УДК 517.958:531.746.2:517.988.63

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ФОЙГТА В ОБЛАСТИ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СО ВРЕМЕНЕМ ГРАНИЦЕЙ*

В. Г. Звягин, М. В. Турбин

Воронежский государственный университет

В работе изучается разрешимость начально-краевой задачи для математической модели движения жидкости Фойгта в области с изменяющейся со временем границей. А именно, для данной начально-краевой задачи вводится понятие слабого решения и доказывается его существование и единственность.

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве задач гидродинамики изучается движение жидкости в областях с неподвижной границей. Однако, встречаются и такие ситуации (причём очень часто для неньютоновских сред), когда граница области, где течет жидкость, подвижна. Например, такая ситуация встречается в некоторых разновидностях подшипников, в которых внутренний вал не круглый и может перемещаться в плоскости подшипника, но без соприкосновения с внешним валом. Полость между внешним и внутренним валом в этом случае заполнена жидкостью или гелем и изучение движения этой среды представляет определённый интерес (см., например, [1]).

Для системы Навье–Стокса одной из первых работ в данном направлении была статья О. А. Ладыженской [2]. Отметим также работы [3]—[7], где изучалась разрешимость (в слабом и сильном смысле) начально-краевых задач для различных моделей движения как ньютоновских, так и неньютоновских сред в случае подвижной границы.

В настоящей работе изучается начально-краевая задача для модели движения жидкости Фойгта в случае подвижной границы. Модель движения жидкостей Фойгта описывает течение жидкостей, которым требуется время, для того чтобы начать движение под действием внезапно приложенной силы [8]. Разрешимость начально-краевых задач для этой модели в случае неподвижной границы исследована в [9]—[11]. Для исследования разрешимости этой задачи в случае подвижной границы в настоящей работе используется метод штрафа, предложенный Р. Курантом (см., например, [12]). Разрешимость (в слабом смысле) для данной начально-краевой задачи доказывается следующим образом. Вначале исходная задача сводится к начально-краевой задаче в области с постоянной границей для несколько более сложного уравнения. Далее рассматривается задача со штрафом, аппроксимирующая исходную. Затем на основе топологической степени и априорных оценок решений доказывается существование слабого решения этой аппроксимационной задачи и показывается, что из последовательности решений можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметров аппроксимации к нулю.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $h:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, n=2,3$ достаточно гладкая соленоидальная вектор-функция, $\Omega_0\subseteq\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ_0.

Семейство ограниченных областей $\Omega_t\in\mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma_t, t\in[0,T]$, определяется по траекториям векторного поля h, то есть

$$\Omega_t=\{z(t,x),x\in\Omega_0\},\quad \Gamma_t=\{z(t,x),x\in\Gamma_0\},$$

где $z(t,x)$ — решение задачи Коши

$$z(t,x)=x+\int_0^t h(s,z(s,x))ds,\quad x\in\Omega_0. \quad (1.1)$$

Поскольку, мы предположили, что векторное поле h достаточно гладко, то граница Γ_t будет также достаточно гладкой.

Положим

* Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00137

$$Q = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in \Omega_t\},$$
$$\Gamma = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in \Gamma_t\}.$$

Для системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = f \quad (t,x) \in Q, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} v = 0, (t,x) \in Q, \tag{1.3}$$

где $v(t,x) = (v_1, ..., v_n)$ — скорость жидкости в точке x в момент времени t, $p(t,x)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t, ν — кинематический коэффициент вязкости, а $\varkappa$ — время запаздывания (исходя из физического смысла задачи, будем считать, что $\nu, \varkappa > 0$), рассматриваются следующие начально-краевые условия

$$v(0,x) = h(0,x), \quad x \in \Omega_0, \tag{1.4}$$

$$v(t,x) = h(t,x), \quad (t,x) \in \Gamma. \tag{1.5}$$

Система (1.2)—(1.3) описывает движение жидкости Фойгта (см. [8]).

Для исследования задачи (1.2)—(1.5) сделаем замену $u = v - h$. Тогда задача (1.2)—(1.5) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} - -\varkappa \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \nu \Delta u + \operatorname{grad} p = g, \quad (t,x) \in Q, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div} u = 0, (t,x) \in Q, \tag{1.7}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega_0, \tag{1.8}$$

$$u \equiv 0, \quad (t,x) \in \Gamma. \tag{1.9}$$

Здесь $g = f - \frac{\partial h}{\partial t} - h_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + \varkappa \frac{\partial \Delta h}{\partial t} + \nu \Delta h.$

Обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega_t)^n$ — пространство функций на Ω_t со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω_t; V_t — замыкание множества соленоидальных функций $\{w \in \mathfrak{D}(\Omega_t)^n, \operatorname{div} w = 0\}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega_t)^n$.

Через V_t^* мы обозначим пространство сопряженное к пространству V_t, а через $\langle f, w \rangle_t$ — действие функционала $f \in V_t^*$ на элемент $w \in V_t$.

H_t — замыкание множества соленоидальных функций $\{w \in \mathfrak{D}(\Omega_t)^n, \operatorname{div} w = 0\}$ по норме пространства $L_2(\Omega_t)^n$.

Обозначим через D множество соленоидальных функций класса C^∞, определенных на Q, со значениями в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем содержащимся в Ω_t для каждого $t \in [0,T]$.

Через Y_C^1, Y_C мы обозначим замыкание множества D по норме

$$\|u\|_{Y_C^1} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{V_t}, \ \|u\|_{Y_C} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H_t}$$

соответственно.

$Y_{L_2}^1$ — замыкание множества D по норме

$$\|u\|_{Y_{L_2}^1} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{V_t}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Y_{L_2} — замыкание множества D по норме

$$\|u\|_{Y_{L_2}} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H_t}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$Y_{L_\infty}^1$ — замыкание множества D по норме

$$\|u\|_{Y_{L_\infty}^1} = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{V_t}.$$

В [7] было показано, что функция $v \in Y_{L_2}^1$ принадлежит пространству V_t для почти всех $t \in (0,T)$, то есть $v(t,\cdot) \in V_t$ для почти всех $t \in (0,T)$. Также было показано, что сопряженное к пространству $Y_{L_2}^1$ пространство $(Y_{L_2}^1)^*$ может быть получено как замыкание множества D по норме

$$\|u\|_{(Y_{L_2}^1)^*} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{V_t^*}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функция $v \in (Y_{L_2}^1)^*$ при почти всех $t \in (0,T)$ принадлежит пространству V_t^*, то есть $v(t,\cdot) \in V_t^*$.

Пусть $\hat{\Omega}_0 = \bigcup_{t\in[0,T]} \Omega_t$. Обозначим через $\tilde{V}$ подпространство соленоидальных вектор-функций пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\hat{\Omega}_0)^n$ и заметим, что если функция w принимает при $t \in [0,T]$ значение в функциональном пространстве V_t, то ее можно продолжить нулем до функции, принимающей значение в пространстве $\tilde{V}$. Продолженную таким образом функцию мы будем обозначать $\tilde{w}$.

