

# ВЕТВЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ В ТОЧКАХ МИНИМУМА С ОДНОРОДНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ЧЕТВЕРТОГО И ШЕСТОГО ПОРЯДКОВ

Б. М. Даринский, И. В. Колесникова, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов

*Воронежский государственный университет*

Дан обзор результатов исследований по задаче о геометрическом строении каустик и раскладах бифурцирующих экстремалей фредгольмова функционала (с параметрами) в окрестности точки минимума с однородной особенностью 4-го или 6-го порядка. Изучены главным образом случаи симметрии относительно пары и тройки коммутирующих инволюций. Результаты получены на основе редукции к ключевой функции на  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  (определенной посредством модифицированного метода Ляпунова—Шмидта) и фундаментальных теорем теории особенностей гладких функций.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** фредгольмов функционал, экстремаль, бифуркация, каустика, метод Ляпунова—Шмидта, min-особенности.

Задача изучения ветвления экстремалей гладкого функционала (с параметрами) вблизи точки минимума, имеющей многомерное вырождение, представляют как теоретический интерес, так и прикладной. Эта задача тесно связана с проблемой многомодовых бифуркаций решений краевых задач, изучением критических прогибов упругих систем по нескольким модам, многомодовыми фазовыми переходами в кристаллах, нелинейными волновыми процессами [1], [2] и т. д. Решение таких задач зачастую основано на сведении (редукции) к анализу ключевых функций — многопараметрических семейств полиномов от нескольких переменных, определяемых посредством вариационной версии редуцирующей схемы Ляпунова—Шмидта [1], [2] и соответствующих теорем конечной определенности теории особенностей гладких функций [3]—[5]. В случае min-особенности с генотипом многомерной сборки (однородной особенности четвертого порядка), при наличии симметрии четности, вычисление главной части ключевой функции осуществляется либо на основе ритцевской аппроксимации функционала по совокупности мод бифуркации, либо, в более сложных случаях, на основе формулы ортопроектора на корневое подпространство второго дифференциала функционала [6]—[7]. В случае особенности шестого порядка вычисление главной части ключевой функции осуществляется посредством нелинейной ритцевской аппроксимации.

На этом пути удалось достаточно полно исследовать ветвление экстремалей вблизи min-особенности с генотипом 2-мерной сборки [2], [6]—[7], и частично исследовать случай 3-мерной сборки [2], [8].

В данной работе рассмотрены мало изученные, но важные для приложений случаи задачи о геометрическом строении каустики семейства функционалов (дискриминантного множества уравнения Эйлера—Лагранжа), порожденные однородными min-особенностями 4-го и 6-го порядков, для которых выполняются дополнительные условия симметрии относительно пары или тройки коммутирующих инволюций. Случай 3-мерной сборки с симметрией относительно тройки коммутирующих инволюций ранее был исследован А. В. Гнездиловым [8]. Рассматриваемые типы особенностей в случаях отсутствия симметрии выглядят пока неприступными задачами.

## 1. ВАРИАЦИОННАЯ ВЕРСИЯ МЕТОДА ЛЯПУНОВА—ШМИДТА

Гладкое отображение  $f: E \rightarrow F$  называется фредгольмовым [9], если его производная Фреше  $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$  — фредгольмов оператор в каждой точке  $x \in E$ . Индексом фредгольмова отображения  $f$  называется индекс его производной  $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ :

$$\text{ind} f := \text{ind} \frac{\partial f}{\partial x}(x) := \dim \text{Ker} \frac{\partial f}{\partial x}(x) - \\ - \dim \text{Coker} \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

(индекс  $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$  не зависит от  $x$ ).

Далее предполагается, что  $f$  является фредгольмовым отображением нулевого индекса, и наряду с этим выполнены следующие условия:

а)  $E \subset F \subset H$  — тройка непрерывно вложенных банаховых пространств ( $H$  — гильбертово пространство);

б)  $E$  плотно в  $H$ .

Уравнение

$$f(x) = 0, x \in \mathcal{U} \quad (1)$$

называется фредгольмовым.

Если для  $f$  существует такой гладкий функционал  $V$  на  $E$ , что  $f = \text{grad}_H V$  или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle_H, \forall x, h \in E$$

( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $H$ ), то отображение  $f$  называется потенциальным, а функционал  $V$  называется потенциалом отображения  $f$ . Если  $V$  — потенциал  $f$ , то уравнение (1) можно переписать в виде

$$\text{grad}_H V(x) = 0, x \in \mathcal{U}. \quad (2)$$

Оно называется уравнением Эйлера—Лагранжа экстремалей (критических точек) функционала  $V$ . Точка  $a$  называется критической для функционала  $V$ , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h \rangle_H = 0, \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Плотность  $E$  в  $H$  обеспечивает равносильность последнего равенства уравнению (2). То есть построение решений уравнения (1) можно заменить построением критических точек функционала  $V$  (вариационный метод). Функционал  $V$  называется фредгольмовым, если его градиент — фредгольмово отображение. Критическая точка  $a$  функционала  $V$  называется невырожденной (морсовской), если

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)h \neq 0, \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Индексом Морса невырожденной критической точки  $a$  функционала  $V$  называется максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h)$ .

Пусть задана гладкая фредгольмова развертка

$$f(\cdot, \delta) : E \rightarrow F, \delta \in \Delta^m \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть  $\Omega$  — открытое подмножество в  $E$ . Дискриминантным множеством  $\Sigma(\Omega)$  уравнения

$$f(x, \delta) = b, x \in \Omega \quad (3)$$

называется совокупность тех значений  $\delta = \bar{\delta}$ , для которых данное уравнение имеет в  $\Omega$  вырожденное решение  $\bar{x}$ . В случае потенциального уравнения дискриминантное множество называется каустикой.

