*УДК 517.946*

# ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

**А. Д. Баев**

*Воронежский государственный университет*

В работе устанавливается априорная оценка решений общей краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка в весовых пространствах С. Л. Соболева.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вырождающееся эллиптическое уравнение высокого порядка, общая краевая задача, априорная оценка решений.

Обобщённые решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка были впервые рассмотрены в работах С. Г. Михлина [1] и М. И. Вишика [2]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [3], [4]. Методы, использованные в работах [3], [4], позволяют исследовать лишь так называемые «степенные» вырождения. Существенным условием этих работ является принадлежность весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^{\infty}$.

В настоящей работе устанавливаются коэрцитивные априорные оценки решений общей краевой задачи в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. При этом весовая функция $\alpha(t)$ может не быть монотонной и может не являться бесконечно дифференцируемой. Априорная оценка установлена в специальных весовых пространствах С. Л. Соболева.

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассматривается уравнение

$$L_{2m}(D_x, D_{x,t})v(x,t) - \partial_t^2 v(x,t) = F(x,t), \qquad (1)$$

где

$$L_{2m}(D_x, D_{x,t}) = \sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j} D_x^{\tau} D_{x,t}^{\tau},$$

$$D_x^{\tau} = (-1)^{\frac{|\tau|}{2}} \frac{\partial^{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{n-1}}}{\partial x_1^{\tau_1}\partial x_2^{\tau_2}\ldots\partial x_n^{\tau_{n-1}}},$$

$$D_{x,t}^{\tau} = \sqrt{-\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},$$

$\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $a_{\tau j}$ — комплексные коэффициенты. Без ограничения общности будем считать, что $a_{02m} = 1$.



На границе $t = 0$ полосы $R_d^n$ задается граничное условие

$$\sum_{|\tau|+mj\le m_1} b_{\tau j} D_x^{\tau}\partial_t^j v(x,t)\Big|_{t=0} = G(x) \qquad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau e}$.

На границе $t = d$ полосы $R_d^n$ заданы условия вида

$$v\big|_{t=d} = \partial_t\, v\big|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1}\, v\big|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Предположим выполнение следующих условий.

Условие 1. При всех $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1$ справедлива оценка $\operatorname{Re} L_{2m}(\xi,\eta) \ge c(1+|\xi|^2+\eta^2)^m$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от $(\xi,\eta)$.

Условие 2. Для некоторого $s \ge 2m + m_1$ функция $\alpha(t) \in C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0, \alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Применим к обеим частям уравнения (1) и условий (2),(3) преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$. Получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in R^{n-1}$.

$$L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t})u(\xi,t) - \partial_t^2 u(\xi,t) = f(\xi,t), \qquad (4)$$

$$\sum_{|\tau|+me\le m_1} b_{\tau j}\xi^{\tau}\partial_t^e u(\xi,t)\Big|_{t=0} = g(\xi), \qquad (5)$$

$$u(\xi,t)\big|_{t=d} = \partial_t\, u(\xi,t)\big|_{t=d} = \ldots = \\ = \partial^{m-1}\, u(\xi,t)\big|_{t=d} = 0. \qquad (6)$$

Здесь $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$, $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F(x,t)]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}[G(x)]$.

Лемма 1. Пусть выполнено условие 1 и $f(\xi,t) \in C^s[0,d]$. Тогда решение $u(\xi,t)$ уравнения (4) принадлежит по переменной $t$ пространству $C^{s+2}[0,d]$ и справедлива формула

$$\partial_t^{j+2}u(\xi,0) = \\ = Z_{0,j}(\xi)u(\xi,0) + Z_{1,j}(\xi)\partial_t u(\xi,0) + Z_{2,j}(\xi,\lambda), \qquad (7)$$

