УДК 539.374

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. С. Чеботарёв

Воронежский государственный университет

В статье рассматривается вывод уравнений линий скольжения методом Римана для задачи плоской деформации теории идеальной пластичности с границей в виде части окружности. В параметрическом виде приведены решения как в случае с трением на границе, так и в его отсутствии.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], сетка линий скольжения, построенная в пластической зоне с границей в виде части окружности, представляет собой два семейства логарифмических спиралей в случае отсутствия касательных напряжений на границе ($\tau_n = 0$). Доказательство этого факта приводится во многих источниках [1], [2], [3], однако, вывод уравнений характеристик, например, методом Римана, там отсутствует. В [4] уравнения логарифмических спиралей выводятся в полярной системе координат интегрированием соотношений Генки. Представляется интересным получить уравнения характеристик для границы в виде части окружности (логарифмических спиралей в случае $\tau_n = 0$) и распространить этот способ для случая $\tau_n \neq 0$. В [5] приведены в полярных координатах соответствующие уравнения для линий скольжения, но в неявном виде. В данной работе рассматривается вывод уравнений линий скольжения методом Римана как в случае с трением на границе, так и в его отсутствии. Все соотношения получены в параметрическом виде.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

Интегрирование по методу Римана уравнений плоской задачи теории идеальной пластичности состоит в следующем [2]:

1. Задать уравнение кривой AB, являющейся границей, в физической плоскости xOy, например, в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

2. Вычислить вдоль кривой AB значения двух функций X, Y:
$\begin{cases} X = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ Y = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$ (переменные Михлина [1], [2]),
которые удовлетворяют телеграфному уравнению, например для переменной X: $\frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} + X = 0$.

3. Перейти к переменным α , β по формулам: $\begin{cases} \theta = \alpha + \beta, \\ \sigma = 2k(\beta - \alpha) + \sigma_A. \end{cases}$

4. Преобразовать кривую AB на плоскости ($\alpha\beta$) в другую кривую, вдоль которой надо знать X, $\frac{\partial X}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial X}{\partial\beta}$. Тогда значение функции X в точке P(a,b) определяют по формуле:

$$X_P = \tfrac{1}{2}(X_a + X_b) - -\tfrac{1}{2}\int\limits_{ab} \left\{ \left(G\,\tfrac{\partial X}{\partial\alpha} - X\,\tfrac{\partial G}{\partial\alpha} \right) d\alpha + \left(X\,\tfrac{\partial G}{\partial\beta} - G\,\tfrac{\partial X}{\partial\beta} \right) d\beta \right\}, \quad (1)$$

где $G(a,b,\alpha,\beta) = J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}\right)$ — функция Грина для телеграфного уравнения, представляющая собой функцию Бесселя первого рода нулевого порядка.

5. Преобразовать криволинейный интеграл (1) к определенному интегралу Римана.

6. Вычислить полученный интеграл. Получить X=X(a,b).

7. Аналогично поступить с переменной Y. Получить Y=Y(a,b).

8. «Вернуться» к физическим координатам (x,y) по формулам:
$\begin{cases} x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta) \\ y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta) \end{cases}$ при этом $\theta = a + b$.

В результате получим соотношения, которые представляют собой уравнения характеристик в плоскости xOy $\begin{cases} x = x(a,b), \\ y = y(a,b). \end{cases}$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ

1. Кривую AB, представляющую собой четверть окружности единичного радиуса с центром в начале координат и лежащую в I четверти, зададим в параметрическом виде (рис. 1). В качестве параметра удобно выбрать θ — угол