Если для потенциального отображения  $f : E \rightarrow F$  выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus 0), \quad (4)$$

то уравнение  $f(x) = 0$  имеет не более одного решения. Это решение является точкой минимума  $V$  на  $E$ .

В случае выполнения условия собственности  $f$  (прообраза произвольного компакта компактен) уравнение  $f(x) = 0$  однозначно разрешимо (следствие теоремы Банаха—Мазура—Каччиополи [9]). Его решение является точкой глобального минимума  $V$ .

Соотношение (4) можно заменить более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (\tilde{E} \setminus 0), \quad (5)$$

где  $\tilde{E} = E \cap N^\perp$ ,  $N = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ ,  $N^\perp$  — ортогональное дополнение к  $N$  в  $H$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — некоторая ортонормированная в  $H$  система векторов в  $E$ . При этом условии можно определить ключевую функцию Ляпунова—Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{x: \langle x, e_j \rangle = \xi_j, \forall j} V(x), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top, \quad (6)$$

«отвечающую» за поведение функционала  $V$ . Условие собственности  $f$  можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом  $\xi$  «послойного» отображения

$$\tilde{f}_\xi : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{F}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{F} = F \cap N^\perp,$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\xi(v) &:= P_{\tilde{F}}(f(l(\xi) + v)) = \\ &= f(l(\xi) + v) - \sum_{j=1}^n \langle e_j, f(l(\xi) + v) \rangle e_j, \end{aligned} \quad (8)$$

$$l(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j.$$

При выполнении условий (5), (7) уравнение

$$\tilde{f}_\xi(v) = q \quad (9)$$

однозначно разрешимо при всех  $\xi, q$ , и его решение  $v = \Phi(\xi)$  гладко зависит от  $\xi$  — по теореме о неявной функции. Левую часть (6) можно представить в виде

$$W(\xi) \equiv V(l(\xi) + \Phi(\xi)). \quad (10)$$

Для ключевого уравнения

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

в котором

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^T, \\ \theta_j(\xi) &= \langle f(l(\xi) + \Phi(\xi)), e_j \rangle, \end{aligned}$$

имеем

$$\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi).$$

Условие собственности в нелокальном анализе играет ведущую роль. Приведем одно из утверждений, являющееся фундаментом нелокального бифуркационного анализа [2]. Если отображение (7) является собственным и при этом выполняется условие положительности (5), то маргинальное отображение  $\varphi : \xi \mapsto l(\xi) + \Phi(\xi)$ , где  $\Phi(\xi)$  определено уравнением (9), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции (6) и заданного функционала  $V$ . При этом локальные кольца особенностей<sup>1</sup> соответствующих функций в точках  $\xi$  и  $\varphi(\xi)$  изоморфны, а в соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса.

Примером применения данного утверждения является класс вариационных задач, описывающий поведение многих потенциальных физических систем, для которого функционал действия задан следующим образом:

$$V_{(\lambda, q)}(x) = \int_0^1 \left( \frac{|\dot{x}|^2}{2} - \lambda \frac{|x|^2}{2} + \omega(x, \lambda) + qx \right) dt,$$

$$x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \omega''(x, \lambda)(h, h) > 0 \quad \forall x, \lambda, h \neq 0. \quad (12)$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа этого функционала имеет вид

$$\ddot{x} + \lambda x - \text{grad } \omega(x, \lambda) - q = 0,$$

левая часть будет фредгольмовым отображением индекса 0 из

$$E = \{x \in C_{[0,1]}^2 : x(0) = x(1) = 0\}$$

<sup>1</sup> Локальное кольцо особенности гладкого функционала  $V$  в критической точке  $a$  определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке  $a$  по идеалу, порожденному функционалами вида  $\alpha(f(x))$ , где  $\alpha$  — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве  $F$  ( $f = \text{grad}_H V$ ).

в  $F = C_{[0,1]}$  и градиентом функционала  $V$  относительно  $H = L_2([0, 1])$ .

Из неравенства Пуанкаре—Стеклова—Виртингера

$$\int_0^1 |\dot{u}|^2 dt \geq \pi^2(k+1)^2 \int_0^1 |u|^2 dt,$$

верного на  $C_{[0,1]}^1$  при  $\int_0^1 \sin \pi j t u(t) dt = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ),

следует выпуклость функционала в слоях  $p^{-1}(\xi)$ , а выпуклость и коэрцитивность гарантируют существование невырожденной точки абсолютного минимума  $\varphi(\xi)$  для  $V_\delta(\cdot)|_{p^{-1}(\xi)}$  (однозначность разрешимости  $f(x) = 0$  при фиксировании ключевых параметров).

Если представить левую часть уравнения как

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda x \right] + \left[ -\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, \lambda) \right],$$

то схема Ляпунова—Шмидта сводится (в операторном виде) к системе

$$\begin{cases} f_1(u) - P_{E_n} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x}(u + v, \lambda) \right) = q_1 e_1 + \dots + q_n e_n \\ f_1(v) - P_{E_{\infty-n}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x}(u + v, \lambda) \right) = 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Для второго уравнения системы имеет место однозначная разрешимость по  $v$  при всяком  $u$  ( $u + v \in E_n \times E_{\infty-n}$ ). Обозначив решение  $v = \Phi(u)$ , получим ключевую функцию в виде нелинейной ритцевской аппроксимации

$$W(u) = V(u + \Phi(u)).$$

## 2. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В ТОЧКАХ МИНИМУМА С ОСОБЕННОСТЬЮ 2-МЕРНОЙ СБОРКИ

Ряд вопросов бифуркационного анализа гладких вариационных задач (упругих систем, фазовых переходов и др., см. [2], [5]) сводится к анализу гладкого семейства функций

$$x^4 + 2ax^2y^2 + y^4 + \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + 2\delta_3 xy,$$

где  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  — малые вещественные параметры,  $a > -1$ . Это семейство представляет собой универсальную деформацию особенности 2-мерной сборки в классе четных функций на координатной плоскости.