Пусть $\tilde{H}$ — замыкание $\tilde{V}$ по норме пространства $L_2(\hat{\Omega}_0)^n$.

Через $\tilde{Y}_C^1$ мы обозначим пространство функций из Y_C^1, продолженных нулем до функции из $C([0,T], \tilde{V})$. Данное пространство является подпространством $C([0,T], \tilde{V})$.

$\tilde{Y}_{L_2}$ — пространство функций из Y_{L_2}, продолженных нулем до функции из $L_2(0,T;\tilde{H})$.

$\tilde{Y}_{L_\infty}^1$ — пространство функций из Y_{L_∞}, продолженных нулем до функции из $L_\infty(0,T;\tilde{V})$.

Обозначим через $\tilde{Y}^1_{L_2}$ пространство функций из $Y^1_{L_2}$, продолженных нулем до функции из $L_2(0,T;\tilde{V})$. Данное пространство является подпространством $L_2(0,T;\tilde{V})$. Важно отметить, что пространство $\tilde{Y}^1_{L_2}$ можно определить и другим образом, следуя [12], а именно это пространство функций, измеримых на Q, принимающих при почти всех $t \in (0,T)$ значение $u(t) \in V_t$ и таких, что $\tilde{u} \in L_2(0,T;\tilde{V})$.

$(\tilde{Y}^1_{L_2})^*$ — пространство функционалов из $(Y^1_{L_2})^*$, продолженных нулем до функционала из $L_2(0,T;\tilde{V}^*)$. Отметим, что мы имеем естественное вложение $L_2(0,T;\tilde{V}^*) \subset (\tilde{Y}^1_{L_2})^*$.

Введём ещё два пространства, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$E_1 = \{v : v \in Y^1_C, v' \in Y^1_{L_2}\}$$
с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{Y^1_C} + \|v'\|_{Y^1_{L_2}}$;

$$\tilde{E}_1 = \{v : v \in \tilde{Y}_C, v' \in \tilde{Y}^1_{L_2}\}$$
с нормой $\|v\|_{\tilde{E}_1} = \|v\|_{\tilde{Y}_C} + \|v'\|_{\tilde{Y}^1_{L_2}}$.

Очевидно, что для функции $v \in E_1$ выполнено равенство $\|v\|_{E_1} = \|\tilde{v}\|_{\tilde{E}_1}$.

Пусть $f \in Y_{L_2}$. Тогда, в силу достаточной гладкости функции h, функция $g \in Y_{L_2}$.

Определение 1.1. *Слабым решением начально-краевой задачи (1.6)—(1.9) называется функция $u \in E_1$, удовлетворяющая при почти всех $t \in (0,T)$ для любого $\varphi \in Y^1_{L_2}$ равенству*

$$\int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dx + \nu\int\limits_{\Omega_t} \nabla u : \nabla\varphi dx - \int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx -$$
$$-\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n h_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n u_i h_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx + \tag{1.10}$$
$$+\varkappa\int\limits_{\Omega_t}\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega_t} g\varphi dx$$

и начальному условию

$$u(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0. \tag{1.11}$$

Здесь $\nabla u : \nabla \varphi$, $u = (u_1,...,u_n)$, $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_n)$ обозначает покомпонентное умножение матриц, определяемое равенством $\nabla u : \nabla\varphi = \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$.

$\tilde{g}$ — продолжение g нулем на $\hat{Q}_0$. В силу того, что $g \in Y_{L_2}$, получим, что $g \in \tilde{Y}_{L_2}$.

В силу данных выше определений пространств можно дать следующее эквивалентное определение слабого решения:

Определение 1.2. *Слабым решением начально-краевой задачи (1.6)—(1.9) называется функция $u \in \tilde{E}_1$, удовлетворяющая при почти всех $t \in (0,T)$ для любого $\varphi \in \tilde{Y}^1_{L_2}$ равенству*

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dx + \nu\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla u : \nabla\varphi dx - \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^n u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx -$$
$$-\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^n h_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^n u_i h_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx + \tag{1.12}$$
$$+\varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx = \int\limits_{\hat{\Omega}_0} g\varphi dx$$

и начальному условию

$$u(0,x) = 0, \quad x \in \hat{\Omega}_0. \tag{1.13}$$

В самом деле, из определения пространств E_1 и $\tilde{E}_1$ видно, что если есть слабое решение в смысле первого определения, то оно удовлетворяет второму определению и наоборот.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1.1. *Существует единственное слабое решение начально-краевой задачи (1.6)—(1.9).*

2. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА И ЕЁ ОПЕРАТОРНАЯ ТРАКТОВКА

Для доказательства теоремы 1.1 введём некоторые аппроксимации и функцию штрафа. На первом этапе доказательства теоремы 1.1 рассмотрим вспомогательную аппроксимационную задачу и дадим её операторную трактовку.

Пусть функция $w \in C([0,T],\tilde{V})$. Продолжим ее на отрезок $[-\delta,0]$, а именно мы будем считать, что $w(t) \equiv w(0)$ при $t < 0$. Полученная таким образом функция $w \in C([-\delta,T],\tilde{V})$ и $\|w\|_{C([-\delta,T],\tilde{V})} = \|w\|_{C([0,T],\tilde{V})}$. Учитывая это, определим для $w \in C([0,T],\tilde{V})$ функцию $R_\delta(w) \in C^1([0,T],\tilde{V})$ по формуле

$$R_\delta(w)(t) = \frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^t w(s)ds, \quad 0 < \delta < T.$$

Пусть $\hat{Q}_0 = [0,T]\times\hat{\Omega}_0$ и пусть $M \in L_\infty(\hat{Q}_0)$ — функция штрафа такая, что

$$M(t,x) = \begin{cases} 0, & (t,x) \in Q \\ 1, & (t,x) \in \hat{Q}_0 \setminus Q. \end{cases}$$

Рассмотрим в цилиндре $\hat{Q}_0$ следующую аппроксимационную систему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^n \left(R_\delta(u)\right)_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} +$$
$$+\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial h}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \operatorname{grad} p + \frac{1}{\varepsilon}Mu = \tilde{g}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, (t,x) \in \hat{Q}_0. \tag{2.2}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Для системы (14),(15) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным условием

$$u\,|_{t=0} = 0, \quad x \in \hat{\Omega}_0, \tag{2.3}$$

и граничным условием

$$u\,|_{[0,T]\times\partial\hat{\Omega}_0} = 0. \tag{2.4}$$

Определение 2.1. *Слабым решением начально-краевой задачи (2.1)—(2.4) называется функция* $u \in E_2 = \{u : u \in C([0,T],\tilde{V}), u' \in L_2(0,T;\tilde{V})\}$, *удовлетворяющая при почти всех* $t \in (0,T)$ *и для любого* $\varphi \in \tilde{V}$ *равенству*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dx + \nu\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla u : \nabla\varphi dx - \\ -\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left(R_\delta(u)\right)_i u_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n} h_i u_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \\ -\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n} u_i h_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx + \\ +\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\hat{\Omega}_0} Mu\varphi dx = \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\tilde{g}\varphi dx\end{gathered} \tag{2.5}$$