где функции $Z_{k,j}$, $k = 0,1,2$, определяются по рекуррентным соотношениям

$$\mathrm{Z}_{i,j}(\xi) = F_{i,j} + \sum_{k=0}^{j-2} \frac{j!}{(j-k)!} (\sigma_{2m,k} \mathrm{Z}_{i,j-k-2} + \sigma_{2m-1,k} \mathrm{Z}_{i,j-k-1}) -$$

$$-\sum_{k=0}^{j-1} \sum_{e=1}^{j-k} \frac{(j-l)!}{k!(j-k-l)!} \left[ \sum_{v=0}^{j-k-2m+2} (l-2m+2) T_{j-k-2,v}^{1,2m-2} \mathrm{Z}_{i,v+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{2m-2} \sigma_{p,k}(\xi) \sum_{v=0}^{j-k-2m+p+1} T_{j-k-2,v}^{p,2m-2} \mathrm{Z}_{i,v+1} \right],$$

$$\mathrm{Z}_{0,0}(\xi) = L_{2m}(\xi, 0), \ \mathrm{Z}_{1,0}(\xi) \equiv 0,$$

$$\mathrm{Z}_{2,0}(\xi, \lambda) = -f(\xi, 0).$$

Числа $T_{s,v}^{k,2m-2}$ находятся по формулам

$$T_{s,j}^{k,e+1} = \sum_{p=j+1}^{s+k-e} T_{s,p}^{k,e} \cdot T_{p,j}^{e,e+1}, \ k = 0,1,\ldots l;$$

$$T_{s,j}^{k,k+1} = \sum_{p=1}^{j+1} \frac{(s-p)!(p+2-2m+k)}{(s-j-1)!(j+1-p)!} \partial_t^{s-j+1} \gamma(t)\Big|_{t=0};$$

$$\gamma(t) = \alpha^{\frac{m}{m-1}}(t).$$

Функции $F_{i,j}$ $i = 0,1,2$ определяются по рекуррентным соотношениям

$$F_{0,j}(\xi) = j!\,\sigma_{2m,j}(\xi) - j!\,\sigma_{2m-1,j-1}(\xi)\sigma_{2m,0}(\xi);$$

$$F_{1,j}(\xi) = j!\,\sigma_{2m-1,j}(\xi) -$$

$$-j!(\sigma_{2m-1,j-1}(\xi)\sigma_{2m-1,0}(\xi) - \sigma_{2m,j-1}(\xi));$$

$$F_{2,j}(\xi, \tilde{\lambda}) = j!\,\tilde{\lambda}_j + j!\,\tilde{\lambda}_0 \sigma_{2m-1,j-1}(\xi),$$

$$\tilde{\lambda}_j = -\frac{f^{(j)}(\xi, 0)}{j!},$$

где

$$\sigma_{0,j} = -\frac{1}{j!} \partial_t^{j+2} \gamma(t)\Big|_{t=0};$$

$$\sigma_{\mu,j} = -\frac{1}{j!} \partial_t^{j+1} b_\mu(\xi, t)\Big|_{t=0}, \mu = 1,2,\ldots 2m-2;$$

$$b_{2m-k}(\xi, t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau| \le 2m-j} (-1)^{\frac{1}{2}(2m-j)} a_{\tau j} \xi^\tau \psi_{j,k}(t) \gamma^{\frac{2m-k}{m}}(t),$$

$$k = 1; \ k = 3,4,\ldots 2m-1,$$

$$b_{2m-2}(\xi, t) =$$

$$= \sum_{j=2}^{2m} \sum_{|\tau| \le 2m-j} (-1)^{\frac{1}{2}(2m-j)} a_{\tau j} \xi^\tau \psi_{j,2}(t) \gamma^{\frac{2(m-1)}{m}}(t) - 1;$$

$$b_{2m}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{2m} \sum_{|\tau| \le 2m-j} (-1)^{\frac{1}{2}(2m-j)} a_{\tau j} \xi^\tau \psi_{j,0}(t);$$

а функции $\psi_{j,k}$ $(j \ge k)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\psi_{j,k}(t) = 1, \ (0 \le j \le 2m),$$

$$\psi_{j+1,0}(t) = \alpha(t)\partial_t \psi_{j,0}(t) + \frac{1}{2}\alpha'(t)\psi_{j,0}(t);$$

$$\psi_{j+1,k}(t) =$$

$$= \alpha(t)\partial_t \psi_{j,k}(t) + \psi_{j,k-1}(t) + \left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha'(t)\psi_{j,k}(t),$$

$$1 \le k \le j-1;$$

$$\psi_{j+1,j}(t) = \psi_{j,j-1}(t) + (j + \frac{1}{2})\alpha'(t).$$

Из леммы 1 следует, что граничное условие (2) можно записать в виде

$$\theta_0(\xi) u(\xi, 0) + \theta_1(\xi) \partial_t(\xi, 0) + \theta_2(\xi, \tilde{\lambda}) = g(\xi),$$