Полный бифуркационный анализ этого семейства означает решение следующих (основных) вопросов:

1) описание при каждом  $a$  геометрического строения каустики  $\Sigma$  — поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , состоящей из тех точек  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ , при которых существуют вырожденные критические точки функции  $W$ ;

2) описание всевозможных раскладов бифурцирующих критических точек (сокращенно, *bif*-раскладов);

3) описание примыканий *bif*-раскладов (переходов от расклада к раскладу при пересечении параметрами каустической поверхности);

4) описание строения линий уровня функции  $W$ .

Решение этих вопросов наилучшим образом достигается в полярной системе координат [10]  $x = r \cos(\psi), y = r \sin(\psi)$ , в которой имеем

$$\begin{aligned} U(r, \psi) &= W(r \cos(\psi), r \sin(\psi)) = \\ &= (r^2 \cos^2(\psi) + r^2 \sin^2(\psi))^2 + \\ &+ 2(a-1)r^4 \cos(\psi) \sin(\psi)^2 + \\ &+ \delta_1 r^2 \cos^2(\psi) + 2\delta_2 r^2 \cos(\psi) \sin(\psi) + \\ &+ \delta_3 r^2 \sin^2(\psi) = (1 + b \sin(\varphi))^2 \rho^2 + \\ &+ (b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3) \rho, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\psi, b = \frac{(a-1)}{2}, r^2 = \rho, \\ b_1 &= \frac{\delta_1 - \delta_3}{2}, b_2 = \delta_2, b_3 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2}. \end{aligned}$$

Редуцируя (вторично) по  $\rho$ , получим

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = 2\rho \alpha(\varphi) + \beta(\varphi) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= 1 + b(\sin(\varphi))^2, \\ \beta(\varphi) &= b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$  и для редуцированной функции получаем представление

$$w(\varphi) = \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{(b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3)^2}{1 + b(\sin(\varphi))^2}.$$

**Теорема 1.** *Каустика функции  $W$  совпадает с каустикой функции  $w$ .*

Доказательство приведено в [10].

Посредством редуцированной функции  $w$  нетрудно провести построение каустик. Ниже представлены соответствующие изображения, полученные в системе Maple. На рисунках го-

ризонтальные оси координат соответствуют  $\delta_1, \delta_2$ , а вертикальная —  $\delta_3$ .

Каустика разбивает пространство параметров на зоны, в каждой из которых расклад бифурцирующих экстремалей постоянен. Так, например, во всех случаях, рассмотренных выше, зона, находящаяся внутри конуса, при положительных  $\delta_1$  и  $\delta_2$  (на изображениях сечений эта зона не видна) будет соответствовать *bif*-раскладу  $(1,0,0)$ .

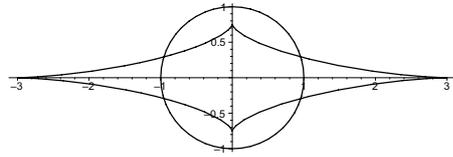
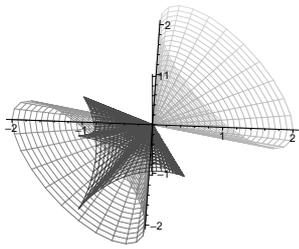
При  $-1 < a < 1$  каустика совпадает с точностью до поворота на угол  $\pi/4$  с каустикой при  $1 < a < +\infty$ . Поэтому достаточно рассмотреть строение ключевой функции для  $a$  на одном из этих интервалов.

Итак, зоне  $-1 < a < 0$ , как отмечалось выше, соответствует расклад  $(1,0,0)$ . Второй зоне, лежащей с внешней стороны границ конуса и вне «грамофончика», соответствуют два минимума и седло в начале координат (расклад  $(2,1,0)$ ). При приближении к границе конуса и переходе в зону, находящуюся внутри конуса, появляются новые критические точки (в нуле появляется максимум). Расклад  $(2,2,1)$ .

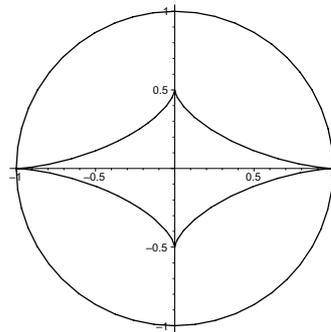
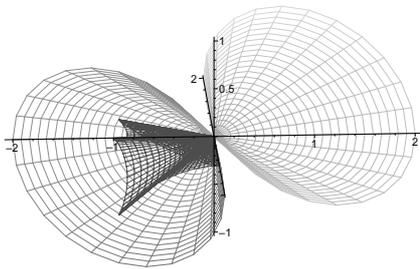
Следующий случай соответствует зоне, в которой ключевая функция имеет 7 критических точек (расклад  $(4,3,0)$ ). Эта зона появляется только при  $a \in (-1, 0) \cup (3, +\infty)$ . Соответствующие линии уровня изображены на рис. 2.

Расклад с максимальным числом критических точек —  $(4,4,1)$ .

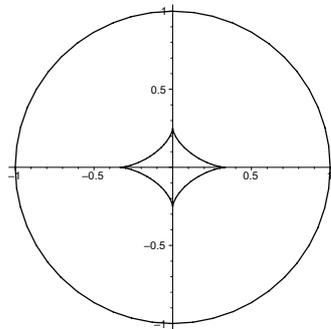
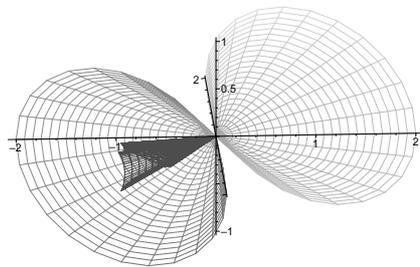
Из теории Морса [11] известно, что каждую гладкую функцию  $W$  на конечномерном многообразии  $M$ , имеющую лишь морсовские критические точки, можно изобразить клеточным комплексом, каждая клетка которого взаимно однозначно соответствует критической точке функции  $W$ . Размерность клетки равна индексу Морса соответствующей критической точки, а примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической системы  $\dot{\xi} = -\text{grad } W(\xi)$ ). Причем гомотопический тип изображающего комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия  $M$ . Из этого факта вытекает, в частности, что наборы стационарных точек функций на плоскости и в трехмерном пространстве можно изображать графами (одномерными остовами клеточных комплексов). Если функция  $W$ , заданная на  $\mathbb{R}^n$ , коэрцитивна, то изображающий ее комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке).