и начальному условию

$$u(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0. \tag{2.6}$$

Введём операторы:

$$A : \tilde{V} \to \tilde{V}^*, \langle Aw,\varphi\rangle = \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla w : \nabla\varphi dx,\ w,\varphi \in \tilde{V};$$

$$B_1 : L_4(\hat{\Omega}_0)^n \to \tilde{V}^*, \langle B_1(w),\varphi\rangle =$$

$$= \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left(R_\delta(w)\right)_i w_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx, w \in L_4(\hat{\Omega}_0)^n, \varphi \in \tilde{V};$$

$$B_2 : L_2(\hat{\Omega}_0)^n \to \tilde{V}^*, \langle B_2 w,\varphi\rangle = \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n} h_i w_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,$$

$$w \in L_2(\hat{\Omega}_0)^n, \varphi \in \tilde{V};$$

$$B_3 : L_2(\hat{\Omega}_0)^n \to \tilde{V}^*, \langle B_3 w,\varphi\rangle = \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n} w_i h_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,$$

$$w \in L_2(\hat{\Omega}_0)^n, \varphi \in \tilde{V};$$

$$N : L_2(\hat{\Omega}_0)^n \to L_2(\hat{\Omega}_0)^n, \langle Nw,\varphi\rangle = \int\limits_{\hat{\Omega}_0} Mw\varphi dx,$$

$$w \in L_2(\hat{\Omega}_0)^n, \varphi \in \tilde{V};$$

$$J : \tilde{V} \to \tilde{V}^*, \langle Jw,\varphi\rangle = \int\limits_{\hat{\Omega}_0} w\varphi dx,\ w,\varphi \in \tilde{V}.$$

Тогда равенство (2.5) при почти всех $t \in (0,T)$ можно переписать в виде

$$\langle(\varkappa A + J)u',\varphi\rangle + \langle\nu Au,\varphi\rangle - \langle B_1(u),\varphi\rangle - \langle B_2 u,\varphi\rangle - \\ - \langle B_3 u,\varphi\rangle + \left\langle\frac{1}{\varepsilon}Nu,\varphi\right\rangle = \langle\tilde{g},\varphi\rangle.$$

Поскольку в последнем равенстве функция $\varphi \in \tilde{V}$ произвольна, то оно эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\begin{gathered}(\varkappa A + J)u' + \nu Au - B_1(u) - \\ -B_2 u - B_3 u + \frac{1}{\varepsilon}Nu = \tilde{g}.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Итак, слабое решение задачи (2.1)—(2.4) — это решение операторного уравнения (2.7), удовлетворяющее начальному условию (2.6).

Введём следующие обозначения:

$$\begin{gathered}L : E_2 \to L_2(0,T;\tilde{V}^*)\times\tilde{V}, \\ L(w) = ((\varkappa A + I)w' + \nu Aw, w\,|_{t=0}); \\ K : E_2 \to L_2(0,T;\tilde{V}^*)\times\tilde{V}, \\ K(w) = (B_1(w) - B_2 w - B_3 w + \frac{1}{\varepsilon}Nw, 0).\end{gathered}$$

Тогда задача существования слабого решения аппроксимационной задачи эквивалентна задаче о разрешимости следующего операторного уравнения:

$$L(u) - K(u) = (\tilde{g}, 0). \tag{2.8}$$

Чтобы не нагромождать обозначения, мы используем одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах, но определённых одной и той же формулой. Например, в нижеследующей лемме A — это оператор, действующий и из $\tilde{V}$ в $\tilde{V}^*$, и из $L_2(0,T;\tilde{V})$ в $L_2(0,T;\tilde{V}^*)$.

Лемма 2.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $A : \tilde{V} \to \tilde{V}^*$ — непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{\tilde{V}} \le \|u\|_{\tilde{V}^*}. \tag{2.9}$$

b) Для любой $u \in L_2(0,T;\tilde{V})$ значение $Au \in L_2(0,T;\tilde{V}^*)$ и оператор $A : L_2(0,T;\tilde{V}) \to$ $\to L_2(0,T;\tilde{V}^*)$ — непрерывен.

c) Для любой $u \in C([0,T],\tilde{V})$ значение $Au \in L_2(0,T;\tilde{V}^*)$, оператор $A : C([0,T],\tilde{V}) \to$ $\to L_2(0,T;\tilde{V}^*)$ — непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Au\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} \le C_0\|u\|_{C([0,T],\tilde{V})}. \tag{2.10}$$

Лемма 2.2. *Для оператора $\varkappa A + J$ имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $A + J : \tilde{V} \to \tilde{V}^*$ — непрерывен, сильно монотонен, то есть для любых $u, w \in \tilde{V}$ имеет место следующее неравенство

$$\left\langle (\varkappa A + J)u - (A+J)w, u-w \right\rangle \geq \varkappa \|u-w\|^2_{\tilde V} \quad (2.11)$$

и для него имеют место оценки:

$$\varkappa \|u\|_{\tilde V} \leq \|(\varkappa A + J)u\|_{\tilde V^*} \leq (\varkappa + C_1^2)\|u\|_{\tilde V}. \quad (2.12)$$

b) Для любой $u \in L_2(0,T;\tilde V)$ значение $(\varkappa A + J)u \in L_2(0,T;\tilde V^*)$, оператор $(\varkappa A + J)$: $: L_2(0,T;\tilde V) \to L_2(0,T;\tilde V^*)$ — непрерывен и для него имеют место оценки:

$$\varkappa \|u\|_{L_2(0,T;\tilde V)} \leq \|(\varkappa A + J)u\|_{L_2(0,T;\tilde V^*)} \leq \leq (\varkappa + C_1^2)\|u\|_{L_2(0,T;\tilde V)} \quad (2.13)$$

Доказательство: Доказательство этих лемм следует из определений соответствующих операторов. □

Лемма 2.3. *Для отображения B_1 имеют место следующие свойства:*

a) Отображение $B_1 : L_4(\hat\Omega_0)^n \to \tilde V^*$ — непрерывно.

b) Для любой $u \in C([0,T], L_4(\hat\Omega_0)^n)$ значение $B_1(u) \in L_2(0,T;\tilde V^*)$ и отображение $B_1 : C([0,T], L_4(\hat\Omega_0)^n) \to L_2(0,T;\tilde V^*)$ — непрерывно.

c) Для любой $u \in E_2$ значение $B_1(u) \in$ $\in L_2(0,T;\tilde V^*)$, отображение $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;\tilde V^*)$ — вполне непрерывно и для него имеет место оценка:

$$\|B_1(u)\|_{L_2(0,T;\tilde V^*)} \leq C_2 \|u\|^2_{C([0,T],\tilde V)}. \quad (2.14)$$

Доказательство: Доказательство пунктов *a*, *b* и оценки (2.14) аналогично доказательству подобных утверждений для конвективного члена в задача Навье—Стокса (см., например, [13]). Что касается вполне непрерывности оператора $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;\tilde V^*)$, то здесь мы воспользуемся следствием 4 из теоремы 5 из [14]. Приведем ее формулировку, используя обозначения из [14].