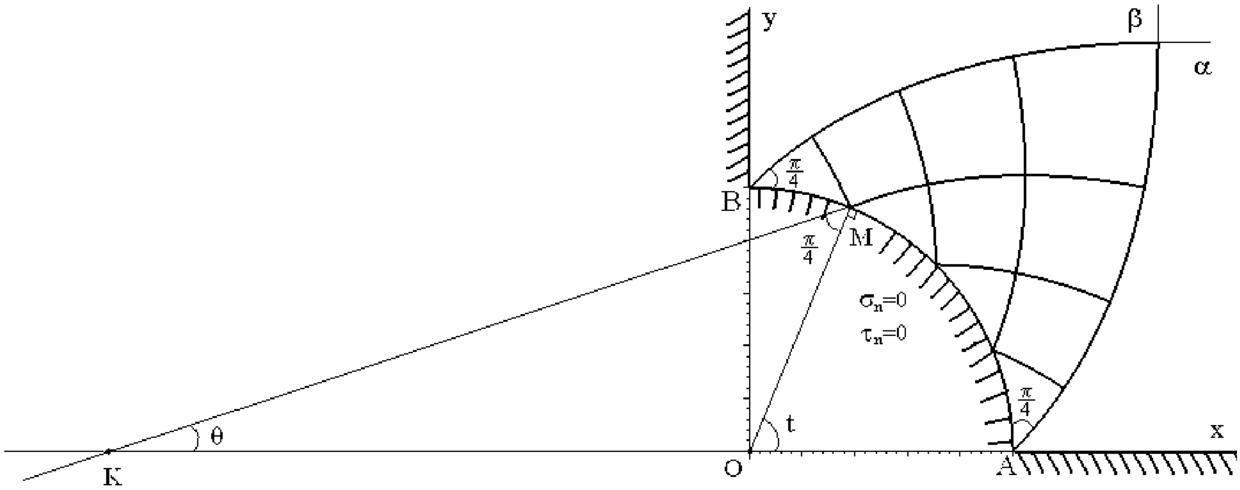


Рис. 1. Сетка линий скольжения, построенная на части AB окружности без учета трения

подхода α-линий к оси Ox. В силу отсутствия трения на границе α-линия везде подходит к границе под одним и тем же углом, равным $\pi/4$. Тогда уравнения окружности можно представить следующим образом $\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\sin(t) \\ 0\le t\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Но из треугольника OMK следует, что $t=\theta+\frac{\pi}{4}$, следовательно, $\begin{cases} x=\cos(\theta+\frac{\pi}{4}) \\ y=\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) \\ -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4} \end{cases}$ — это параметрические уравнения кривой AB в плоскости xOy.

2. Перейдем к переменным Михлина:

$$\begin{cases} X=x\cos(\theta)+y\sin(\theta)= \\ \quad =\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\cos(\theta)+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\sin(\theta)= \\ \quad =\cos(\theta+\frac{\pi}{4}-\theta)=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y=-x\sin(\theta)+y\cos(\theta)= \\ \quad =-\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\sin(\theta)+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\cos(\theta)= \\ \quad =\sin(\theta+\frac{\pi}{4}-\theta)=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

то есть переменные X,Y сохраняют постоянные значения вдоль AB. В интеграле (1) фигурируют значения $\frac{\partial X}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial Y}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial X}{\partial\beta}$, $\frac{\partial Y}{\partial\beta}$ — частные производные по координатам, вычисленные на кривой AB. Заметим, что эти величины в общем случае отличны от нуля [9]. Равны нулю в данном случае будут производные вдоль кривой AB $\frac{\partial X}{\partial\theta}=0$, $\frac{\partial Y}{\partial\theta}=0$. Для того чтобы найти $\frac{\partial X}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial Y}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial X}{\partial\beta}$, $\frac{\partial Y}{\partial\beta}$, необходимо воспользоваться соотношениями Генки [6] и производными $\frac{\partial X}{\partial\theta}$, $\frac{\partial Y}{\partial\theta}$.