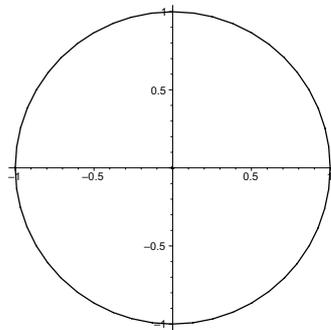
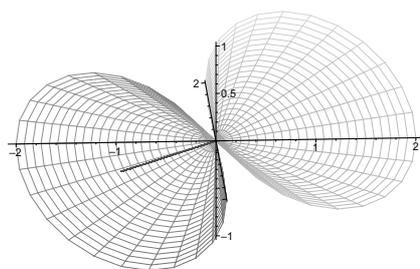
1)  $-1 < a < 0$



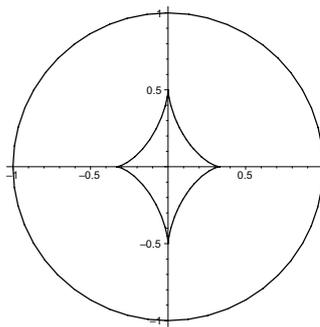
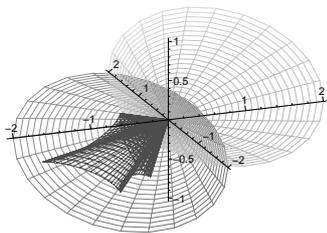
2)  $a = 0$



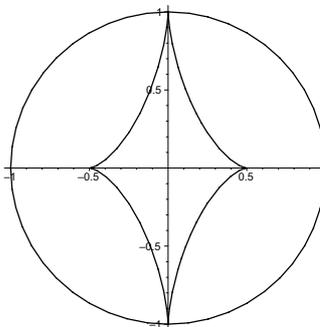
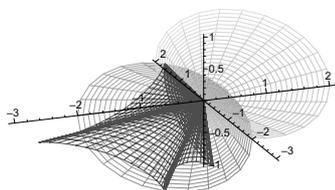
3)  $0 < a < 1$



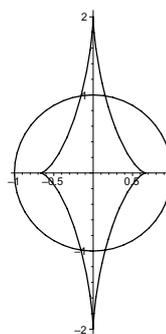
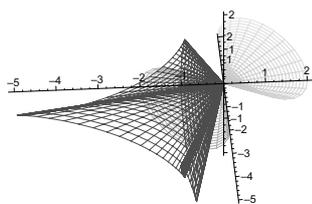
4)  $a = 1$



