УДК:517.988.6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕКОМПАКТНЫМИ ОБРАЗАМИ

А. Б. Гельман

Воронежский государственный университет

В настоящей статье изучается новый класс многозначных отображений с выпуклыми замкнутыми, но некомпактными образами. Для отображений из этого класса удается доказать новые теоремы о неподвижных точках, которые в конце статьи применяются к изучению разрешимости операторных уравнений с сюръективными операторами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: многозначное отображение, однозначная аппроксимация, неподвижная точка, топологическая степень, сюръективный оператор.

ВВЕДЕНИЕ

Существенное место в теории многозначных отображений занимает проблема изучения неподвижных точек многозначных отображений, которые в различных задачах могут интерпретироваться как оптимальные стратегии, равновесные цены, оптимальные траектории и т.д. В настоящий момент теория неподвижных точек многозначных вполне непрерывных отображений с выпуклыми компактными образами развита достаточно хорошо (см., например, [1]).

В настоящей статье изучается новый класс многозначных отображений. Эти отображения имеют выпуклые замкнутые, но некомпактные образы. Для отображений из этого класса удается доказать новые теоремы о неподвижных точках, которые в конце статьи применяются к изучению разрешимости операторных уравнений с сюръективными операторами вида $a(x)=f(x)$. Доказанная в этом разделе теорема уточняет некоторые результаты работы [2].

1. МЕТРИКА ХАУСДОРФА. ПРОСТРАНСТВО $\mathfrak{C}(Y)$

Пусть Y — метрическое пространство, обозначим $P(Y)$ совокупность всех непустых подмножеств Y.

Расстояние от точки $x \in Y$ до множества $A \in P(Y)$ есть

$$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in A\}.$$

Пусть $A, B \in P(Y)$.

Величину (конечную или бесконечную) $\rho_*(A,B) = \sup\limits_{a\in A} \rho(a,B)$ называют полуотклонением множества A от множества B.

Пусть $C(X)$ — множество непустых замкнутых подмножеств в X. Рассмотрим функцию $h: C(X)\times C(X) \to \mathrm{R} \cup \infty$, $h(A,B) = \max\{\rho_*(A,B); \rho_*(B,A)\}$.

Эта метрика является квазиметрикой на множестве $C(X)$. Действительно, для любых $A,B \in C(X)$ выполнено:

1) $h(A,B) \ge 0$;

2) если $h(A,B)=0$, то $A=B$;

3) $h(A,B)=h(B,A)$;

4) $h(A,B) \le h(A,C)+h(C,B)$ для любых A,B,C из $C(X)$;

5) если $A=\{x_0\}$, $B=\{y_0\}$, то $h(A,B) = \rho(x_0,y_0)$.

Доказательство этих свойств содержится, например, в [1].

Пусть M_1, M_2 — аффинные подпространства в нормированном пространстве E, т.е. множества, полученные сдвигом замкнутого подпространства на некоторый фиксированный вектор.

Лемма 1. *(1) Для того чтобы $h(M_1,M_2)<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы M_1 и M_2 были сдвигами одного и того же подпространства $L \subset E$.*

(2) Если $h(M_1,M_2)<\infty$, то

$$h(M_1,M_2) = \rho_*(M_1,M_2) = \rho_*(M_2,M_1) = \inf\{\|x_1-x_2\| \mid x_1\in M_1, x_2 \in M_2\}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $h(M_1,M_2)<\infty$. Выберем произвольно точки $x_0 \in M_1$, $y_0 \in M_2$, тогда $L_1 = M_1 - x_0$, $L_2 = M_2 - y_0$ являются замкнутыми подпространствами в E. Нетрудно показать, что в этом случае $h(L_1,L_2)<\infty$. Действительно, если $x\in L_1$, то

$$\rho(x,L_2) = \inf_{y\in L_2}\|x-y\| =$$

$$= \inf_{y\in L_2}(\|x+x_0-y-y_0\| + \|y_0-x_0\|) =$$

$$= \inf_{\overline{y}\in M_2}\|\overline{x}-\overline{y}\| + \|y_0-x_0\| = \rho(\overline{x},M_2)+\|y_0-x_0\|,$$

где $\bar{x} = x + x_0 \in M_1$, $\bar{y} = y + y_0 \in M_2$. Тогда

$$\rho_*(L_1, L_2) \le \rho_*(M_1, M_2) + \|y_0 - x_0\| < \infty.$$

В силу равноправности подпространств L_1 и L_2 имеем аналогичное неравенство

$$\rho_*(L_2, L_1) \le \rho_*(M_2, M_1) + \|y_0 - x_0\| < \infty.$$

Следовательно, $h(L_1, L_2) \le h(M_1, M_2) + \|y_0 - x_0\|$.