Имеем: $\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial\alpha}+X=0 \text{ вдоль } \alpha\text{-линии}, \\ \frac{\partial X}{\partial\beta}-Y=0 \text{ вдоль } \beta\text{-линии}. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial\beta}=Y=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{\partial Y}{\partial\alpha}=-X=-\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ Кроме того

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial\theta}=\dfrac{\partial X}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta}+\dfrac{\partial X}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial\theta}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial\theta}=\dfrac{\partial Y}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta}+\dfrac{\partial Y}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial\theta}. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Вдоль AB $\begin{cases} \sigma_n=0, \\ \tau_n=0, \end{cases}$ следовательно, $\theta-\varphi=\frac{3\pi}{4}$, а из условия пластичности следует постоянство $\sigma=\pm k=const$. (Действительно, $(\sigma_n-\sigma_t)^2+4\tau_n^2=4k^2\Rightarrow\sigma_t^2=4k^2\Rightarrow\sigma_t=\pm 2k$, а так как $\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_n+\sigma_t)=\frac{1}{2}(0\pm 2k)$, то $\sigma=\pm k= =const$).

Тогда $\begin{cases} \theta=\alpha+\beta, \\ \sigma=2k(\beta-\alpha)+\sigma_A, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha+\beta=\theta, \\ \beta-\alpha=\frac{\sigma-\sigma_A}{2k}=0. \end{cases}$

Вдоль AB $\alpha=\beta=\frac{\theta}{2}$, то есть в плоскости $(\alpha;\beta)$ линия AB представляет собой прямую $\beta=\alpha$ (рис. 2), причем, поскольку $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, то $\begin{cases} -\frac{\pi}{8}\le\alpha\le\frac{\pi}{8} \\ -\frac{\pi}{8}\le\beta\le\frac{\pi}{8}. \end{cases}$ Вернемся к (2). Так как $\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}=\frac{\partial\beta}{\partial\theta}=\frac{1}{2}$, то, чтобы найти $\frac{\partial X}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial Y}{\partial\beta}$ вдоль AB, положим $\begin{cases} 0=\frac{\partial X}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}, \\ 0=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial Y}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{\partial Y}{\partial\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Итак, вдоль AB:

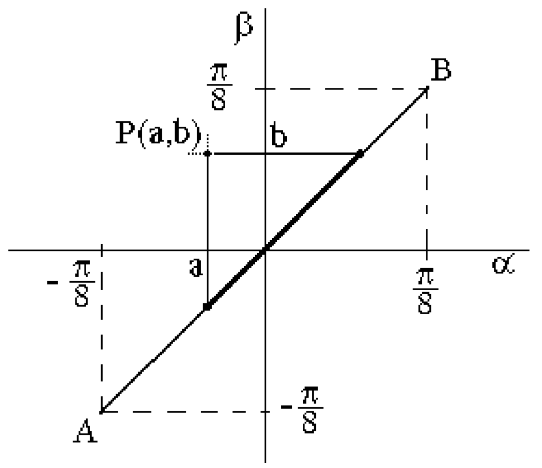


Рис. 2. Отображение физической плоскости в плоскость характеристик ($\alpha\beta$), трение отсутствует

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{\partial X}{\partial \beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

$$G(a,b,\alpha,\beta) = J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}\right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(b-\beta);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(a-\alpha),$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка.

4. $X_P = \frac{1}{2}(X_a + X_b) - \frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left\{\left(G\frac{\partial X}{\partial \alpha} - X\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)d\alpha + \right.$ $\left. + \left(X\frac{\partial G}{\partial \beta} - G\frac{\partial X}{\partial \beta}\right)d\beta\right\}.$

$$X_P = X(a,b) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - $$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left\{\begin{aligned} &\left(J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \\ &\left. -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(b-\beta)\right)d\alpha + \\ &+\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(a-\alpha) - \right. \\ &\left. -J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)d\beta \end{aligned}\right\}$$

$$X_P =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}))(d\alpha + d\beta) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(-(b-\beta)d\alpha + (a-\alpha)d\beta).\right.$$

5. Перейдем от криволинейного интеграла второго рода к определенному интегралу Римана [8]. Если y=y(x), координатный способ задания кривой интегрирования K, то

$$\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{x0}^{x1} P(x,y(x))dx + Q(x,y(x))\frac{dy}{dx}dx.$$

Тогда

$$X_P = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_a^b 2J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})d\alpha -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_a^b \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)}}(a-b)d\alpha,$$

$$X_P = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_a^b J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})d\alpha -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}(a-b)\int\limits_a^b \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)}}d\alpha,$$

$$X(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot Int1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(a-b)\cdot Int2,$$

где

$$Int1 = \int\limits_a^b J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})d\alpha =$$

$$= sh(b-a) = -sh(a-b),$$

$$Int2 = \int\limits_a^b \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)}}d\alpha = \frac{2-2ch(a-b)}{(a-b)},$$

(вычисление см. ниже).