где

$$\theta_k(\xi) = \sum_{j=0}^{r-2} \Lambda_{j+2}(\xi) \mathrm{Z}_{k,j}(\xi) + \Lambda_k(\xi),$$

$$k = 0,1, \ r = \left[\frac{m_1}{m}\right];$$

$$\theta_2(\xi, \tilde{\lambda}) = \sum_{j=0}^{r-2} \Lambda_{j+2}(\xi) \mathrm{Z}_{2,j}(\xi, \tilde{\lambda}), \ \Lambda_j(\xi) = \sum_{|\tau| \le m_1 - mj} b_{\tau j} \xi^2.$$

Условие 3. При всех $\xi \in R^{n-1}$ выполняется одно из следующих двух условий:

$$|\theta_1(\xi) - \theta_1(\xi)|^2 > |\theta_1(\xi)|^2 + |\theta_0(\xi)|^2$$

или

$$\theta_1(\xi)\overline{\theta_0(\xi)} \equiv 0, \quad |\theta_1(\xi)|^2 + |\theta_0(\xi)|^2 > 0.$$

Заметим, что степень многочлена $\theta_0(\xi)$ не превосходит $m_1$, а степень $\theta_1(\xi)$ не превосходит $m_1 - m$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u](\eta) = \int_o^d u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \quad (8)$$

определенное первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(0,d)$. В [5] было показано, что это преобразование может быть рассмотрено на обобщенных функциях и было построено обратное преобразование $F_\alpha^{-1}$:

$$F_\alpha^{-1}[u(\eta)](t) = F_{\eta \to \tau}^{-1}[u(\eta)](\tau)\Big|_{\tau = \varphi(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

где $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $F_{\eta \to \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. В [5] показано, что для преобразования $F_\alpha$ справедлив аналог равенства Парсеваля :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha[u](\tau) \cdot \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta = 2\pi(u, w). \quad (9)$$

Здесь $u(t), w(t) \in L_2(0,d)$ ; $(u, w)$ — скалярное произведение в $L_2(0,d)$.

Для преобразования $F_\alpha$ справедливы также следующие утверждения.

Лемма 2. Пусть $u(t) \in C^s[0,d]$ и функция $u(t)$ удовлетворяет условиям (6). Тогда при всех $0 \le j \le s$ справедливо равенство

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta). \qquad (10)$$

Задача (1)—(3) изучается в весовых пространствах типа С. Л. Соболева.

Определение 1. Будем говорить, что функция $v(x,t)$ принадлежит пространству $H_{s,\alpha,m}(R^n_d)$ ($s \ge 0$ — действительное число), если для неё конечно норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{s}{m}\right]} \left\| F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(s-mj)} \cdot F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^j_t v]] \right\|_{L_2(R^n_d)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (11)$$

Здесь $\left[\dfrac{s}{m}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{s}{m}$, $F_{x\to\xi}(F^1_{x\to\xi})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье.

Если $s$ — целое неотрицательное число, то норма (11) эквивалентна норме

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \left\{ \sum_{j+|\tau|+me\le s} \left\| D^\tau_x D^j_{\alpha,t} \partial^e_t v \right\|_{L_2(R^n_d)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Определение 2. Будем говорить, что функция $g(x)$ принадлежит пространству $H_s(R^{n-1})$ ($s$ — действительное число), если для неё конечна норма

$$\|g\|_s = \left\| F^{-1}_{\xi\to x}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} F_{x\to\xi}[g]] \right\|_{L_2(R^{n-1}_d)}. \qquad (13)$$

Если $s$ — целое неотрицательное число, то норма (13) эквивалентна следующей норме:

$$\|g\|_s = \left\{ \sum_{|\tau|\le s} \left\| D^\tau_x g \right\|_{L_2(R^{n-1})} \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (14)$$

Основным результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $s \ge 2m + m_1$ ($s$ — действительное число), $m \ge 2$ — чётное число, $m_1 > 0$ — целое число. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,m}(R^n_d)$, $G(x) \in H_{s-m_1-\frac{m}{2}}(R^{n-1})$. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1)—(3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,m}(R^n_d)$, справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,m} \le c(\|F\|_{s-2m,\alpha,m} + \|G\|_{s-m_1-\frac{m}{2}}) \qquad (15)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $v, F, G$.