Предположим теперь противное, т.е. что $L_1 \ne L_2$. Без ограничения общности будем предполагать, что существует точка $x \in L_1$ такая, что $x \notin L_2$. Тогда $\rho(x, L_2) > 0$. Так как

$$\rho(\lambda x, L_2) = \inf_{\bar{y} \in L_2} \|\lambda x - \bar{y}\| = \inf_{y \in L_2} \|\lambda x - \lambda y\| = \lambda \rho(x, L_2),$$

то $\rho_*(L_1, L_2) = \sup_{\tilde{x} \in L_1} \rho(\tilde{x}, L_2) = \infty$, а это противоречит предположению.

Достаточность. Пусть M_1 и M_2 являются сдвигами одного и того же подпространства $L \subset E$. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что

$$\rho(x_1, M_2) = \rho(x_2, M_1)$$

для любых $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Пусть $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, положим $\alpha_1 = \rho(x_1, M_2)$, $\alpha_2 = \rho(x_2, M_1)$. Если x_2' — произвольный вектор из M_2 и $x_1' = x_2 + (x_1 - x_2')$, то $x_1' \in M_1$. Тогда имеем следующее неравенство:

$$\alpha_2 \le \|x_2 - x_1'\| = \|x_1 - x_2'\|.$$

Это неравенство справедливо для любого $x_2' \in M_2$. Поэтому $\alpha_2 \le \alpha_1$. Аналогично доказывается обратное неравенство, следовательно, $\alpha_2 = \alpha_1$. Тогда

$$h(M_1, M_2) = \rho_*(M_1, M_2) = \rho_*(M_2, M_1) =$$
$$= \inf\{ \| x_1 - x_2 \| \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \} < \infty.$$

Одновременно мы доказали вторую часть леммы. Лемма доказана.

Эта лемма является развитием одного из утверждений книги [3].

В квазиметрическом пространстве $(C(Y), h)$ естественно определяется структура топологического пространства. Пусть $A \in C(Y)$, обозначим

$$V(A, r) = \{ B \in C(Y) \mid h(B, A) < r \}.$$

Лемма 2. *Семейство* $\{V(A, r) \mid A \in C(Y), r > 0\}$ *является базой некоторой топологии.*

Доказательство. Воспользуемся критерием базы (см., например, [4]). Пусть множество

$$B \in V(A_1, r_1) \bigcap V(A_2, r_2),$$

т.е. $l_1 = r_1 - h(A_1, B) > 0$ и $l_2 = r_2 - h(A_2, B) > 0$. Пусть $0 < r_3 < \min\{l_1, l_2\}$, тогда, в силу неравенства треугольника для квазиметрики h, имеем:

$$B \in V(B, r_3) \subset V(A_1, r_1) \bigcap V(A_2, r_2),$$

что и доказывает лемму.

Будем обозначать $\mathfrak{C}(Y)$ множество $C(Y)$, снабженное этой топологией.

2. *h*-ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть Y — подмножество нормированного пространства E, обозначим тогда $Cv(Y)$ — множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств в Y; $Kv(Y)$ — множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y.

Многозначное отображение метрического пространства X в Y — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x. В дальнейшем, если образы многозначного отображения F являются замкнутыми, то будем записывать это следующим образом, $F : X \multimap C(Y)$. Аналогично, обозначение $F : X \multimap Cv(Y)$ ($F : X \multimap Kv(Y)$) означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми замкнутыми (компактными) множествами.

Очевидно, что любое многозначное отображение $F : X \multimap C(Y)$ порождает однозначное отображение $\mathfrak{F} : X \to \mathfrak{C}(Y)$, где $\mathfrak{F}(x) = F(x) \in \mathfrak{C}(Y)$.

Пусть $F : X \multimap Cv(E)$ — некоторое многозначное отображение.

Определение 1. *Будем говорить что многозначное отображение F является h-непрерывным, если:*

(1) отображение $\mathfrak{F}$, порожденное отображением F, является непрерывным. Если кроме условия (1) отображение $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующему условию:

(2) для любого ограниченного множества $D \subset X$ множество $\overline{\mathfrak{F}(D)}$ является компактным множеством в $\mathfrak{C}(E)$, то будем говорить что многозначное отображение F является h-вполне непрерывным.

Рассмотрим пример h-вполне непрерывного отображения.

Пример 1. Пусть X, Z — метрические пространства, $f : X \to Z$ — вполне непрерывное однозначное отображение, $G : Z \multimap Cv(E)$ — h-непрерывное многозначное отображение. Легко проверить, что многозначное отображение $F = G \circ f : X \multimap Cv(E)$ является h-вполне непрерывным.

Очевидны следующие свойства h-вполне непрерывных отображений.