Следствие 4. (см. [14]) *Пусть X, B, Y — банаховы пространства. Предполагается, что они удовлетворяют следующему условию:*

$$X \subset B \subset Y,$$

где вложения непрерывны, а вложение $X \to B$ компактно. Пусть, далее, $T > 0$ — фиксированное конечное число и r — число, $r > 1$.

Рассмотрим пространство $Z = \{v : v \in$ $\in L_\infty(0,T;X); v' \in L_r(0,T;Y)\}$ с нормой $\|v\|_Y =$ $= \|v\|_{L_\infty(0,T;X)} + \|v'\|_{L_r(0,T;Y)}$.

При перечисленных предположениях вложение Z в $C([0,T],B)$ — компактно.

В нашем случае

$$X = \tilde V,\ B = L_4(\hat\Omega_0)^n,\ Y = L_2(\hat\Omega_0)^n,\ r = 2,$$

$$Z = \{v : v \in L_\infty(0,T;\tilde V); v' \in L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)\}.$$

Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $\tilde V \subset L_4(\hat\Omega_0)^n$, то выполнены все условия следствия 4 и из него вытекает компактность вложения Z в $C([0,T], L_4(\hat\Omega_0)^n)$. Далее $E_2 \subset Z$, причем вложение непрерывно. Из пункта *(b)* этой леммы мы имеем, что отображение $B_1 : C([0,T], L_4(\hat\Omega_0)^n) \to$ $\to L_2(0,T;\tilde V^*)$ — непрерывно.

Таким образом получили

$$E_2 \subset Z \subset C([0,T], L_4(\hat\Omega_0)^n) \xrightarrow{B_1} L_2(0,T;\tilde V^*),$$

где первое вложение непрерывно, второе вложение — вполне непрерывно, а отображение B_1 — непрерывно. В итоге получим, что отображение $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;\tilde V^*)$ — вполне непрерывно. □

Лемма 2.4. *Для отображений B_2 и B_3 имеют место следующие свойства:*

Для $i = 2,3$ отображение $B_i : L_2(\hat\Omega_0)^n \to \tilde V^*$ — непрерывно.

Для $i = 2,3$ и для любой функции $u \in C([0,T], L_2(\hat\Omega_0)^n)$ функция $B_i u \in L_2(0,T;\tilde V^*)$ и оператор $B_i : C([0,T], L_4(\hat\Omega_0)^n) \to L_2(0,T;\tilde V^*)$ — непрерывен.

Для $i = 2,3$ и для любой функции $u \in E_2$ функция $B_i u \in L_2(0,T;\tilde V^*)$ и оператор $B_i : E_2 \to$ $\to L_2(0,T;\tilde V^*)$ — вполне непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|B_i u\|_{L_2(0,T;\tilde V^*)} \leq C_3 \|u\|_{C([0,T],\tilde V)}. \quad (2.15)$$

Доказательство:. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.3. □

Лемма 2.5. *Для отображения N имеют место следующие свойства:*

a) Отображение $N : L_2(\hat\Omega_0)^n \to L_2(\hat\Omega_0)^n$ — непрерывно.

b) Для любой функции $u \in L_2([0,T], L_2(\hat\Omega_0)^n)$ функция $Nu \in L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)$ и оператор $N : L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n) \to L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)$ — непрерывен.

c) Для любой функции $u \in E_2$ функция $Nu \in L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)$, оператор $N : E_2 \to$ $\to L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)$ — вполне непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Nu\|_{L_2(0,T;\tilde V^*)} \leq C_4 \|u\|_{C([0,T],\tilde V)}. \quad (2.16)$$

Доказательство: *a)* Пусть $u \in L_2(\hat\Omega_0)^n$. Оператор N — линейный, поэтому достаточно показать его ограниченность:

$$\left|\langle Nu, \varphi \rangle\right| = \left|\int\limits_{\hat{\Omega}_0} Mw\varphi dx\right| \le \sup_{(t,x)\in\hat{Q}_0} M(t,x) \left|\int\limits_{\hat{\Omega}_0} w\varphi dx\right| \le$$
$$\le \|u\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n} \|\varphi\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n}.$$

Отсюда следует, что

$$\|Nu\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n} \le \|u\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n}. \qquad (2.17)$$

Таким образом и получаем непрерывность линейного отображения $N : L_2(\hat{\Omega}_0)^n \to L_2(\hat{\Omega}_0)^n$.

b) Пусть $u \in L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n)$. В силу оценки (2.17) при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место следующее неравенство

$$\|Nu(t)\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n} \le \|u(t)\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T.

$$\int\limits_0^T \|Nu(t)\|^2_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n}\, dt \le \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n}\, dt = \|u\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)}.$$

Следовательно, $\|Nu(t)\|^2_{L_2(\hat{\Omega}_0)^n} \in L_2(0,T)$. Таким образом $Nu \in L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n)$ и для него имеет место оценка

$$\|Nu\|_{L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)} \le \|u\|_{L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)}. \qquad (2.18)$$

В итоге в силу линейности оператор $N : L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n) \to L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n)$ — непрерывен.

c) Как уже отмечалось, вложение $E_2 \subset C([0,T], L_4(\hat{\Omega}_0)^n)$ — вполне непрерывно (пункт *(c)* леммы 2.3). Тогда из непрерывности вложения $C([0,T], L_4(\hat{\Omega}_0)^n) \subset L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n)$ получим вполне непрерывное вложение $E_2 \subset L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n)$.

Таким образом имеем

$$E_2 \subset L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n) \xrightarrow{N} L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n) \subset$$
$$\subset L_2(0,T; \tilde{V}^*).$$

Здесь первое вложение — вполне непрерывно, отображение N — непрерывно (пункт *(b)*) этой леммы, а последнее вложение непрерывно. В итоге получим, что отображение $N : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*)$ — вполне непрерывно.