6. Вычислим $Int1$ и $Int2$. Для этого воспользуемся следующей заменой:

$$\alpha = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\sin(y), \quad \alpha = a \to y = -\frac{\pi}{2},$$

$$d\alpha = \frac{b-a}{2}\cos(y)dy, \quad \alpha = b \to y = \frac{\pi}{2},$$

$$a-\alpha = \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2}\sin(y) = \frac{a-b}{2}(1+\sin(y)),$$

$$b-\alpha = \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2}\sin(y) = \frac{b-a}{2}(1-\sin(y)),$$

$$(a-\alpha)(b-\alpha) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^2(1-\sin^2(y)) =$$

$$= -\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cos^2(y),$$

$$Int1 = \int\limits_a^b J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})d\alpha =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_0\left(2i\frac{b-a}{2}\cos(y)\right)\frac{b-a}{2}\cos(y)dy =$$

$$= \frac{b-a}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_0(i(b-a)\cos(y))\cos(y)dy = \{\text{в силу четности подинтегрального выражения}\}$$

$$= (b-a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(i(b-a)\cos(y))\cos(y)dy =$$

$$\{\text{т.к. } J_0(iz) = I_0(z)\}$$

$$= (b-a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} I_0((b-a)\cos(y))\cos(y)dy.$$

Введем еще одну замену:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - t, \\ \cos(y) = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t), \\ dy = dt, \end{cases} \begin{cases} y = 0 \to t = -\frac{\pi}{2}, \\ y = \frac{\pi}{2} \to t = 0. \end{cases}$$

$$Int1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} I_0((b-a)\sin(t))(b-a)\sin(t)(-dt) =$$

$$= (b-a)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} I_0((b-a)\sin(t))\sin(t)dt = sh(b-a).$$

Подсчитаем $Int2$:

$$Int2 = \int_{a}^{b} \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)}} d\alpha =$$

$$\left\{\text{замена аналогична} : \alpha = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\sin(y)\right\}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{J_1(i(b-a)\cos(y))}{i\frac{b-a}{2}\cos(y)} \frac{b-a}{2}\cos(y)dy =$$

$$= \left\{\text{так как} \quad J_1(iz) = iI_1(z)\right\}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_1((b-a)\cos(y))dy = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} I_1((b-a)\cos(y))dy =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} I_1((b-a)\sin(t))dt = \frac{2-2ch(a-b)}{a-b}.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$X(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-sh(a-b)) - \frac{\sqrt{2}}{4}(a-b)\frac{2-2ch(a-b)}{a-b},$$

$$X(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(ch(a-b) - sh(a-b)),$$

$$X(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{(b-a)}.$$

7. Для переменной Y=Y(a,b) формула идентична:

$$Y_P = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{ab}\left\{\left(G\frac{\partial Y}{\partial \alpha} - Y\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)d\alpha + \left(Y\frac{\partial G}{\partial \beta} - G\frac{\partial Y}{\partial \beta}\right)d\beta\right\},$$

$$Y(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{(b-a)}.$$

8. Получим параметрические уравнения характеристик $\begin{cases} x = x(a,b), \\ y = y(a,b), \end{cases}$ в плоскости xOy:

$$\begin{cases} x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta) = e^{(b-a)}\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \\ \quad = e^{(b-a)}\cos(a + b + \frac{\pi}{4}), \\ y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta) = e^{(b-a)}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \\ \quad = e^{(b-a)}\sin(a + b + \frac{\pi}{4}). \end{cases} \quad (3)$$