Предложение 1. *(i) Пусть* $F : X \multimap Cv(E)$ *— произвольное* h*-вполне непрерывное многозначное отображение,* λ *— фиксированное число, тогда многозначное отображение* $\lambda F : X \multimap Cv(E)$ *также является* h*-вполне непрерывным отображением.*

(ii) Пусть $F : X \multimap Cv(E)$ *— произвольное* h*-вполне непрерывное многозначное отображение,* $G : X \multimap Kv(E)$ *также* h*-вполне непрерывное отображение. Тогда многозначное отображение* $F + G$ *также является* h*-вполне непрерывным отображением.*

Предложение 2. *Если многозначное отображение* $F : X \multimap Cv(E)$ *является* h*-непрерывным многозначным отображением, то оно полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Пусть V — произвольное открытое множество в E, множество

$$U = F_-^{-1}(V) = \{x \in X \,|\, F(x) \cap V \neq \varnothing\}$$

является полным прообразом множества V. Покажем, что множество U открыто в X. Пусть точка $x_0 \in U$, тогда существует точка $y_0 \in (F(x_0) \cap V)$. Так как V — открытое множество, то существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $U_{\varepsilon_0}(y_0) \subset V$. Так как F является h-непрерывным многозначным отображением, то существует $\delta > 0$ такое, что как только $h(x_0, x) < \delta$, то $h(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$. Следовательно, $y_0 \in F(x_0) \subset$ $\subset U_\varepsilon(F(x))$ для любого $x \in U_\delta(x_0)$. Тогда

$$(V \cap F(x)) \supset (U_{\varepsilon_0}(y_0) \cap F(x)) \neq \varnothing$$

для любой точки $x \in U_\delta(x_0)$. Таким образом, $U_\delta(x_0) \subset U$, что и доказывает открытость множества U. Утверждение доказано.

3. ОДНОЗНАЧНЫЕ КОМПАКТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ *h*-ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть E — банахово пространство, X — метрическое пространство, $F : X \multimap Cv(E)$ — h-вполне непрерывное многозначное отображение. Пусть A — ограниченное подмножество пространства X.

Теорема 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует непрерывное отображение* $f_\varepsilon : A \to E$ *такое, что:*

(a) множество $\overline{f_\varepsilon(A)}$ *является компактным;*

(b) $\rho(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$ *для любой точки* $x \in A$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* K *— компактное подмножество в* $\mathfrak{C}(E)$*, тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует непрерывное отображение* $p_\varepsilon : K \to E$ *такое, что* $\rho(p_\varepsilon(B), B)) < \varepsilon$ *для любого* $B \in K$.

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем в K конечную ε-сеть $\tau = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Определим функции $\alpha_i : K \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, условием:

$$\alpha_i(B) = \begin{cases} \varepsilon - h(B, B_i), & \text{если } h(B, B_i) < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } h(B, B_i) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что эти функции непрерывны и $\alpha_i(B) > 0$, тогда и только тогда, когда $h(B, B_i) < \varepsilon$.

Пусть $\mu(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(B)$, а $\beta_i(B) = \frac{\alpha_i(B)}{\mu(B)}$. Тогда функции $\beta_i : K \to E$ обладают следующими свойствами:

1) для любого $i = 1, 2, ..., n$ функции β_i непрерывны и принимают значения между нулем и единицей;

2) для любого множества $B \in K$ справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(B) = 1$;

3) для любого $i = 1, 2, ..., n$ функции $\beta_i(B) > 0$ тогда и только тогда, когда $h(B, B_i) < \varepsilon$.

Выберем в каждом множестве B_i произвольную точку y_i и определим отображение $p_\varepsilon : K \to E$ по следующему правилу:

$$p_\varepsilon(B) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(B) y_i.$$

Очевидно, что отображение p_ε является непрерывным компактным отображением. Проверим, что $\rho(p_\varepsilon(B), B)) < \varepsilon$ для любого множества $B \in K$. Для этого выбросим из суммы $p_\varepsilon(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(B) y_i$ нулевые слагаемые, тогда $p_\varepsilon(B) = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{i_j}(B) y_{i_j}$, где $\beta_{i_j}(B) > 0$ для любого $j = 1, 2, ..., m$. Так как $\beta_{i_j}(B) > 0$, то $h(B, B_{i_j}) < \varepsilon$. Следовательно, существует точка $\overline{y}_{i_j} \in B$ такая, что $\left\| \overline{y}_{i_j} - y_{i_j} \right\| < \varepsilon$. Рассмотрим точку $\tilde{y} = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{i_j}(B) \overline{y}_{i_j}$. В силу свойств 1 и 2 функций β_i и выпуклости множества B точка $\tilde{y} \in B$. Тогда