Априорная оценка (15) для задачи (1)—(3) следует из априорной оценки для решения задачи (4)—(6).

Для того что бы сформулировать эту оценку, введём пространство $\tilde{H}_{s,\alpha,m}(0,d)$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $u(\xi,t)$ принадлежит по переменной $t$ пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,m}(0,d)$ ($s \ge 0$ — действительное число), если для нее конечна норма, зависящая от параметра $s \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,m,|\xi|} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{s}{m}\right]} \left\| F^{-1}_\alpha[(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(s-mj)} F_\alpha[\partial^j_t u(\xi,t)]] \right\|_{L_2(0,d)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. Пусть $s \ge 2m + m_1$ ($s$ — действительное число), $m \ge 2$ — четное число, $m_1 > 0$ — целое число. Пусть $f(\xi,t) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha,m}(0,d)$ и выполняются условия 1—3. Тогда для любого решения $u(\xi,t)$ задачи (4)—(6), принадлежащего пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,m}(0,d)$, справедлива априорная оценка

$$\|u\|^2_{s,\alpha,m,|\xi|} \le c(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,m,|\xi|} + (1+|\xi|^2)^{(s-m_1-\frac{m}{2})} |g(\xi)|^2) \qquad (16)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u, f, g, |\xi|$.

Утверждение теоремы 2 следует из следующей совокупности утверждений.

Лемма 3. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,m}(0,d)$ задачи (4)—(6) справедлива оценка

$$\begin{gathered} \sum_{j=0} (1+|\xi|^2)^{2m-j} \left\| D^j_{\alpha,t} u \right\|^2 \le \\ \le c(\|f\|^2 - (1+|\xi|^2)^m \operatorname{Re} \partial_t u(0)\overline{u(0)}) \end{gathered} \qquad (17)$$

с константой $c > 0$, не зависящей $u, f, \xi$.

Доказательство. Так как пространство $C^{2m}[0,d]$ плотно в пространстве $\tilde{H}_{2m,\alpha,m}(0,d)$, то неравенство (17) достаточно доказать для $u(t) \in C^{2m}[0,d]$. Умножив равенство (4) скалярно в $L_2[0,d]$ на функцию $u$, получим

$$(L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t})u, u) - (\partial^2_t u, u) = (f, u). \qquad (18)$$

Из леммы 2 и равенства (9) получим, что

$$(L_{2m}u, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_{2m}(\xi,\eta) |F[u]|^2 \, d\eta.$$

Отсюда в силу условия 1 получим

$$\operatorname{Re}(L_{2m}u, u) \ge c \sum_{j=0}^{m} (1+|\xi|^2)^{m-j} \left\| D^j_{\alpha,t} u \right\|^2.$$

Используя это неравенство, неравенство Коши—Буняковского и равенство $\mathrm{Re}(\partial_t^2 u, u) = -\mathrm{Re}\,\partial_t u(0)\overline{u(0)} - \frac{1}{2}\|\partial_t u\|^2$, получим из (18) неравенство

$$c\sum_{j=0} (1+|\xi|^2)^{m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u\|^2 \le$$

$$\le \varepsilon(1+|\xi|^2)^m \|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon(1+|\xi|^2)^m}\|f\|^2 - \mathrm{Re}\,\partial_t u(0)\overline{u(0)}.$$

Умножая обе части этого неравенства на $(1+|\xi|^2)^m$ и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (17).