5)  $1 < a < 3$



6)  $a = 3$



7)  $a > 3$

Рис. 1

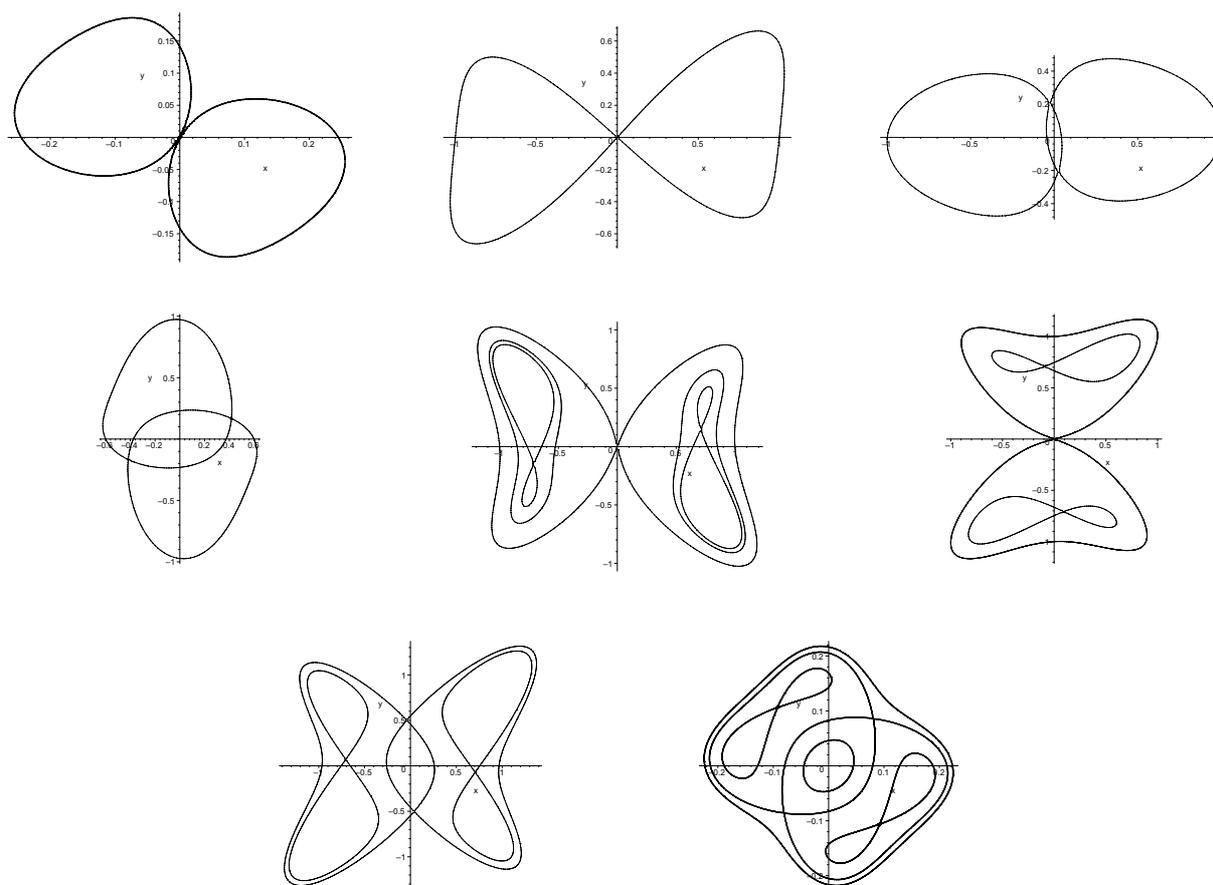


Рис. 2

Следовательно, в случае коэрцитивной функции изображающий граф связан.

При  $m = 2$ , обозначив через  $l_0, l_1$  и  $l_2$  количества минимумов седла индекса (Морса) 1 и седла индекса 2, получим следующие соотношения для максимального расклада:

$$l_0 + l_1 + l_2 = 9, \quad (14)$$

$$l_0 - l_1 + l_2 = 1. \quad (15)$$

Изображающий клеточный комплекс состоит из  $l_0$  вершин,  $l_1$  ребер и  $l_2$  двумерных клеток. Он полностью определяется своим одномерным остовом (изображающим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам индекса 1. При этом две вершины соединяются ребром, если существует кривая, соединяющая соответствующую им пару точек минимумов, составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных кривых поля градиентов), связывающих пары «седло — минимум» (малым шевелением функции или метрики можно до-

биться того, чтобы любая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекает в точку локального минимума). Двумерные грани соответствуют точкам максимумов. За счет изменения метрики в областях вида  $\{c_1 < W < c_2\}$ , не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (то есть сепаратрисы будут втекать в другие точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек. Переключениям сепаратрис соответствуют гомологические преобразования графа.

Пусть граф  $\hat{\Gamma}$  получен из графа  $\Gamma$  через последовательность следующих трех операций: 1) удаление любого ребра, соединяющего пару внутренних (некраевых) вершин  $A, B$ , 2) склеивание оставшихся (после удаления ребра) частей графа по вершинам  $A, B$  (за точкой стыка сохраним обозначение  $A$ ) и 3) приклеивание

к точке стыка  $A$  нового «висячего» ребра (вторая вершина приклеенного ребра — краевая точка).

Тогда говорят, что граф  $\hat{\Gamma}$  получен из графа  $\Gamma$  прямым гомологическим преобразованием, а граф  $\Gamma$  получен из  $\hat{\Gamma}$  обратным гомологическим преобразованием. Если граф  $\tilde{\Gamma}$  получен из графа  $\Gamma$  через конечную последовательность прямых и обратных гомологических преобразований, то графы  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  называются гомологичными.

Очевидно, что гомологические преобразования сохраняют количества вершин и ребер графа.

Из (14), (15) следует, что

$$l_1 = 4, l_0 + l_2 = 5.$$

**Теорема 2** (см. [2]). *При регулярных возмущениях гладкой функции в окрестности особой точки типа двумерной сборки появляется те и только те bif-расклады критических точек, которые приведены в следующей таблице:*

$$\{2, 1, 0\}, \{3, 2, 0\}, \{4, 3, 0\}, \{5, 4, 0\}, \\ \{1, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{3, 3, 1\}, \{4, 4, 1\}.$$

Макимальным раскладам соответствуют следующие изображающие графы (собранные в классы гомологичных):

Таким образом ответы на основные вопросы бифуркационного анализа, как видно из рисунков, здесь получены.

### 3. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТРЕХМЕРНОЙ СБОРКИ

Гладкая функция  $W$  на пространстве  $\mathbb{R}^3$  имеет в критической точке  $a \in M$  особенность 3-мерной сборки, если в некоторой локальной системе координат с центром в точке  $a$  функция  $W$  допускает представление в виде

$$\sum_{i,j,k,l} \alpha_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + o(\|x\|^4) \quad (16)$$

с условием, что начало координат в  $\mathbb{C}^3$  является изолированной стационарной точкой для комплексного продолжения квартичной части  $W^{(4)}$  этой функции. Рассматриваемый нами случай *min*-особенности означает, что на квартичную часть наложено условие, состоящее в требовании строгой минимальности нулевого значения полинома  $W^{(4)}$ . Как известно из теории комплексных нормальных форм полуквазиоднородных особенностей [3], для особенности типа 3-мерной сборки можно подобрать такие локальные координаты (в комплексном случае), в которых функция (16) приобретет следующий вид:

$$N_0(x_1, x_2, x_3) = dx_1^2 x_2^2 x_3^2 + c_1 x_1 x_2^2 x_3^2 + c_2 x_1^2 x_2 x_3^2 + \\ + c_3 x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 + \\ + a_3 x_1^2 x_2^2 + b_1 x_1^2 x_2 x_3 + b_2 x_1 x_2^2 x_3 + b_3 x_1 x_2 x_3^2, \quad (17)$$