$$\rho(p_\varepsilon(B), B)) \leq \left\| p_\varepsilon(B) - \tilde{y} \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \beta_{i_j}(B) \left\| y_{i_j} - \overline{y}_{i_j} \right\| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть A — произвольное ограниченное множество, принадлежащее X. Обозначим $K = \overline{\mathfrak{F}(A)} \subset \mathfrak{C}(E)$. Так как отображение F является h-вполне непрерывным, то множество K является компактом в $\mathfrak{C}(E)$. Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим отображение $p_\varepsilon : K \to E$, удовлетворяющее условиям леммы 3. Пусть отображение $f_\varepsilon = p_\varepsilon \circ \mathfrak{F} : A \to E$. Очевидно, что это отображение является компактным непрерывным отображением и

$$\rho(f_\varepsilon(x), F(x)) = \rho(p_\varepsilon(F(x)), F(x)) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть T — выпуклое подмножество пространства E такое, что $F(x) \bigcap T \neq \varnothing$ для любого $x \in A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f_\varepsilon : A \to E$ такое, что:*

(a) множество $\overline{f_\varepsilon(A)}$ является компактным;

(b) $\rho(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$ для любой точки $x \in A$;

(c) $f_\varepsilon(x) \in T$ для любого $x \in A$.

Доказательство. Обозначим $K = \overline{\mathfrak{F}(A)} \subset \mathfrak{C}(E)$. Так как отображение F является h-вполне непрерывным, то множество K является компактом в $\mathfrak{C}(E)$. Пусть ε – произвольное положительное число. Рассмотрим отображение $p_\varepsilon : K \to E$, удовлетворяющее условиям леммы 3, т.е. $p_\varepsilon(B) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(B) y_i$, только точки y_i будем выбирать из $B_i \bigcap T$. Тогда отображение p_ε будет действовать в множество T, т.к. это множество выпукло. Теперь отображение f_ε определим равенством $f_\varepsilon = p_\varepsilon \circ \mathfrak{F}$. Это и доказывает следствие.

4. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ h-ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть T — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства E, $F : T \multimap Cv(E)$ — многозначное h-вполне непрерывное отображение.

Теорема 2. *Если для любой точки $x \in T$ пересечение $F(x) \bigcap T \neq \varnothing$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in T$ такая, что $\rho(x_\varepsilon, F(x_\varepsilon)) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим отображение $f_\varepsilon : T \to E$, удовлетворяющее условиям следствия 1. Так как отображение f_ε вполне непрерывно, то по теореме Шаудера оно имеет неподвижную точку x_ε. Тогда $\rho(x_\varepsilon, F(x_\varepsilon)) = \rho(f(x_\varepsilon), F(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. Теорема доказана.

В общем случае, при выполнении условий теоремы 2 многозначное h-вполне непрерывное отображение может не иметь неподвижных точек. Однако в некоторых специальных случаях существование неподвижных точек можно установить. Нам понадобится следующая лемма.

Пусть Y — метрическое пространство, E — банахово пространство, $\Phi : Y \multimap Cv(E)$ — h-непрерывное многозначное отображение. Пусть многозначное отображение $G : Y \multimap P(E)$ имеет выпуклые образы и график $\Gamma(G)$ является открытым множеством в $Y \times E$. Пусть для любого $y \in Y$ пересечение $\Phi(y) \cap G(y) \neq \varnothing$. Обозначим $\Phi \cap G$ многозначное отображение, определенное условием $(\Phi \cap G)(y) = \Phi(y) \cap G(y)$.

Лемма 4. *Существует непрерывное отображение $g : Y \to E$ такое, что $g(y) \in (\Phi \cap G)(y)$ для любого $y \in Y$.*

Доказательство. Пусть точка $y \in Y$, выберем произвольно точку $z_y \in (\Phi(y) \cap G(y))$. Так как отображение Φ является h-непрерывным многозначным отображением, то оно полунепрерывно снизу (см. предложение 2). Следовательно, в силу теоремы Майкла существует непрерывное сечение f_y многозначного отображения Φ такое, что $f_y(y) = z_y$. В силу открытости графика отображения G существует открытая окрестность $U(y)$ точки y такая, что $f_y(y') \in G(y')$ для любой точки $y' \in U(y)$. Очевидно, что такое отображение f_y может быть построено для любой точки $y \in Y$. Тогда семейство $\{U(y)\}_{y \in Y}$ образует открытое покрытие пространства Y. Выберем из этого покрытия локально конечное подпокрытие $\{U(y_\alpha)\}_{\alpha \in J}$. Пусть функции $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ образуют разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Рассмотрим отображение $g : Y \to E$, определенное по правилу

$$g(y) = \sum_{\alpha \in J} \varphi_\alpha(y) f_{y_\alpha}(y).$$

Нетрудно доказать, что в силу выпуклости образов многозначных отображений Φ и G построенное отображение g будет искомым сечением. Лемма доказана.

