_2^2+c^4\|u_2(d,\cdot)\|_2^2-$$
$$-2c^2\left(u_2(d,\cdot),u_3(d,\cdot)\right)\Big].\qquad(13)$$

Нормы и скалярное произведение в $L_2(0,\ \infty)$ в равенстве (13) считаются по x. Оценим выражение в квадратных скобках с использованием неравенства Коши—Буняковского:

$$\|u_3(d,\cdot)\|_2^2+c^4\|u_2(d,\cdot)\|_2^2-2c^2\left(u_2(d,\cdot),u_3(d,\cdot)\right)\geq$$
$$\geq2c^2\Big[\|u_3(d,\cdot)\|_2\|u_2(d,\cdot)\|_2-\left(u_2(d,\cdot),u_3(d,\cdot)\right)\Big]\geq0.$$

Доказано, что правая часть равенства (13) является суммой четырех неотрицательных слагаемых. Отсюда немедленно следует, что при любом $d>0$: $\|u_k(d,\cdot)\|_2=0$. А значит, в рассматриваемом классе однородная задача (1)—(3) имеет только нулевое решение и, следовательно, неоднородная задача (1)—(3) имеет единственное решение.

4. ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ

Теорема 3. Если выполнено условие 2, то при $t\to\infty$ функции

$$V_0(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon}e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\,d\gamma;\qquad(14)$$

$$\rho_0(t,x)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon}e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}\,\mathrm{w}(\gamma)\gamma^{-1}\rho_0\left(\frac{a}{g}+\sqrt{r(\gamma)}\right)d\gamma;\ (15)$$

$$P_0(t,x)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon}e^{\gamma t-\sqrt{r(\gamma)}x}c^2\rho_0\gamma^{-1}\,\mathrm{w}(\gamma)\left(gc^{-2}+\sqrt{r(\gamma)}\right)d\gamma\quad(16)$$

удовлетворяют равномерной по $x\in\mathbb{R}^+$ оценке $O\left(e^{-\varepsilon t}\right)$.

Докажем это утверждение на примере $V_0(t,x)$. На рассматриваемом контуре интегрирования $|e^{\gamma t}|=e^{-\varepsilon t}$, $\left|e^{-\sqrt{r(\gamma)}x}\right|\leq1$ ($\sqrt{r(\gamma)}$ — арифметическая ветвь корня, т. е. $\mathrm{Re}\sqrt{r(\gamma)}\geq0$).

Кроме того, при выполнении условия 2, как следует из леммы 3, $\left|w(\gamma)\right| \le \dfrac{c}{\left(1+|\gamma|\right)^2}$.

Таким образом, равномерно по $x \in [0;\infty)$ подынтегральное выражение можно мажорировать величиной $c_0(\varepsilon)\dfrac{e^{-\varepsilon t}}{\left(1+|\gamma|\right)^2}$. Отсюда немедленно следует как абсолютная сходимость интегралов (14), так и оценка из теоремы 3. Для $\rho_0(t,x), P_0(t,x)$ доказательство проводится аналогично.

5. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ ПРИ $t \to \infty$ КОМПОНЕНТОВ РЕШЕНИЯ

Теорема 4. (асимптотическое представление решения). Пусть выполнено условие 2. Тогда справедливы следующие асимптотические представления при $t \to \infty$ компонент $V(t,x)$, $\rho(t,x)$, $P(t,x)$ решения задачи (1)—(3):

$$V(t,x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{\pi c}\int_0^\infty (\cos(\sqrt{a}\tau - \sqrt{a}t + 3\varphi) -$$

$$-da^{-\frac{1}{2}}\sin(\sqrt{a}\tau - \sqrt{a}t + 3\varphi))W(\tau)d\tau) \times$$

$$\times\left[t\left(\frac{1}{4}+\frac{d^2}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{3}{2}} + O(t^{-2}); \qquad (17)$$

$$\rho(x,t) = e^{-\sqrt{a}xc^{-1}}\rho_0(g^{-1}a + \sqrt{a}c^{-1})\int_0^\infty W(t)dt +$$

$$+\frac{\rho_0 d^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}}{\pi c}(1 - xg^{-1}a)\int_0^\infty (da^{-\frac{1}{2}}\cos(\sqrt{a}\tau - \sqrt{a}t + 3\varphi) +$$

$$+\sin(\sqrt{a}\tau - \sqrt{a}t + 3\varphi))W(\tau)d\tau \times$$

$$\times\left[t\left(\frac{1}{4}+\frac{d^2}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{3}{2}} + O(t^{-2}); \qquad (18)$$

$$P(x,t) = e^{-\sqrt{a}xc^{-1}}c^2\rho_0(gc^{-2} + \sqrt{a}c^{-1})\int_0^\infty W(t)dt +$$

$$+\frac{\rho_0 c d^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}}{\pi}(1 - xgc^{-2})\int_0^\infty (da^{-\frac{1}{2}}\cos(\sqrt{a}\tau - \sqrt{a}t + 3\varphi) +$$

$$+\sin(\sqrt{a}\tau - \sqrt{a}t + 3\varphi))W(\tau)d\tau \times$$

$$\times\left[t\left(\frac{1}{4}+\frac{d^2}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-3}{2}} + O(t^{-2}), \qquad (19)$$