Так как $\theta = a + b$, то для четверти окружности: $-\frac{\pi}{8} \le a \le \frac{\pi}{8}$; $-\frac{\pi}{8} \le b \le \frac{\pi}{8}$. Тогда кривые, ограничивающие область существования решения задачи Коши с границей в виде четверти окружности имеют вид:

$$\alpha\text{-линия:} \begin{cases} x(a) = e^{(\frac{\pi}{8} - a)}\cos(a + \frac{3\pi}{8}), \\ y(a) = e^{(\frac{\pi}{8} - a)}\sin(a + \frac{3\pi}{8}), \\ -\frac{\pi}{8} \le a \le \frac{\pi}{8}, \end{cases}$$

$$\beta\text{-линия:} \begin{cases} x(b) = e^{(b + \frac{\pi}{8})}\cos(b + \frac{\pi}{8}), \\ y(b) = e^{(b + \frac{\pi}{8})}\sin(b + \frac{\pi}{8}), \\ -\frac{\pi}{8} \le b \le \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Уравнения линий скольжения, в случае если граница представляет собой часть окружности $t_0 \le t \le t_1$ радиуса R с центром в точке (x_0, y_0), имеют следующий параметрический вид:

$$\begin{cases} x = x(a,b) = x_0 + R\cdot e^{(b-a)}\cos(a + b + \frac{\pi}{4}), \\ \frac{t_0}{2} - \frac{\pi}{8} \le a \le \frac{t_1}{2} - \frac{\pi}{8} \\ y = y(a,b) = y_0 + R\cdot e^{(b-a)}\sin(a + b + \frac{\pi}{4}), \\ \frac{t_0}{2} - \frac{\pi}{8} \le b \le \frac{t_1}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С УЧЁТОМ ТРЕНИЯ

Решим предыдущую задачу считая, что вдоль кривой AB действуют постоянные касательные напряжения τ_n. Следуя [5], [7] примем $\tau_n = k\sin(2\delta)$, $|\delta| \le \frac{\pi}{4}$, если $\delta > 0$, то сила трения направлена против часовой стрелки, при $\delta < 0$ – по часовой. Используя формулу $\tau_n = k\cos(2(\theta - \varphi))$ найдем параметрические уравнения кривой AB в зависимости от угла θ, где θ — угол подхода α-линии к оси Ox, φ — угол между нормалью к границе $\overline{n}$ и осью Ox. Угол $(\theta - \varphi)$ — угол между α-линией и внешней нормалью к границе (рис. 3).

Решим уравнение

$$k\sin(2\delta) = k\cos(2(\theta - \varphi)).$$

$$\sin(2\delta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2(\theta - \varphi)\right).$$

$$2\sin\left(\frac{2\delta - \frac{\pi}{2} + 2(\theta - \varphi)}{2}\right)\cos\left(\frac{2\delta + \frac{\pi}{2} - 2(\theta - \varphi)}{2}\right) = 0.$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin\left(\delta - \frac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right) = 0 \\ &\cos\left(\delta + \frac{\pi}{4} - \theta + \varphi\right) = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\left(\delta - \frac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right) = \pi n \ \ n \in Z, \\ &\left(\delta + \frac{\pi}{4} - \theta + \varphi\right) = \frac{\pi}{2} + \pi m \ \ m \in Z \end{aligned}\right.$$

$$\theta - \varphi = \frac{3\pi}{4} + \delta \quad \text{при } m = -1.$$

1. Дуга AB $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} t - \varphi = \pi, \\ \varphi = \theta - \frac{3\pi}{4} - \delta \end{cases}$ $t = \frac{\pi}{4} + \theta - \delta.$