Пусть Y — метрическое пространство, E — банахово пространство, U — ограниченное открытое выпуклое подмножество E, $f : \overline{U} \to Y$ — вполне непрерывное отображение, $\Phi : Y \multimap Cv(E)$ — h-непрерывное многозначное отображение. Тогда $F = \Phi \circ f : \overline{U} \multimap Cv(E)$ является h-вполне непрерывным отображением.

Теорема 3. *Если существует такое открытое множество* $V \subset \overline{V} \subset U$ *, что для любого* $x \in \partial U$ *пересечение* $F(x) \bigcap V \neq \varnothing$*, то многозначное отображение* F *имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $B = \overline{f(\partial U)}$, тогда для любой точки $\overline{y} \in f(\partial U)$ существует точка $x \in \partial U$ такая, что $\overline{y} = f(x)$. Следовательно, $\Phi(\overline{y}) \bigcap V \neq \varnothing$. Тогда

$$(\Phi(y) \cap U) \supset (\Phi(y) \cap \overline{V}) \neq \varnothing$$

для любой точки $y \in B$.

Рассмотрим многозначное отображение $G : Y \multimap P(E)$, определенное условием

$$G(y) = \begin{cases} U, & \text{если} \quad y \in B, \\ E, & \text{если} \quad y \notin E. \end{cases}$$

Очевидно, что это многозначное отображение имеет выпуклые образы и его график открыт в $Y \times E$. Очевидно также, что $\Phi(y) \bigcap G(y) \neq \varnothing$ для любого $y \in Y$.

Следовательно, в силу леммы 4 существует непрерывное отображение $g : Y \to E$ такое, что $g(y) \in (\Phi(y) \bigcap G(y))$. Рассмотрим отображение $\varphi : \overline{U} \to E$, определенное по правилу $\varphi(x) = g(f(x))$. Так как f является компактным отображением, то отображение φ также компактно и $\varphi(\partial U) \subset \overline{U}$. Тогда по обобщенной теореме Шаудера отображение φ имеет неподвижную точку x_*, т.е. $x_* = g(f(x_*)) \in \Phi(f(x_*)) = F(x_*)$. Теорема доказана.

5. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Пусть E — банахово пространство, $U \subset E$ — ограниченное открытое множество, $F : \overline{U} \multimap Cv(E)$ — h-вполне непрерывное отображение. Обозначим $\Phi(x) = x - F(x)$ многозначное векторное поле, порожденное отображением F.

Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $x \in \partial U$ справедливо неравенство $\rho(x, F(x)) \geq \varepsilon$. В силу теоремы 1 существует компактное отображение $f_\varepsilon : \overline{U} \to E$ такое, что $\rho(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$, тогда $\|x - f_\varepsilon(x)\| > 0$ для любого $x \in \partial U$. Рассмотрим вполне непрерывное векторное поле $\varphi_\varepsilon : \overline{U} \to E$, $\varphi_\varepsilon(x) = x - f_\varepsilon(x)$. Очевидно, что $\varphi_\varepsilon(x) \neq 0$ для любого $x \in \partial U$. Следовательно, определена топологическая степень (вращение) $deg(\varphi_\varepsilon, \overline{U})$ (см. [5]).

Определение 2. *Топологической степенью* $deg(\Phi, \overline{U})$ *векторного поля* Φ *будем называть* $deg(\varphi_\varepsilon, \overline{U})$.

Лемма 5. *Топологическая степень* $deg(\Phi, \overline{U})$ *определена корректно.*

Доказательство. Пусть $f_\varepsilon^1, f_\varepsilon^2$ – произвольные компактные отображения, удовлетворяющие теореме 1, т.е. $\rho(f_\varepsilon^1(x), F(x)) < \varepsilon$ и $\rho(f_\varepsilon^2(x), F(x)) < \varepsilon$ для любого $x \in \partial U$. Тогда определены два невырожденных векторных поля $\varphi_1(x) = x - f_\varepsilon^1(x)$ и $\varphi_2(x) = x - f_\varepsilon^2(x)$. В силу выпуклости множеств $F(x)$ эти поля могут быть соединены невырожденной гомотопией

$$\Psi(\lambda, x) = x - (1 - \lambda) f_\varepsilon^1(x) - \lambda f_\varepsilon^2(x).$$

Следовательно, $deg(\varphi_1, \overline{U}) = deg(\varphi_2, \overline{U})$. Лемма доказана.

Из свойств топологической степени вполне непрерывных векторных полей вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть существует такое* $\varepsilon > 0$*, что для любой точки* $x \in \partial U$ *справедливо неравенство* $\rho(x, F(x)) \geq \varepsilon$ *и* $deg(\Phi, \overline{U}) \neq 0$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует точка* $x_\delta \in \overline{U}$ *такая, что* $\rho(x_\delta, F(x_\delta)) < \delta$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \delta < \varepsilon$. Рассмотрим компактное отображение $f_\delta : \overline{U} \to E$, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Тогда $deg(\Phi, \overline{U}) = deg(\varphi, \overline{U}) \neq 0$, где $\varphi(x) = x - f_\delta(x)$. В силу свойств топологической степени существует точка $x_\delta \in \overline{U}$ такая, что $x_\delta = f_\delta(x_\delta)$. Очевидно, что эта точка и является искомой.