Требуемая оценка (2.16) следует из неравенства (2.18) и непрерывных вложений $C([0,T], \tilde{V}) \subset \subset L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n)$ и $L_2(0,T; L_2(\hat{\Omega}_0)^n) \subset L_2(0,T; \tilde{V}^*)$.
□

Лемма 2.6. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства:*

a) Оператор $L : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*) \times \tilde{V}$ — обратим и обратный оператор непрерывен.

b) Оператор $K : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*) \times \tilde{V}$ — вполне непрерывен.

Доказательство: a) Обратимость оператора L и непрерывность обратного оператора следуют из теоремы 2.3 из [15] (с. 205).

b) Вполне непрерывность оператора $K : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*) \times \tilde{V}, K(w) = (B_1(w) - B_2 w - - B_3 w + \frac{1}{\varepsilon} Nw, 0)$ следует из вполне непрерывности операторов

$$B_1 : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*),$$
$$B_2 : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*),$$
$$B_3 : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*),$$
$$N : E_2 \to L_2(0,T; \tilde{V}^*).$$

□

3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В этом пункте мы получим априорную оценку для решений операторного уравнения (2.8). А точнее мы получим априорную оценку для следующего семейства операторных уравнений

$$L(u) - \lambda K(u) = \lambda(\tilde{g}, 0), \quad \text{где } \lambda \in [0,1], \qquad (3.1)$$

которое при $\lambda = 1$ совпадает с операторным уравнением (2.8).

Теорема 3.1. *Если $u \in E_2$ — решение операторного уравнения (3.1) для некоторого λ, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\|u\|^2_{C([0,T],\tilde{V})} \le C_6, \qquad (3.2)$$

где $C_6 = \frac{\|\tilde{g}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)}}{\varkappa} e^{\frac{TC_2^2 + 2TC_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat{\Omega}_0)^n)}}{\varkappa}}$.

Доказательство: Пусть $u \in E_2$ — решение уравнения (3.1) для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Применим первую компоненту (3.1) при почти всех $t \in (0,T)$ к функции $u(t)$. Получим:

$$\langle (\varkappa A + J)u'(t), u(t) \rangle + \langle \nu A u(t), u(t) \rangle -$$
$$- \langle \lambda B_1(u)(t), u(t) \rangle - \langle \lambda B_2 u(t), u(t) \rangle -$$
$$- \langle \lambda B_3 u(t), u(t) \rangle + \left\langle \frac{\lambda}{\varepsilon} Nu(t), u(t) \right\rangle = \langle \lambda \tilde{g}(t), u(t) \rangle.$$

По определению операторов B_1 и B_2 имеем, что

$$\langle B_1(u)(t), u(t) \rangle = \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i,j=1}^n \big(R_\delta(u)\big)_i(t) u_j(t) \frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i=1}^n \big(R_\delta(u)\big)_i(t) \frac{\partial \big(u^2(t)\big)}{\partial x_i} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \big(R_\delta(u)\big)_i(t) u^2(t) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\hat\Omega_0} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t} u(s)ds\right)u^2(t)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\delta\int\limits_{\hat\Omega_0}\int\limits_{t-\delta}^{t} \operatorname{div} u(s)dsu^2(t)dx = 0;$$

$$\left\langle B_2(u)(t), u(t)\right\rangle = \int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n} h_i(t)u_j(t)\frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i=1}^{n} h_i(t)\frac{\partial\left(u^2(t)\right)}{\partial x_i}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\hat\Omega_0}\operatorname{div} h(t)u^2(t)dx = 0.$$

Тогда получим, что

$$\left\langle(\varkappa A + J)u'(t), u(t)\right\rangle + \left\langle\nu A u(t), u(t)\right\rangle - \\ -\left\langle\lambda B_3 u(t), u(t)\right\rangle + \left\langle\frac{\lambda}{\varepsilon}Nu(t), u(t)\right\rangle = \\ = \left\langle\lambda\tilde g(t), u(t)\right\rangle. \tag{3.3}$$

Преобразуем слагаемые в последнем равенстве следующим образом.

$$\left\langle(\varkappa A + J)u'(t), u(t)\right\rangle =$$

$$= \varkappa\int\limits_{\hat\Omega_0}\nabla u'(t) : \nabla u(t)dx + \int\limits_{\hat\Omega_0} u'(t)u(t)dx =$$

$$= \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\hat\Omega_0}\nabla u(t) : \nabla u(t)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\hat\Omega_0} u^2(t)dx =$$

$$= \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2;$$

$$\left\langle\nu A u(t), u(t)\right\rangle = \nu\int\limits_{\hat\Omega_0}\nabla u(t) : \nabla u(t)dx = \nu\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2;$$

$$\left\langle\frac{\lambda}{\varepsilon}Nu(t), u(t)\right\rangle = \frac{\lambda}{\varepsilon}\int\limits_{\hat\Omega_0} M(t,x)u(t)u(t)dx =$$

$$= \frac{\lambda}{\varepsilon}\left\|Mu\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2;$$

$$\left|\left\langle\lambda B_3 u(t), u(t)\right\rangle\right| = \lambda\left|\int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n} u_i(t)h_j(t)\frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i}dx\right| \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\|h_j(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)}\left\|u_i(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)}\left\|\frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left\|h_j(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)}\left\|u_i(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V} \le$$

$$\le C_5\left\|h(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)^n}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2;$$

$$\left|\left\langle\lambda\tilde g(t), u(t)\right\rangle\right| \le \left|\left\langle\tilde g(t), u(t)\right\rangle\right| \le \left\|\tilde g(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}\left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n} \le$$

$$\le \frac{\left\|\tilde g(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2}{2} + \frac{\left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2}{2} \le \frac{\left\|\tilde g(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2}{2} + \frac{C_1^2\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2}{2}.$$

Тогда из (3.3) получим, что

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2 + \nu\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \\ + \frac{\lambda}{\varepsilon}\left\|Mu(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2 \le$$

$$\le C_5\left\|h(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)^n}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{\left\|\tilde g(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2}{2} + \frac{C_1^2\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2}{2}.$$

Оценивая левую часть последнего неравенства снизу

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2 \le \\ \le \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2 + \\ + \nu\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon}\left\|Mu(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2,$$

а правую часть сверху

$$C_5\left\|h(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)^n}\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{\left\|\tilde g(t)\right\|_{\tilde H}^2}{2} + \frac{C_1^2\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2}{2} \le \\ \le \frac{2C_5\left\|h(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)^n} + C_1^2}{2\varkappa}\left(\varkappa\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2\right) + \\ + \frac{\left\|\tilde g(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2}{2},$$

получим, что

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2 \le \\ \le \frac{2C_5\left\|h(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)^n} + C_1^2}{2\varkappa}\left(\varkappa\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2\right) + \\ + \frac{\left\|\tilde g(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2}{2}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до s, где $s \in [0,T]$.