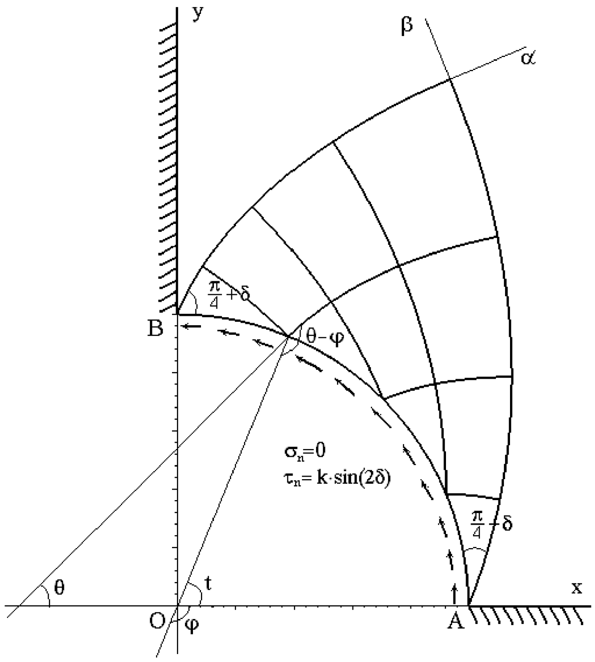


Рис. 3. Сетка линий скольжения, построенная на части AB окружности, при наличии постоянного трения

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \theta\right) \\ y(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \theta\right) \\ -\frac{\pi}{4} + \delta \le \theta \le \frac{\pi}{4} + \delta \end{cases}$$ —это параметрические уравнения кривой AB.

$$2.\begin{cases} X = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \\ = \cos(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta)\cos(\theta) + \sin(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta)\sin(\theta), \\ Y = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) = \\ = -\cos(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta)\sin(\theta) + \sin(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta)\cos(\theta). \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \cos(\frac{\pi}{4} - \delta), \\ Y = \sin(\frac{\pi}{4} - \delta). \end{cases}$$

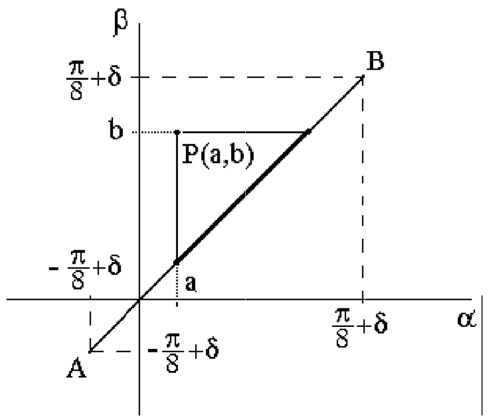


Рис. 4. Отображение физической плоскости в плоскость характеристик ($\alpha\beta$), при наличии постоянного трения

Из соотношений Генки имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \beta} = Y = \sin(\frac{\pi}{4} - \delta), \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -X = -\cos(\frac{\pi}{4} - \delta). \end{cases}$$

3. Вдоль AB $\begin{cases} \sigma_n = 0, \\ \tau_n = k\sin(2\delta) = const, \end{cases} \Rightarrow \sigma_t = = const \Rightarrow \sigma = const$,
значит

$$\begin{cases} \theta = \alpha + \beta, \\ \sigma = 2k(\beta - \alpha) + \sigma_A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \theta, \\ \beta - \alpha = \frac{\sigma - \sigma_A}{2k} = 0, \end{cases}$$

$$\beta = \alpha = \frac{\theta}{2},$$

то есть в плоскости ($\alpha ; \beta$) линия AB представляет собой прямую $\beta = \alpha$, причем, поскольку $-\frac{\pi}{4} + \delta \le \theta \le \frac{\pi}{4} + \delta$, то $\begin{cases} -\frac{\pi}{8} + \frac{\delta}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{8} + \frac{\delta}{2}, \\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\delta}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{8} + \frac{\delta}{2} \end{cases}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \frac{\partial \beta}{\partial \theta} = \frac{1}{2}$ (рис. 4). Тогда из (2) имеем:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \delta), \\ 0 = -\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial Y}{\partial \beta}, \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\sin(\frac{\pi}{4} - \delta), \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \cos(\frac{\pi}{4} - \delta). \end{cases}$$