Для изучения вопроса существования неподвижных точек h-вполне непрерывных отображений может быть применена следующая теорема.

Пусть $U \subset E$ – ограниченное открытое множество, $F : \partial U \multimap Cv(E)$ — h-вполне непрерывное отображение.

Теорема 5. *Пусть существуют такие вполне непрерывные отображения* $f_1, f_2 : \partial U \to E$*, что выполняются следующие условия:*

(1) f_1 *и* f_2 *являются непрерывными сечениями* F*;*

(2) $x \neq f_1(x)$, $x \neq f_2(x)$ *для любой точки* $x \in \partial U$.

Если $\gamma(i - f_1, \partial U) \neq \gamma(i - f_2, \partial U)$*, то отображение* F *имеет неподвижную точку на* ∂U.

Доказательство. Рассмотрим отображение $g : [0,1] \times \partial U \to E$,

$$g(t, x) = (1 - t) f_1(x) + t f_2(x).$$

Очевидно, что это отображение вполне непрерывно. Если бы $g(t, x) \neq x$ для любой точки $x \in \partial U$ и $t \in [0,1]$, тогда отображение $\psi(t, x) =$

$= x - g(t,x)$ являлось бы невырожденной гомотопией, соединяющей поля $\phi_1 = i - f_1$ и $\phi_2 = i - f_2$. Следовательно, тогда бы $\gamma(i - f_1, \partial U) = \gamma(i - f_2, \partial U)$. Так как по условию теоремы это не выполнено, то $g(t_0, x_0) = x_0$ для некоторой точки $x_0 \in \partial U$ и $t_0 \in [0,1]$. По условию теоремы $f_1(x_0) \in F(x_0)$ и $f_2(x_0) \in F(x_0)$. Тогда, в силу выпуклости множества $F(x_0)$, имеем следующее включение:

$$x_0 = g(t_0, x_0) = (1 - t_0) f_1(x_0) + t_0 f_2(x_0) \in F(x_0),$$

т.е. точка x_0 является неподвижной точкой отображения F. Теорема доказана.

6. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ *h*-НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть X — линейно связное метрическое пространство, E — банахово пространство. Обозначим $Aff(E)$ множество всех аффинных подпространств пространства E. Пусть $F : X \multimap Cv(E)$ h-непрерывное многозначное отображение такое, что для любой точки $x \in X$ образ $F(x)$ является аффинным подпространством в E. Будем это записывать $F : X \multimap Aff(E)$.

Лемма 6. *Пусть $F : X \multimap Aff(E)$ — h-непрерывное многозначное отображение. Тогда существует такое замкнутое попространство $L \subset E$, что для любого $x \in X$ образ $F(x) = f(x) + L$, где f — произвольное непрерывное сечение отображения F.*

Доказательство. Проверим, что для любых точек $x_0, x_1 \in X$ расстояние $h(F(x_0), F(x_1)) < \infty$. В силу того что X является линейно связным множеством, то существует путь $\alpha : [0,1] \to X$ такой, что $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$. Рассмотрим многозначное отображение $\hat{F} : [0,1] \multimap Cv(E)$, $\hat{F}(t) = F(\alpha(t))$. Нетрудно видеть, что это отображение является h-непрерывным и его образы являются аффинными подпространствами в E. В силу h-непрерывности отображения $\hat{F}$ для любой точки $t \in [0,1]$ существует $\delta(t) > 0$ такое, что если $\overline{t} \in U(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t)) \bigcap [0,1]$, то $h(\hat{F}(t), \hat{F}(\overline{t}) < 1$. Очевидно, что семейство $\{U(t)\}_{t \in [0,1]}$ является открытым покрытием отрезка $[0,1]$. Пусть $\eta > 0$ — лебегово число этого покрытия, т.е. такое число, что для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| < \eta$, всегда найдется множество $U(t_0)$ из этого покрытия, которое содержит эти точки. Очевидно, что такое число всегда существует. Пусть n — целое число такое, что $0 < \frac{1}{n} < \eta$. Разобьем отрезок $[0,1]$ на n равных частей, тогда

$$h(F(x_0), F(x_1)) = h(\hat{F}(0), \hat{F}(1)) \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\hat{F}\left(\frac{i}{n}\right), \hat{F}\left(\frac{i+1}{n}\right)\right) < n,$$

т.е. $h(F(x_0), F(x_1)) < \infty$.