$$\frac{\varkappa}{2}\left\|u(s)\right\|_{\tilde V}^2 + \frac{1}{2}\left\|u(s)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2 \le \int\limits_0^s\frac{\left\|\tilde g(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2}{2}dt + \\ + \int\limits_0^s\frac{2C_5\left\|h(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)^n} + C_1^2}{2\varkappa}\left(\varkappa\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2\right)dt. \tag{3.4}$$

Оценим второе слагаемое из правой части следующим образом

$$\int\limits_0^s\frac{2C_5\left\|h(t)\right\|_{C(\hat\Omega_0)^n} + C_1^2}{2\varkappa}\left(\varkappa\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2\right)dt \le$$

$$\le \frac{2C_5\left\|h\right\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)} + C_1^2}{2\varkappa}\int\limits_0^s\left(\varkappa\left\|u(t)\right\|_{\tilde V}^2 + \left\|u(t)\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}^2\right)dt.$$

Таким образом из (3.4) получим

$$\varkappa \|u(s)\|^2_{\tilde V} + \|u(s)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} \le \int_0^s \|\tilde g(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}\, dt + \\ + \frac{2C_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)} + C_1^2}{\varkappa}\int_0^s \left(\varkappa\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \|u(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}\right)dt. \tag{3.5}$$

Из (3.5) воспользовавшись неравенством Гронуолла—Беллмана, получим оценку

$$\varkappa \|u(s)\|^2_{\tilde V} + \|u(s)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} \le$$

$$\le e^{\frac{C_1^2+2C_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}}{\varkappa}s}\int_0^s \|\tilde g(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}\, dt \le$$

$$\le e^{\frac{TC_1^2+2TC_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}}{\varkappa}}\|\tilde g\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)}.$$

Оценивая левую часть последнего неравенства слева и, переходя к максимуму по $t \in [0,T]$ в левой части, это можно сделать так как правая часть последней оценки не зависит от t, получим неравенство

$$\varkappa \max_{t\in[0,T]}\|u(s)\|^2_{\tilde V} \le e^{\frac{TC_1^2+2TC_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}}{\varkappa}}\|\tilde g\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)},$$

из которого и следует требуемая оценка (3.2). □

Теорема 3.2. *Если $u \in E_2$ — решение операторного уравнения (2.8), то для него имеет место оценка*

$$\|Mu\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)} \le \varepsilon C_7, \tag{3.6}$$

где $C_7 = \dfrac{2C_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)} + C_1^2}{2}C_6T + \dfrac{1}{2}\|\tilde g\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)}$.

Доказательство: Пусть $u \in E_2$ — решение уравнения (2.8). Применим первую компоненту (2.8) при почти всех $t \in (0,T)$ к функции $u(t)$. Получим:

$$\varkappa\langle (A+J)u'(t), u(t)\rangle + \langle \nu Au(t), u(t)\rangle - \\ -\langle B_1(u)(t), u(t)\rangle - \langle B_2u(t), u(t)\rangle - \\ -\langle B_3u(t), u(t)\rangle + \left\langle \frac{1}{\varepsilon}Nu(t), u(t)\right\rangle = \langle \tilde g(t), u(t)\rangle.$$

Действуя аналогично доказательству теоремы 3.1 (разница заключается в отсутствии в этом случае λ), получим

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \\ +\nu\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{1}{\varepsilon}\|Mu(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} \le \\ \le C_5\|h(t)\|_{C(\hat\Omega_0)^n}\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{\|\tilde g(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}}{2} + \frac{C_1^2\|u(t)\|^2_{\tilde V}}{2}.$$

Оценим левую часть последнего неравенства снизу

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \frac{1}{\varepsilon}\|Mu(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} \le \\ \le \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \\ +\nu\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{1}{\varepsilon}\|Mu\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}.$$

Тогда получим, что

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{V} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \frac{1}{\varepsilon}\|Mu(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} \le \\ \le \frac{2C_5\|h(t)\|_{C(\hat\Omega_0)^n} + C_1^2}{2}\|u(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{\|\tilde g(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}}{2}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до T.

$$\frac{\varkappa}{2}\|u(T)\|^2_{\tilde V} + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \frac{1}{\varepsilon}\|Mu\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)} \le \\ \le \frac{1}{2}\|\tilde g\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)} + \int_0^T \frac{2C_5\|h(t)\|_{C(\hat\Omega_0)^n} + C_1^2}{2}\|u(t)\|^2_{\tilde V}\, dt. \tag{3.7}$$

Используя следующую оценку

$$\frac{1}{\varepsilon}\|Mu\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)} \le \\ \le \frac{\varkappa}{2}\|u(T)\|^2_{\tilde V} + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \frac{1}{\varepsilon}\|Mu\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)},$$

и оценки на второе слагаемое из правой части (3.7)

$$\int_0^T \frac{2C_5\|h(t)\|_{C(\hat\Omega_0)^n} + C_1^2}{2}\|u(t)\|^2_{\tilde V}\, dt \le \\ \le \frac{2C_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)} + C_1^2}{2}\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|^2_{\tilde V}\int_0^T dt \le \\ \le \frac{2C_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)} + C_1^2}{2}C_6T,$$

мы из (3.7) и получим требуемую оценку. □

Теорема 3.3. *Если $u \in E_2$ — решение операторного уравнения (3.1) для некоторого λ, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\|u'\|_{L_2(0,T;\tilde V)} \le C_7 + \frac{C_8}{\varepsilon}, \tag{3.8}$$

где $C_7 = \dfrac{1}{\varkappa}\left\{(\nu C_0 + 2C_3)\sqrt{C_6} + C_2C_6 + C\|\tilde g\|_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)}\right\}$, $+ C\|\tilde g\|_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)}\Big\}$, $C_8 = \dfrac{C_4\sqrt{C_6}}{\varkappa}$.

Доказательство: Заметим, что если $u \in E_2$ — решение уравнения (3.1) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то оно удовлетворяет равенству:

$$(\varkappa A + J)u' + \nu Au - \lambda B_1(u) - \lambda B_2 u - \\ -\lambda B_3 u + \frac{\lambda}{\varepsilon} Nu = \lambda\tilde{g}.$$

Выразим из этого равенства $(\varkappa A + I)u'$. Имеем

$$(\varkappa A + J)u' = \\ = -\nu Au + \lambda B_1(u) + \lambda B_2 u + \lambda B_3 u - \frac{\lambda}{\varepsilon} Nu + \lambda\tilde{g}.$$

Следовательно

$$\|(\varkappa A + J)u'\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} = \\ = \Big\| -\nu Au + \lambda B_1(u) + \lambda B_2 u + \lambda B_3 u - \\ - \frac{\lambda}{\varepsilon} Nu + \lambda\tilde{g} \Big\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)}. \quad (3.9)$$