где  $\{a_i, b_j, c\}$  — фиксированный набор коэффициентов, заданный с условием, что квартичная часть имеет 27-кратную особенность в нуле. Соответственно, нормальная форма версальной развертки для этой особенности имеет следующий вид:

$$N(x_1, x_2, x_3) = d x_1^2 x_2^2 x_3^2 + c_1 x_1 x_2^2 x_3^2 + \\ + c_2 x_1^2 x_2 x_3^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \\ + a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + b_1 x_1^2 x_2 x_3 + \\ + b_2 x_1 x_2^2 x_3 + b_3 x_1 x_2 x_3^2 + \beta_{1,2} x_1^2 x_2 + \\ + \beta_{2,1} x_1 x_2^2 + \beta_{1,3} x_1^2 x_3 + \beta_{3,1} x_1 x_3^2 + \\ + \beta_{2,3} x_2^2 x_3 + \beta_{3,2} x_2 x_3^2 + \gamma x_1 x_2 x_3 + \\ + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 x_3^2 + \varepsilon_{1,2} x_1 x_2 + \\ + \varepsilon_{1,3} x_1 x_3 + \varepsilon_{2,3} x_2 x_3 + q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3, \quad (18)$$

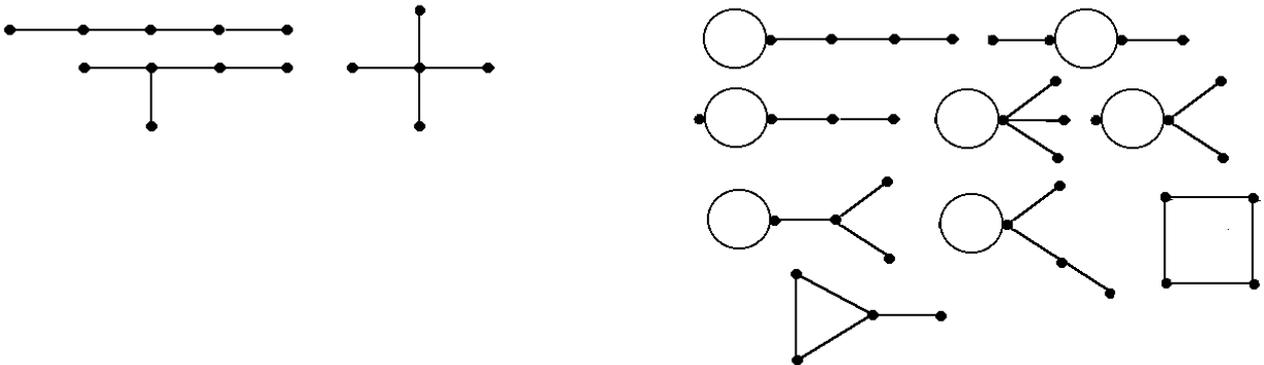


Рис. 3

где  $\{a_i, b_j, c_j, d, \beta_{i,j}, \delta_j, \varepsilon_{i,j}, \gamma, q_k\}$  — параметры деформации.

В случае четной особенности нужно отбросить все мономы нечетной степени, что приведет к развертке

$$N(x_1, x_2, x_3) = dx_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + b_1 x_1^2 x_2 x_3 + b_2 x_1 x_2^2 x_3 + b_3 x_1 x_2 x_3^2 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 x_3^2 + \varepsilon_{1,2} x_1 x_2 + \varepsilon_{1,3} x_1 x_3 + \varepsilon_{2,3} x_2 x_3. \quad (19)$$

В случае  $\mathbb{Z}_2^3$ -эквивариантной особенности имеем развертку

$$N(x_1, x_2, x_3) = dx_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 x_3^2. \quad (20)$$

Аналогичный результат имеет место и в вещественном случае [12].

Заметим, что существуют два типа  $(\mathbb{Z}_2)^2$ -симметрии трехмерной сборки, связанные с действиями группы  $(\mathbb{Z}_2)^2$  (в соответствующих координатах), порожденных следующими парами инволюций:

$$S_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

и

$$S_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Соответственно, для каждого из этих типов симметрии получаем (посредством усреднения по действию группы  $(\mathbb{Z}_2)^2$  соответствующей нормальной формы из списка (17)–(20) следующие нормальные формы версальных деформаций:

$$N(x_1, x_2, x_3) = dx_1^2 x_2^2 x_3^2 + cx_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + \beta_1 x_1^2 x_3 + \beta_2 x_2^2 x_3 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 x_3^2 + qx_3 \quad (21)$$

— в случае типа  $S_1$  и

$$N(x_1, x_2, x_3) = dx_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + bx_1^2 x_2 x_3 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 x_3^2 + \varepsilon x_2 x_3 \quad (22)$$

— в случае типа  $S_2$ .

## ВТОРИЧНАЯ РЕДУКЦИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ СБОРКИ

При описании раскладов стационарных точек (15) в прикладных задачах весьма полезно использование отдельных случаев симметрии (например, четности по отдельным группам переменных), дающих возможность повторной редукции к функциям на сфере или к функциям от меньшего количества переменных.

Если  $W$  четно зависит лишь от одной компоненты, например третьей:  $W = \xi_3^4 + W_2(\xi_1, \xi_2)\xi_3^2 + W_0(\xi_1, \xi_2)$ , и если при этом  $\inf W_2(\xi_1, \xi_2) > 0$ , то исследование стационарных точек  $W$  сводится к исследованию стационарных точек функции двух переменных

$$W_0(\xi_1, \xi_2) = \inf_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (23)$$

После локальной нормализующей замены переменных ([3]) получаем функцию  $W_0$  в виде

$$\xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2 \xi_2^2 + \sum_{i,j \leq 2} \lambda_{ij} \xi_1^i \xi_2^j, \quad a > -2, a \neq 2$$

(нормальная форма возмущенной двумерной сборки).