Тогда, в силу леммы 1, существует такое замкнутое попространство $L \subset E$, что для любого $x \in X$ образ $F(x) = L + y$, где точка $y \in F(x)$. Если $f : X \to E$ — непрерывное сечение F, то $F(x) = f(x) + L$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть Y — метрическое пространство, $F : Y \multimap Aff(E)$ — h-вполне непрерывное отображение. Тогда существует метрическое пространство X, вполне непрерывное отображение $g : Y \to X$ и h-непрерывное многозначное отображение $\Phi : X \multimap Aff(E)$ такие, что $F = \Phi \circ g : Y \multimap Aff(E)$.*

Доказательство. Так как F является h-непрерывным отображением, то в силу доказанной леммы существует такое замкнутое попространство $L \subset E$, что для любого $x \in X$ образ $F(x) = f(x) + L$, где f — произвольное непрерывное сечение отображения F. Обозначим через X подпространство в $\mathfrak{C}(Y)$, точками которого являются все аффинные подпространства в E, полученные сдвигами подпространства L.

Рассмотрим теперь фактор-пространство E/L. Точками этого пространства также являются все аффинные подпространства в E, полученные сдвигами подпространства L. Заметим также, что пространства X и E/L можно отождествить, т.к. если $M_1, M_2 \in X$, то в силу леммы 1 справедливо равенство $h(M_1, M_2) = \|M_1 - M_2\|$, где норма рассматривается в пространстве E/L.

Пусть $\pi : E \to E/L = X$ — проекция на фактор-пространство. Рассмотрим обратное отображение $\Phi : X \multimap Aff(E)$, $\Phi(x) = \pi^{-1}(x)$. В силу определения нормы в фактор-пространстве это многозначное отображение является h-непрерывным.

Определим теперь отображение $g : Y \to X$ по следующему правилу: $g(y) = F(y) \in X$. В силу условий леммы это отображение является вполне непрерывным. Тогда $F(y) = \Phi(g(y))$ для любой точки $y \in Y$. Лемма доказана.

Пусть U – ограниченное открытое выпуклое множество в пространстве E, $F : \partial U \multimap Aff(E)$ — h-вполне непрерывное многозначное отображение.

Теорема 6. *Пусть размерность $dim F(x) \ge 1$ для любой точки $x \in \partial U$. Если существует* *такое открытое множество* $V \subset \overline{V} \subset U$, *что для любого* $x \in \partial U$ *пересечение* $F(x) \bigcap V \neq \varnothing$, *то многозначное отображение* F *имеет неподвижную точку* $x_* \in \partial U$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5, т.е. построим два вполне непрерывных отображения $f_1, f_2 : \partial U \to E$ таких, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) f_1 и f_2 являются непрерывными сечениями F;

(2) $x \neq f_1(x)$, $x \neq f_2(x)$ для любой точки $x \in \partial U$;

(3) $\gamma(i - f_1, \partial U) \neq \gamma(i - f_2, \partial U)$.

В силу леммы 7 существует метрическое пространство X, вполне непрерывное отображение $g : \partial U \to X$ и h-непрерывное многозначное отображение $\Phi : X \multimap Aff(E)$ такие, что $F = \Phi \circ g : \partial U \multimap Aff(E)$.

Пусть $B = \overline{g(\partial U)}$, тогда для любой точки $\overline{y} \in g(\partial U)$ существует точка $x \in \partial U$ такая, что $\overline{y} = g(x)$. Следовательно, $\Phi(\overline{y}) \bigcap V \neq \varnothing$. Тогда

$$(\Phi(y) \cap U) \supset (\Phi(y) \cap \overline{V}) \neq \varnothing$$

для любой точки $y \in B$.

Рассмотрим многозначное отображение $G : B \multimap P(E)$, $G(y) = U$ для любого $y \in B$. Очевидно, что это многозначное отображение имеет выпуклые образы и его график открыт в $B \times E$. Очевидно также, что $\Phi(y) \bigcap G(y) \neq \varnothing$ для любого $y \in B$. Следовательно, в силу леммы 4 существует непрерывное отображение $s : B \to E$ такое, что $s(y) \in (\Phi(y) \bigcap G(y))$. Рассмотрим отображение $f_1 : \partial U \to E$, определенное по правилу $f_1(x) = s(g(x))$. Так как g является компактным отображением, то отображение f_1 также компактно и $f_1(\partial U) \subset U$. Тогда $x \neq f_1(x)$ для любой точки $x \in \partial U$ и $\gamma(i - f_1, \partial U) = 1$.