Лемма 4. Пусть выполнены условия 1, 2; $m \ge 2$. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,m}(0,d)$ задачи (4)—(6) справедлива оценка

$$\|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\|^2 + \|\partial_t^2 u\|^2 \le \varepsilon(\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 +$$

$$+(1+|\xi|^2)^m \|\partial_t u\|^2) + c(\varepsilon)(\|f\|^2 + (1+|\xi|^2)^{2m}\|u\|^2), \quad (19)$$

где константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от $u, f, g, \xi$.

Доказательство. Умножив скалярно равенство (4) на функцию $\partial_t^2 u$, получим

$$-a_{02m}(D_{\alpha,t}^{2m} u, \partial_t^2 u) + \|\partial_t^2 u\|^2 =$$

$$= -(f, \partial_t^2 u) + \sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ |\tau|\ge 1}} a_{\tau j}\xi^\tau (D_{\alpha,t}^j u, \partial_t^2 u). \quad (20)$$

Заметим, что

$$-(D_{\alpha,t}^{2m} u, \partial_t^2 u) = \|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\|^2 +$$

$$+i\alpha(t) D_{\alpha,t}^m \partial_t u(t) \cdot D_{\alpha,t}^{m-1}\partial_t\, u(t)\big|_{t=d} + (J_1(\partial_t, D_{\alpha,t})u, \partial_t u), \quad (21)$$

где $J_1(\partial_t, D_{\alpha,t})$ — коммутатор операторов $\partial_t$ и $D_{\alpha,t}^{2m}$. Используя неравенство Эрлинга—Ниренберга, получим неравенства

$$\sum_{\substack{|\tau|+j\le 2m \\ |\tau|\ge 1}} \left|a_{\tau j}\xi^\tau (D_{\alpha,t}^j u, \partial_t^2 u)\right| \le$$

$$\le \varepsilon(\|\partial_t^2 u\|^2 + \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2) + c(\varepsilon)(1+|\xi|^2)^{2m}\|u\|^2, \quad (22)$$

$$\left|(J_1(\partial_t, D_{\alpha,t})u, \partial_t u)\right| \le$$

$$\le \varepsilon(\|\partial_t^2 u\|^2 + (1+|\xi|^2)^m)\|\partial_t^2 u\|^2 + \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2) +$$

$$+c(\varepsilon)(1+|\xi|^2)^{2m}\|u\|^2. \quad (23)$$

С помощью известной теоремы «о следах» (см. [6]) получим оценку

$$\left|\partial_t^m u\big|_{t=d}\right|^2 + \left|\partial_t^{m+1} u\big|_{t=d}\right|^2 \le$$

$$\le \varepsilon\int_{\frac{d}{4}}^{d} \left|\partial_t^{2m} u(t)\right|^2 + c(\varepsilon)\int_{\frac{d}{4}}^{d} |u(t)| dt \le \varepsilon_1 \|\partial_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 +$$

$$+c(\varepsilon_1)(1+|\xi|^2)^{2m}\|u\|^2. \quad (24)$$

Используя (21)—(24), получим из (20) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ оценку (19).

Лемма 5. При выполнении условий леммы 4 справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{m} (1+|\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 + (1+|\xi|^2)^m \|\partial_t u\|^2 +$$

$$+\|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\|^2 + \|\partial_t^2 u\|^2 \le \quad (25)$$

$$\le c(\|f\|^2 - (1+|\xi|^2)^m\,\mathrm{Re}\,\partial_t u(0)\overline{u(0)}).$$

Доказательство. Из уравнения (4) следует, что

$$\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 \le$$

$$\le c\left(\|f\|^2 + \|\partial_t^2 u\|^2 + \sum_{j=0}^{2m-1} (1+|\xi|^2)^{2m-j}\|D_{\alpha,t}^j u\|^2\right).$$

Используя в этом неравенстве неравенство Эрлинга—Ниренберга, получим

$$\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 \le$$

$$\le \varepsilon\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + c(\varepsilon)(1+|\xi|^2)^{2m}\|u\|^2 + c(\|f\|^2 + \|\partial_t^2 u\|^2).$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon > 0$ достаточно малым и применяя неравенства (19), (17), получим оценку ( 25).