Из левой части оценки (2.13) получим оценку снизу на левую часть последнего равенства

$$\varkappa \|u'\|_{L_2(0,T;\tilde{V})} \le \|(\varkappa A + J)u'\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)}. \quad (3.10)$$

Правую часть (3.9) при помощи неравенств (2.10), (2.14), (2.15),(2.16), (3.2) и, воспользовавшись тем, что $\lambda \le 1$, оценим следующим способом

$$\Big\| -\nu Au + \lambda B_1(u) + \lambda B_2 u + \lambda B_3 u - \frac{\lambda}{\varepsilon} Nu + \lambda\tilde{g} \Big\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} \le \\ \le \nu \|Au\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} + \lambda \|B_1(u)\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} + \lambda \|B_2 u\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} + \\ + \lambda \|B_3 u\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \|Nu\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} + \lambda \|\tilde{g}\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} \le \\ \le \nu C_0 \|u\|_{C([0,T],\tilde{V})} + C_2 \|u\|^2_{C([0,T],\tilde{V})} + 2C_3 \|u\|_{C([0,T],\tilde{V})} \\ + \frac{C_4}{\varepsilon} \|u\|_{C([0,T],\tilde{V})} + C \|\tilde{g}\|_{L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)} \le \\ \le \left(\nu C_0 + 2C_3 + \frac{C_4}{\varepsilon}\right) \|u\|_{C([0,T],\tilde{V})} + C_2 \|u\|^2_{C([0,T],\tilde{V})} + \\ + C \|\tilde{g}\|_{L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)} \le \left(\nu C_0 + 2C_3 + \frac{C_4}{\varepsilon}\right)\sqrt{C_6} + \\ + C_2 C_6 + C \|\tilde{g}\|_{L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (3.10) и следует требуемая оценка (3.8). □

Из теорем 3.1 и 3.3 как непосредственное следствие получаем

Следствие 3.1. *Если $u \in E_2$ — решение операторного уравнения (3.1) для некоторого λ, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\|u\|_{E_2} \le \sqrt{C_6} + C_7 + \frac{C_8}{\varepsilon}. \quad (3.11)$$

Аналогично доказательству теоремы 3.3 получаем следующую оценку:

Замечание 3.1. *Если $u \in E_2$ — решение операторного уравнения (3.1) для некоторого λ, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\left\| (\varkappa A + J)u' + \frac{1}{\varepsilon} Nu \right\|_{L_2(0,T;\tilde{V}^*)} \le C_7. \quad (3.12)$$

4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 4.1. *Уравнение (2.8) при каждом $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ имеет хотя бы одно решение $v \in E_2$.*

Доказательство: Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (3.11) все решения семейства уравнений

$$L(u) - \lambda K(u) = \lambda(\tilde{g}, 0), \text{ где } \lambda \in [0,1],$$

лежат в шаре B_R радиуса $R = \sqrt{C_6} + C_7 + \frac{C_8}{\varepsilon} + 1$ с центром в нуле. Поэтому все решения семейства уравнений $u + \lambda L^{-1}\left[K(u) - (\tilde{g}, 0)\right] = 0$, где $\lambda \in [0,1]$, также лежат в том же самом шаре B_R. Отображение $[K(\cdot) - (\tilde{g}, 0)] : E_2 \to L_2(0,T;\tilde{V}^*) \times \tilde{V}$ является вполне непрерывным (лемма 2.6 (b)). Из пункта (a) той же самой леммы получим, что оператор $L^{-1} : L_2(0,T;\tilde{V}^*) \times \tilde{V} \to E_2$ непрерывен.

Следовательно отображение $L^{-1}\left[K(\cdot) - (\tilde{g}, 0)\right] : E_2 \to E_2$ вполне непрерывно как композиция вполне непрерывного и непрерывного отображений.

Тогда отображение $G : [0,1] \times E_2 \to E_2, G(\lambda, u) = \lambda L^{-1}\left[K(u) - (\tilde{g}, 0)\right]$ вполне непрерывно по совокупности переменных λ и u.

Из всего вышеперечисленного следует, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, u) = u - G(\lambda, u)$ невырождено на границе шара B_R. Поэтому для него определена степень Лере—Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. Воспользовавшись свойством гомотопической инвариантности степени получим, что $\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0)$. Таким образом, вспомнив что $\Phi(0,\cdot) = I$, а $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$, получим, что $\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0) = 1$.

В итоге, существует хотя бы одно решение $u \in E_2$ уравнения $u + L^{-1}\left[K(u) - (\tilde{g}, 0)\right] = 0$ и, следовательно, уравнения (2.8). □

В силу существования решения $u \in E_2$ уравнения (2.8) из вышеприведенных рассуждений следует, что начально-краевая задача (2.1)—

(2.4) имеет хотя бы одно слабое решение $u \in E_2$.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ $\varepsilon \to 0$.

Выберем теперь последовательность $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. В теореме 4.1 показано, что при каждом ε_n существует $u_n \in E_2$ — слабое решение начально-краевой задачи (2.1)—(2.4). Тогда каждое $u_n \in E_2$ удовлетворяет при почти всех $t \in (0,T)$ и для любого $\varphi \in \tilde{V}$ равенству

$$\begin{gathered}\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \frac{\partial u_n}{\partial t}\varphi dx + \nu\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla u_n : \nabla\varphi dx - \\ -\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left(R_\delta(u_n)\right)_i u_{n\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \\ -\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}h_i u_{n\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}u_{n\,i}h_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \\ +\varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right) : \nabla\varphi\, dx + n\int\limits_{\hat{\Omega}_0}Mu_n\varphi\, dx = \langle\tilde{g},\varphi\rangle\end{gathered} \tag{5.1}$$

и начальному условию

$$u_n(0,x) = 0, \qquad x \in \Omega_0. \tag{5.2}$$

Из оценки (3.6) следует, что

$$Mu_n \to 0 \text{ сильно в } L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n).$$

Но в силу оценки (3.2) имеем, что

$$u_n \rightharpoonup w \text{ слабо в } L_2(0,T;\tilde{V}). \tag{5.3}$$

Следовательно,

$$Mu_n \rightharpoonup Mw \text{ слабо в } L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n).$$

В итоге в силу единственности предела имеем, что $Mw = 0$. Отсюда получим, что $w = 0$ почти всюду в $\hat{Q}_0 \setminus Q$, то есть предельная функция w принадлежит пространству $\tilde{Y}^1_{L_2}$.