Так как отображение f_1 является непрерывным сечением многозначного отображения F, то $F(x) = f_1(x) + L$ для любой точки $x \in \partial U$. Пусть число R таково, что для любой точки $x \in \partial U$ справедливо неравенство $\|x + f_1(x)\| < R$. Выберем точку $u \in L$ так, чтобы $\|u\| \geq 2R$. Рассмотрим отображение $f_2 : \partial U \to E$, определенное по правилу $f_2(x) = f_1(x) + u$. Очевидно, что это отображение является непрерывным сечением многозначного отображения F, оно вполне непрерывно, и векторное поле $\varphi_2 = i - f_2$ выпускает направление $-u$, т.е. $\varphi_2(x) \neq -\lambda u$ для любой точки $x \in \partial U$ и любого $\lambda \geq 0$. Действительно,

$$\|\varphi_2(x) + \lambda u\| \geq (1 + \lambda)\|u\| - \|x - f_1(x)\| > R.$$

Тогда в силу свойств топологической степени $\gamma(i - f_2, \partial U) = 0$.

Таким образом все условия теоремы 5 выполнены, что и доказывает теорему.

7. УРАВНЕНИЯ С СЮРЪЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА СФЕРЕ

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Изучим многозначное отображение $a^{-1} : E_2 \to C(E_1)$. Следуя [2], дадим следующее определение.

Определение 3. *Число*

$$\|a^{-1}\| = \sup_{y \in E_2} \left(\frac{\inf\{\|x\| | x \in E_1, a(x) = y\}}{\|y\|} \right)$$

называется нормой многозначного отображения a^{-1}.

Лемма 8. *Пусть* $y_0 \in E_2$, $x_0 \in a^{-1}(y_0)$, *тогда для любого числа* k, $\|a^{-1}\| < k$, *существует непрерывное отображение* $q : E_2 \to E_1$ *такое, что:*

1) $a(q(y)) = y$ *для любого* $y \in E_2$;

2) $\|x_0 - q(y)\| \leq k\|y_0 - y\|$ *для любого* $y \in E_2$.

Доказательство этой леммы содержится в [2].

Пусть E_1, E_2 — два банаховых пространства, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор, $f : X \subset E_1 \to E_2$ — нелинейное отображение. Рассмотрим следующее уравнение:

$$a(x) = f(x). \tag{1}$$

Обозначим $N(a, f)$ множество решений этого уравнения.

Уравнения такого вида изучались в работах [6] и [2].

Пусть $x_0 \in E_1$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $f : B_R[x_0] \to E_2$ — вполне непрерывное отображение.

Теорема 7. *Пусть* $Ker(a) \neq \{0\}$. *Если существует такое число* $k > \|a^{-1}\|$, *что для любой точки* $x \in B_R[x_0]$ *справедливо неравенство*

$$\|a(x_0) - f(x)\| < \frac{R}{k},$$

то уравнение (1) *имеет решение на границе щара* $B_R[x_0]$.

Доказательство. Пусть $F : B_R[x_0] \to Cv(E_1)$ — многозначное отображение, определенное условием $F(x) = a^{-1}(f(x))$. Очевидно, что это отображение является h-вполне непрерывным и его образы лежат в $Aff(E_1)$. Воспользуемся теоремой 6, для этого покажем, что существует такое открытое множество $V \subset \overline{V} \subset B_R[x_0]$, что для любого $x \in B_R[x_0]$ пересечение $F(x) \bigcap V \neq \varnothing$.

Рассмотрим число k_1 такое, что $k > k_1 > \|a^{-1}\|$. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\|x_0 - q(y)\| \le k_1 \|a(x_0) - y\|$ для любого $y \in E_2$.

Такое отображение всегда существует в силу леммы 8.

Рассмотрим однозначное отображение $g : B_R[x_0] \to E_1$, $g(x) = q(f(x))$. Очевидно, что $g(x) \in F(x)$ для любого $x \in B_R[x_0]$. Оценим $\|x_0 - g(x)\|$. Имеем:

$$\|x_0 - g(x)\| = \|x_0 - q(f(x))\| \le$$
$$\le k_1 \|a(x_0) - f(x)\| < \frac{k_1 R}{k} < R.$$

Пусть $V = \{x \in E_1 \,|\, \|x - x_0\| < \frac{k_1 R}{k}\}$, тогда $F(x) \bigcap V \ni g(x)$, что и доказывает теорему.

Эта теорема уточняет теорему о разрешимости уравнения (1), доказанную в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, В. В. Обуховский, А. Д. Мышкис. — М. : КомКнига (УРСС), 2005. — 214 с.

2. *Гельман Б. Д.* Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных дифференциальных уравнений / Б. Д. Гельман// Вестник ВГУ. Серия физ. мат. — 2007. — № 2, — С. 86—91.

3. *Иоффе А. Д.* Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука. — 1974.

4. Введение в топологию / Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. — М. : Высшая школа, 1980. — 295 с.

5. *Красносельский М. А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975.

6. *Гельман Б. Д.* Бесконечномерная версия теоремы Борсука—Улама / Б. Д. Гельман // Функциональный анализ и его приложения. — 2004, Т. 38. — № 4. — С. 1—5.

Поступила в редакцию 25.03.2008