Докажем теперь оценку (16) при $s = 2m$. Для этого воспользуемся условием 3. Заметим, что условие 3 выполнено тогда и только тогда, когда либо $\mathrm{Re}\,\overline{\theta_0(\xi)}\theta_1(\xi) < 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, либо $\overline{\theta_0(\xi)}\theta_1(\xi) \equiv 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$. Рассмотрим сначала случай $\mathrm{Re}\,\overline{\theta_0(\xi)}\theta_1(\xi) < 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$. В этом случае справедливо следующие утверждение.

Лемма 6. Если $\mathrm{Re}\,\overline{\theta_0(\xi)}\theta_1(\xi) < 0$, то существует такая константа $c > 0$, что справедлива оценка

$$-c(1+|\xi|^2)^{m_1-\frac{m}{2}}\,\mathrm{Re}\,\partial_t u(0)\overline{u(0)} \le$$

$$\le \left|\theta_1(\xi)\partial_t u(0) + \theta_0(\xi)u(0)\right|^2. \quad (26)$$

Из лемм 5 и 6 получим

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,m,|\xi|} \le$$

$$\le c(\|f\|^2 + (1+|\xi|^2)^{2m-m_1-\frac{m}{2}}\left|\theta_1(\xi)\partial_t u(0) + \theta_0(\xi)u(0)\right|^2). \quad (27)$$

Пусть теперь $\mathrm{Re}\,\overline{\theta_0(\xi)}\theta_1(\xi) \equiv 0$. Так как при этом $|\theta_1(\xi)|^2 + |\theta_0(\xi)|^2 > 0$, то это означает, что достаточно рассмотреть граничные условия вида

а) $\theta_0(\xi)\,u\big|_{t=0} = g(\xi)$, где $\theta_0(\xi) \ne 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, или б) $\theta_1(\xi)\partial_t u|_{t=0} = g(\xi)$, где $\theta_1(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим сначала случай а).

С помощью неравенства Коши—Буняковского получим

$$-(1+|\xi|^2)^m \operatorname{Re}\partial_t u(0)\overline{u(0)} \leq$$

$$\leq \varepsilon(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\partial_t u(0)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1+|\xi|^2)^{\frac{3m}{2}} |u(0)|^2$$

или, учитывая, что $|\partial_t u(0)|^2 = -2\operatorname{Re}(\partial_t^2 u, \partial_t u)$, получим, что

$$-(1+|\xi|^2)^m \operatorname{Re}\partial_t u(0)\overline{u(0)} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1(\|\partial_t^2 u\|^2 + (1+|\xi|^2)^m \|\partial_t u\|^2) + c(\varepsilon)(1+|\xi|^2)^{\frac{3m}{2}} |u(0)|^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon_1(\|\partial_t^2 u\|^2 + (1+|\xi|^2)^m \|\partial_t u\|^2) + c(\varepsilon_1)(1+|\xi|^2)^{\frac{3m}{2}-m_1} |g(\xi)|^2 .$$

Применяя это неравенство в правой части неравенства (25) и выбирая $\varepsilon_1 > 0$ достаточно малым, получим

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,m,|\xi|} \leq c(\|f\|^2 + (1+|\xi|^2)^{2m-m_1-\frac{m}{2}} |g(\xi)|^2) . \quad (28)$$

Случай б) рассматривается аналогично. Из (27), (28) и (7) получаем справедливость априорной оценки (16) при $s = 2m$.

Доказательство априорной оценки (16) при $s > 2m$ проводится методом, аналогичным методу работы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестник ЛГУ. — 1954. — № 8. — С. 19—48.

2. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Матем. сб. — 1954. — Т. 35(77). — Вып. 33. — С. 513—568.

3. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Матем. сб. — 1969. — Т. 80(112). — Вып. 4. — С. 455—491.

4. *Вишик М. И.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи матем. наук. — 1970. — Т. 25. — Вып. 4. — С. 29—56.

5. *Глушко В. П.* Об Однозначной разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко, А. Д. Баев // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики ИМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1980. — С. 61—63.

6. *Глушко В. П.* Коэрцитивность в $L_2$ общих краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В. П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2. — С. 87—88.

7. *Глушко В. П.* Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж. — 47с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048-79.