В перечисленных ранее раскладах заметно влияние примыкающей к двумерной сборке одномерной  $\min$ -особенности  $A_7$  ([3]), которую можно получить в нуле с парой ненулевых морсовских стационарных точек на оси  $0\xi_2$  или без неё, рассмотрев следующую деформацию двумерной сборки:

$$(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)^2 + \xi_2^4 + a(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)\xi_2^2 = \xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2 \xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_1^2 \xi_2 + a\varepsilon\xi_2^3 + \varepsilon^2 \xi_2^2. \quad (24)$$

Наличие или отсутствие пары дополнительных стационарных точек зависит от выбора значения параметра  $a$ . При одних значениях получается пара «седло — минимум», а при других — «седло — максимум». Посредством деформации (24) легко установить существование всех указанных в теореме раскладов. Отсутствие других раскладов вытекает из того, что сумма  $p + q + r$  нечетна и ограничена числом 9, а также из того, что выполняется соотношение  $p - q + r = 1$  при  $a > -2$ .

В случае четных возмущений двумерныхборок появляются лишь следующие расклады:

$$\{2, 1, 0\}, \{4, 3, 0\}, \{2, 2, 1\}, \{4, 4, 1\}.$$

Если условие  $\inf W_2(\xi_1, \xi_2) > 0$  не выполнено, то пространство переменных  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  разби-

ваются на две области  $O_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : W_2(\xi_1, \xi_2) < 0\}$  и  $O_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : W_2(\xi_1, \xi_2) > 0\}$ . В первой из них исследование стационарных точек также сводится к исследованию функции (23). А во второй — к исследованию пары функций:

$$W_0(\xi_1, \xi_2) = \sup_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (25)$$

$$W_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} W_2(\xi_1, \xi_2)^2 = \inf_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (26)$$

Редукция ко второй функции сохраняет индексы морса стационарных точек, а редукция к первой функции уменьшает все значения индекса Морса на единицу.

Раскладам бифурцирующих критических точек, полученным при возмущениях особенности 3-мерной сборки, соответствует несколько сотен изображающих комплексов. Если ограничиться рассмотрением сборок и их возмущений с симметрией параллелепипеда (т. е. четных по каждой переменной), то получится около пятидесяти изображающих комплексов [8]. Полного списка изображающих комплексов для 3-мерных сборок в настоящее время нет. Однако созданные в последнее время новые геометрические методы [2] создают впечатление реальности создания эффективных алгоритмов перечисления *bif*-раскладов (для трехмерной сборки).

В настоящее время найдены следующие максимальные комплексы (рис. 4).

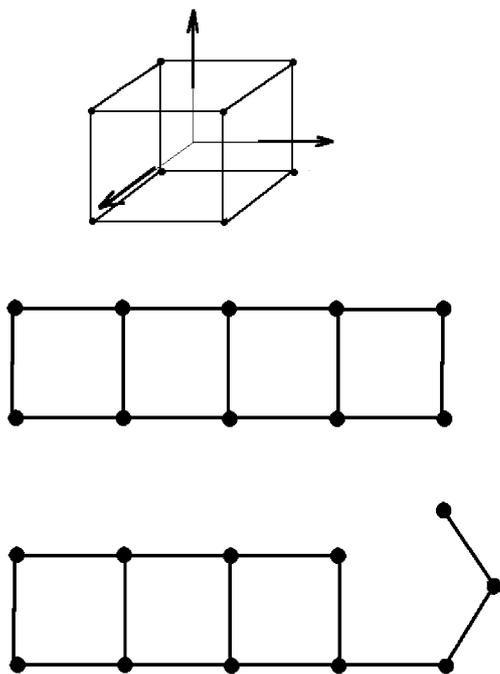


Рис. 4

#### 4. ОДНОРОДНЫЕ ОСОБЕННОСТИ 6-ГО ПОРЯДКА ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ С СИММЕТРИЕЙ ЧЕТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО КАЖДОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задачи о фазовых переходах и другие задачи современного приводят к постановкам задач с однородными особенностями шестого порядка. Особенности такого типа представляют реальный интерес для задачи феноменологического описания фазовых переходов [14]. В случае двух переменных четная (по каждой переменной) ключевая функция  $W$  имеет следующий вид:

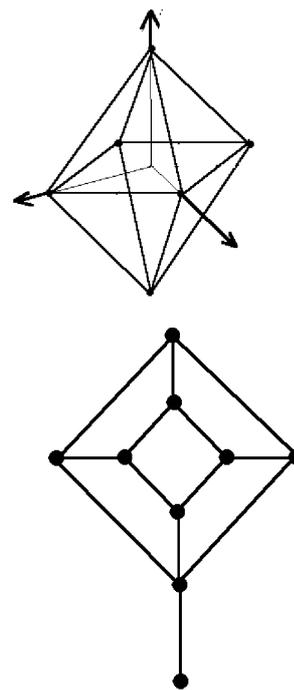
$$x_1^6 + x_2^6 + \alpha_1 x_1^4 x_2^2 + \alpha_2 x_1^2 x_2^4 + \beta_1 x_1^4 + \beta_2 x_2^4 + \beta_3 x_1^2 x_2^2 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + o(\|x\|^6).$$

После замены  $x_1^2 = y_1, x_2^2 = y_2$  получим омбилическую точку минимума в вершине угла  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ . Из результатов А. В. Белоглазова по угловым особенностям омбилического типа [15] следует, что максимальные *bif*-расклады особенности в нуле функции  $W$  исчерпываются следующими раскладами:

$$(9, 12, 4), (7, 12, 6), (5, 12, 8).$$

Им соответствуют графы рис. 5.