где $d = \dfrac{\rho_0 c^2}{2\mu + \lambda}$, $a = g(N^2 + gc^{-2})$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{d}{\sqrt{a}}$.

Приведем краткую схему доказательства на примере компоненты $P(x,t)$. После применения теоремы 3 и параметризации контуров $l_k, k = 1,2$ представление (11) может быть записано следующим образом:

$$P(x,t) = e^{-\sqrt{a}xc^{-1}}c^2\rho_0(gc^{-2} + \sqrt{a}c^{-1})\int_0^\infty W(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\delta}^{\delta} e^{\gamma_k(\xi)t - \frac{d^{\frac{1}{2}}}{c}i\xi x}c^2\rho_0(gc^{-2} +$$

$$+\frac{d^{\frac{1}{2}}}{c}i\xi)\,\mathrm{w}(\gamma_k(\xi))\gamma'_k(\zeta)\gamma_k^{-1}(\zeta)d\zeta + O(e^{-\varepsilon t}). \qquad (20)$$

Выбирая $\delta > 0$ достаточно малым, запишем асимптотические разложения при $\zeta \to 0$:

$$\gamma_k(\zeta) = (-1)^{k+1}i\sqrt{a} - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{di(-1)^{k+1}\zeta^2}{2\sqrt{a}} + O(\zeta^4);$$

$$\gamma'_k(\zeta) = -\zeta(1 + (-1)^k ida^{-\frac{1}{2}} + O(\zeta^2));$$

$$\mathrm{w}(\gamma_k(\zeta)) = \mathrm{w}((-1)^{k+1}i\sqrt{a}) + O(\zeta^2)\sup_{\theta\in l_k}\left|\mathrm{w}''(\theta)\right|.$$

Подставим эти асимптотические разложения в (20). После приведения подобных слагаемых и группировки получим

$$P(x,t) = e^{-\sqrt{a}xc^{-1}}\rho_0 c^2(gc^{-2} + \sqrt{a}c^{-1})\int_0^\infty W(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\Bigg(\frac{\rho_0 c d^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}}{\pi i}(1 + (-1)^k ida^{-\frac{1}{2}})(-1)^k\int_0^\infty e^{(-1)^{k+1}i\sqrt{a}t}W(t)dt \times$$

$$\times(1 - xgc^{-2})e^{2(-1)^{k+1}i\sqrt{a}t}\int_0^\delta \zeta^2 e^{((-1)^k i\sqrt{a}t - \zeta^2(\frac{1}{2} + \frac{id(-1)^k}{2\sqrt{a}}) + O(\zeta^4))t}d\zeta +$$

$$+\int_{-\delta}^{\delta} O(\zeta^3)e^{\gamma_k(\zeta)t}d\zeta\Bigg) + O(e^{-\varepsilon t}). \qquad (21)$$

Для построения асимптотики воспользуемся следующей леммой.

Лемма 8. Пусть $f(\zeta) \in C^\infty([0,\delta]), B > 0, A > 0$. Тогда для интеграла

$$G_m(t) = \int_0^\delta \zeta^{B-1}f(\zeta)\exp\left\{\left((-1)^{m+1}i\frac{A}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\zeta^2\left(\frac{\nu}{2} + ik^2A^{-1}(-1)^{m+1}\right) + O(\zeta^4)\right)t\right\}d\zeta$$

справедливо следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$G_m(t) = \frac{f(0)}{2}\exp\left\{(-1)^{m+1} i\,\frac{A}{2}\right\}\left[\cos\varphi + (-1)^{m+1} i \sin\varphi\right]^B \times$$

$$\times\left[t\left(\frac{\nu^2}{4} + \frac{k^4}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{-B}{2}} + O\left(t^{\frac{-(B+1)}{2}}\right),$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{2k^2}{A\nu}$.

Применив к (21) лемму 8, получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко А. В.* Асимптотические колебания и интрузия в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости / А. В. Глушко // Доклады РАН. — 1999. — Т. 365, № 1. — С. 26—30.

2. *Глушко А. В.* Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А. В. Глушко. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2003. — 300 с.

Поступила в редакцию 31.03.2008