Окончательно вдоль AB получим:

$$\begin{cases} X = \cos(\frac{\pi}{4} - \delta), \\ Y = \sin(\frac{\pi}{4} - \delta), \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\sin(\frac{\pi}{4} - \delta), \\ \frac{\partial X}{\partial \beta} = \sin(\frac{\pi}{4} - \delta), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -\cos(\frac{\pi}{4} - \delta), \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \cos(\frac{\pi}{4} - \delta); \end{cases}$$

$$G(a, b, \alpha, \beta) = J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}\right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(b - \beta);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(a - \alpha).$$

$$4.\ X_P = \frac{1}{2}(X_a + X_b) - \frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left\{\left(G\frac{\partial X}{\partial \alpha} - X\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)d\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(X\frac{\partial G}{\partial \beta} - G\frac{\partial X}{\partial \beta}\right)d\beta\right\}.$$

$$X_P = X(a,b) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{ab}\left\{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})(-\sin(\frac{\pi}{4} - \delta)) - \\ -\cos(\frac{\pi}{4} - \delta)\frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(b - \beta) \end{pmatrix} d\alpha + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} - \delta)\frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(a - \alpha) - \\ -J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})\sin(\frac{\pi}{4} - \delta) \end{pmatrix} d\beta \end{aligned}\right\}.$$

$$X(a,b) = \cos(\tfrac{\pi}{4} - \delta) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{ab}(-\sin(\tfrac{\pi}{4} - \delta))(J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}))(d\alpha + d\beta) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{ab}\cos(\tfrac{\pi}{4} - \delta)\frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(-(b-\beta)d\alpha + (a-\alpha)d\beta).$$

5.

$$X(a,b)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)+$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\int_a^b J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)\int_a^b \frac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)}}(a-b)d\alpha.$$

Получим:

$$X(a,b)=\cos(\tfrac{\pi}{4}-\delta)+\sin(\tfrac{\pi}{4}-\delta)Int1-$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{4}-\delta)(a-b)Int2,$$

где

$$Int1=\int_a^b J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})d\alpha=$$
$$=sh(b-a)=-sh(a-b);$$

$$Int2=\int_a^b \tfrac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)}}d\alpha=\tfrac{2-2ch(a-b)}{(a-b)}.$$

6.

$$X(a,b)=\cos(\frac{\pi}{4}-\delta)+\sin(\frac{\pi}{4}-\delta)(-sh(a-b))-$$
$$-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\delta)(a-b)\frac{2-2ch(a-b)}{a-b}=$$
$$=\cos(\frac{\pi}{4}-\delta)-\sin(\frac{\pi}{4}-\delta)sh(a-b)-$$
$$-\cos(\frac{\pi}{4}-\delta)+\cos(\frac{\pi}{4}-\delta)sh(a-b).$$

$$X(a,b)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)ch(a-b)-$$
$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)sh(a-b).$$

7. Для $Y(a,b)$

$$Y_P=\tfrac{1}{2}(Y_a+Y_b)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\int_{ab}\left\{\left(G\tfrac{\partial Y}{\partial\alpha}-Y\tfrac{\partial G}{\partial\alpha}\right)d\alpha+\left(Y\tfrac{\partial G}{\partial\beta}-G\tfrac{\partial Y}{\partial\beta}\right)d\beta\right\}.$$

$$Y(a,b)=\sin(\tfrac{\pi}{4}-\delta)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\int_{ab}(-\cos(\tfrac{\pi}{4}-\delta))(J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})(d\alpha+d\beta)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\int_{ab}\sin(\tfrac{\pi}{4}-\delta)\tfrac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}}(-(b-\beta)d\alpha+(a-\alpha)d\beta).$$

$$Y(a,b)=\sin(\tfrac{\pi}{4}-\delta)+$$
$$+\cos(\tfrac{\pi}{4}-\delta)\int_a^b J_0(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})d\alpha-$$
$$-\tfrac{(a-b)}{2}\sin(\tfrac{\pi}{4}-\delta)\int_a^b \tfrac{J_1(2\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)})}{\sqrt{(a-\alpha)(b-\alpha)}}d\alpha.$$

$$Y(a,b)=\sin(\tfrac{\pi}{4}-\delta)+\cos(\tfrac{\pi}{4}-\delta)Int1-$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{4}-\delta)(a-b)Int2.$$