В случае трех переменных четная по каждой переменной ключевая функция  $W$  (с однородной особенностью 6-го порядка) имеет следующий вид:



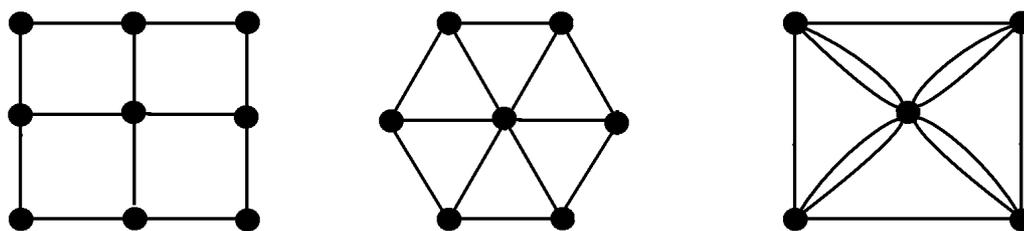


Рис. 5

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + \alpha_1 x_1^4 x_2^2 + \alpha_2 x_1^2 x_2^4 + \alpha_3 x_1^4 x_3^2 + \alpha_4 x_1^2 x_3^4 + \alpha_5 x_2^4 x_3^2 + \alpha_6 x_2^2 x_3^4 + \beta_1 x_1^4 + \beta_2 x_2^4 + \beta_3 x_3^4 + \gamma_1 x_1^2 x_2^2 + \gamma_2 x_1^2 x_3^2 + \gamma_3 x_2^2 x_3^2 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 x_3^2 + o(\|x\|^6).$$

После замены  $x_1^2 = y_1, x_2^2 = y_2, x_3^2 = y_3$  получим омбилическую точку минимума в вершине угла  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ .

Посредством прямого сложения особенностей (одной и двух переменных) получаются максимальные расклады

$$(27, 54, 36, 8), (21, 50, 42, 12), (15, 46, 48, 16),$$

которым отвечают следующие графы (рис. 6).

Используя вторичную редукцию к функциям двух переменных, можно получить максимальные расклады

$$(17, 52, 46, 10), (19, 48, 44, 14), (21, 52, 42, 10),$$

которым соответствуют следующие графы (рис. 7).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления / М. А. Красносельский, Н. А. Бобылев, Э. М. Мухамдиев // ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 3. — С. 530—533.

2. Даринский Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ, — 2004. — Т. 12. — С. 3—140.

3. Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

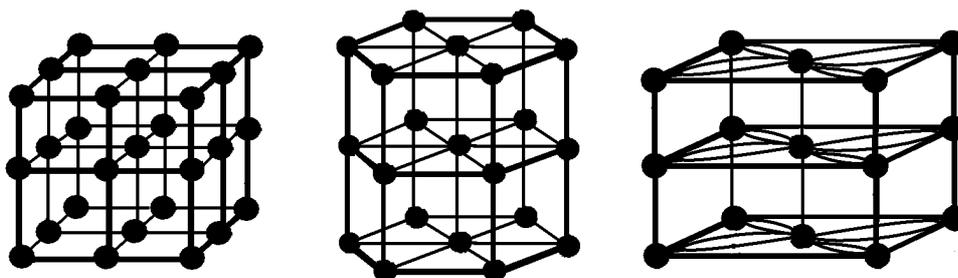


Рис. 6

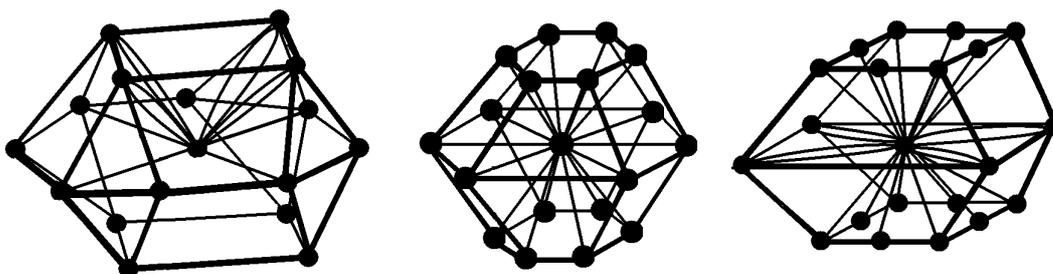


Рис. 7

4. Бреккер Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Бреккер, Л. Ландер. — М. : Мир, 1977. — 208 с.
5. Постон Т. Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, И. Стюарт. — М. : Мир, 1980. — 608 с.
6. Костин Д. А. Ортопроектор теории возмущения линейных операторов и бифуркации равновесий слабо неоднородной упругой балки / Д. А. Костин // Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна. — 2006. — С. 106—113.
7. Костин Д. А. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабонеоднородной упругой балки / Д. А. Костин // ДАН. — 2008. — Т. 418, № 3. — С. 295—299.
8. Гнездилов А. В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией / А. В. Гнездилов // Функц. анализ. — 2000. — Т. 34, Вып. 1. — С. 83—86.
9. Борисович Ю. Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера / Ю. Г. Борисович, В. Г. Звягин, Ю. И. Сапронов // Успехи матем. наук. — 1977. — Т. 32, Вып. 4. — С. 3—54.
10. Зачепа А. В. Вторичные редукции в анализе бифуркаций экстремалей из точки минимума с особенностью 3-мерной сборки / А. В. Зачепа, Ф. А. Белых, Ю. И. Сапронов // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. — Вып. 1. — Воронеж : ВГУ, 2005. — С. 18—33.
11. Постников М. М. Введение в теорию Морса / М. М. Постников. — М. : Наука, 1971. — 568 с.
12. Колесникова И. В. О приведении кватерничной формы трех переменных к нормальному виду / И. В. Колесникова // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения—XVII». — Воронеж : ВГУ, 2007. — С. 84—86.
13. Изюмов Ю. А. Фазовые переходы и симметрия кристаллов / Ю. А. Изюмов, В. И. Сыромятников. — М. : Наука, 1984. — 247 с.
14. Широков В. Б. Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В.Н. ВаTiO<sub>3</sub> / В. Б. Широков, Ю. И. Юзюк, В. Dkhil, В. В. Леманов // Физика твердого тела. — 2008. — Т. 50, Вып. 5. — С. 889—892.
15. Белоглазов А. В. Бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из омбилической точки минимума в вершине угла / А. В. Белоглазов // Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. — 2006, № 2. — С. 147—153.

Поступила в редакцию 31 марта 2008 г.