$$Y(a,b)=\sin(\frac{\pi}{4}-\delta)ch(a-b)-\cos(\frac{\pi}{4}-\delta)sh(a-b).$$

8. Запишем параметрические уравнения линий скольжения

$$\begin{cases} x=ch(a-b)\cos(\frac{\pi}{4}-\delta+a+b)-\\ -sh(a-b)\sin(\frac{\pi}{4}-\delta-a-b),\\ y=ch(a-b)\sin(\frac{\pi}{4}-\delta+a+b)-\\ -sh(a-b)\cos(\frac{\pi}{4}-\delta-a-b). \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что при $\delta=0$ формулы (4) совпадают с (3).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведём сравнение полученного решения с решением, предложенным в [5]. Для этого построим при одних и техже исходных данных сетку линий скольжения для четверти окружности, используя неявные уравнения представленные в [5] и формулы (4), полученные выше.

Решая уравнения характеристик записанные в неявном виде в полярной системе координат $r^2\pm\sqrt{r^4-m^2a^4}e^{2\theta+\arcsin(m)a^2/r^2}=const$ при $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a=1$, получим для первой четверти следующее изображение (Рис. 5) (левый рисунок).

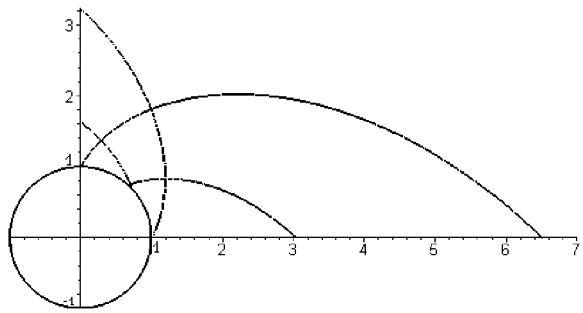
Используя формулы (4) при $\delta=\frac{\pi}{8}$ с помощью Maple 8, построим характеристики с четверти окружности (рис. 5) (правый рисунок). Более жирные линии ограничивают область существования решения рассмотренной задачи.

Таким образом, наглядно можно видеть практически полное совпадение результатов. Однако преимущество формул (4) и удобство работы с ними, применительно к практически важным задачам, неоспоримо. Заметим также, что совпадение формул (4) и (3) при $\delta=0$ лишний раз свидетельствует о достоверности полученных результатов. Когда трение уменьшается, линии скольжения постепенно "переходят" в логарифмические спирали.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М.Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.

2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. — М. : Наука, 1956. — 408 с.



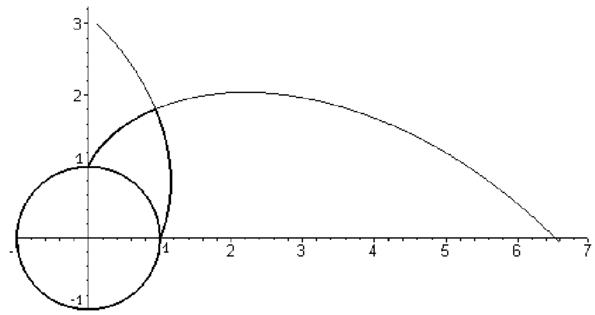


Рис. 5. Левый рисунок — линии скольжения, найденные по неявным уравнениям, представленным в [5]. Правый рисунок — линии скольжения, определенные с помощью формул (4)

3. *Друянов Б.А.* Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин — М. : Машиностроение, 1990. — 272 с.

4. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н.Малинин. — М. : Машиностроение, 1968. — 400 с.

5. *Соколовский В.В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. — М. : Высш. шк., 1969. — 608 с.

6. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Наука, 1966. — 136 с.

7. *Ивлев Д.Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г.И.Быковцев. — М. : Наука, 1971. — 231 с.

8. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике : для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А.Семендяев. — М. : Наука, 1986. — 544 с.

9. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. М. : Наука, 1966. — 444 с.

Поступила в редакцию 7.09.2007