Таким образом без ограничения общности, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, получим

$$\nu\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla u_n : \nabla\varphi dx \to \nu\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla w : \nabla\varphi dx \quad \text{при } n\to\infty; \tag{5.4}$$

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}h_i u_{n\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \to \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}h_i w_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \quad \text{при } n\to\infty; \tag{5.5}$$

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}u_{n\,i}h_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \to \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}w_i h_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \quad \text{при } n\to\infty. \tag{5.6}$$

Далее, в силу оценки (3.2) получим, что

$$\|R_\delta(u_n)(t)\|_{\tilde{V}} = \left\|\frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t}u_n(s)ds\right\|_{\tilde{V}} \le \frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t}\|u_n(s)\|_{\tilde{V}}\,ds \le$$

$$\le \frac{\max\limits_{s\in[t-\delta,t]}\|u_n(s)\|_{\tilde{V}}}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t}ds \le \max_{s\in[0,T]}\|u_n(s)\|_{\tilde{V}} = \|u_n\|_{C([0,T],\tilde{V})}.$$

Так как для $u_n \in C[0,T],\tilde{V})$, функция $R_\delta(u_n) \in C^1([0,T],\tilde{V})$, то, переходя к максимуму по t в последнем неравенстве, и используя оценку (3.2) получим

$$\|R_\delta(u_n)(t)\|_{C[0,T],\tilde{V})} \le \|u_n\|_{C([0,T],\tilde{V})} \le C_6. \tag{5.7}$$

Оценим теперь $\left(R_\delta(u_n)\right)'$. Имеем

$$\left(R_\delta(u_n)\right)(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t}u_n(s)ds\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^t u_n(s)ds - \int\limits_0^{t-\delta}u_n(s)ds\right) = \frac{u_n(t)-u_n(t-\delta)}{\delta}.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\left\|\left(R_\delta(u_n)\right)(t)\right\|_{\tilde{V}} = \left\|\frac{u_n(t)-u_n(t-\delta)}{\delta}\right\|_{\tilde{V}} \le \\ \le \frac{1}{\delta}\left(\|u_n(t)\|_{\tilde{V}} + \|u_n(t-\delta)\|_{\tilde{V}}\right) \le \\ \le \frac{2}{\delta}\max_{s\in[0,T]}\|u_n(s)\|_{\tilde{V}} = \frac{2}{\delta}\|u_n\|_{C([0,T],\tilde{V})}.\end{gathered}$$

Таким образом

$$\left\|\left(R_\delta(u_n)\right)(t)\right\|_{C([0,T],\tilde{V})} \le \frac{2}{\delta}\|u_n\|_{C([0,T],\tilde{V})} \le \frac{2C_6}{\delta}. \tag{5.8}$$

В силу теоремы Арцела—Асколли мы имеем компактное вложение $C^1([0,T],\tilde{V}) \subset C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)$. Таким образом из оценок (5.7) и (5.8) следует, что $R_\delta(u_n) \to z$ сильно в $C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)$. Однако, поскольку для функции $u_n \in L_2(0,T;L_4(\hat{\Omega}_0)^n)$ мы имеем, что функция $R_\delta(u_n) \in C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)$ и оператор $R_\delta : L_2(0,T;L_4(\hat{\Omega}_0)^n) \to C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)$ — линейный и непрерывный, то в силу слабой сходимости (5.3) и единственности предела получим, что $z = R_\delta(w)$. В итоге имеем, что $R_\delta(u_n) \to R_\delta(w)$ сильно в $C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)$. Следовательно, в силу слабой сходимости (5.3) последовательность $R_\delta(u_n)u_n \rightharpoonup R_\delta(w)w$ слабо в $L_2(0,T;L_2(\hat{\Omega}_0)^n)$.

В итоге имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left(R_\delta(u_n)\right)_i u_{n\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \to \\ \to \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left(R_\delta(w)\right)_i w_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \quad \text{при } n\to\infty.\end{gathered} \tag{5.9}$$

В силу оценки (3.12) имеем, что последовательность $(\varkappa A + J)u_n' + nNu_n$ сходится слабо в $L_2(0,T;\tilde{V}^*)$, откуда

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \frac{\partial u_n}{\partial t}\varphi\, dx + \varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right):\nabla\varphi\, dx + \\ +n\int\limits_{\hat{\Omega}_0} Mu_n\varphi\, dx \to \langle F,\varphi\rangle \quad \text{при } n\to\infty. \tag{5.10}$$

Здесь F — некоторый функционал из $L_2(0,T;\tilde{V}^*)$. Переходя в (5.1) к пределу в каждом из интегралов, получим, что

$$\langle F,\varphi\rangle = -\nu\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla w:\nabla\varphi\, dx + \\ +\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^n h_i w_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^n w_i h_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \\ +\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^n \big(R_\delta(w)\big)_i w_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx + \langle\tilde{g},\varphi\rangle. \tag{5.11}$$

Дальше, поскольку равенство (5.1) выполнено при почти всех $t\in(0,T)$ для любого $\varphi\in\tilde{V}$, то оно будет выполнено при почти всех $t\in(0,T)$ и для $\varphi\in\tilde{Y}^1_{L_2}$. Действительно, при почти всех $t\in(0,T)$ функция $\varphi\in\tilde{Y}^1_{L_2}$ будет принадлежать пространству $\tilde{V}$.

Отметим, однако, что при почти всех $t\in(0,T)$ носитель функции φ лежит в Ω_t. Следовательно, член $n\int\limits_{\hat{\Omega}_0} Mu_n\varphi\, dx$, исчезнет, так как он для таких пробных функций обращается в нуль.

Таким образом для подобных пробных функций получим, что

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\frac{\partial u_n}{\partial t\varphi}dx + \varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right):\nabla\varphi\, dx \to \\ \to\langle F,\varphi\rangle \text{ при } n\to\infty.$$

Отметим, что в пространстве $\tilde{Y}^1_{L_2}$ следующее множество функций $\{\chi\psi, \chi\in\mathfrak{D}([0,T]), \psi\in\mathfrak{D}(\Omega_t)^n, \operatorname{div}\psi = 0, \operatorname{supp}(\chi\psi)\subset Q\}$ будет плотно. Действительно, согласно определению пространства $\tilde{Y}^1_{L_2}$ в нем плотным множеством будет множество D. То есть для любой функции $u\in\tilde{Y}^1_{L_2}$ существует последовательность функций $v_n\in D$, которая сходится к u по норме $\tilde{Y}^1_{L_2}$. Для каждой функции v_n рассмотрим функцию w_n, построенную следующим образом. Разобьем отрезок $[0,T]$ на интервалы вида (t_k,t_{k+1}) на которых для любых $\tau,s\in(t_k,t_{k+1})$ выполнено $\|v_n(\tau)-v_n(s)\|_{\tilde{V}} < \frac{1}{nT}$. Это можно осуществить, поскольку функция v_n равномерно непрерывна на отрезке $[0,T]$. Поскольку отрезок $[0,T]$ компактен, то можно выбрать конечное число таких интервалов. В каждом из интервалов (t_k,t_{k+1}) произвольным образом выберем точку s_k и рассмотрим следующую функцию $w_n(t,x) = \sum\limits_{l=1}^m \chi_l(t)v_n(s_l,x)$. Здесь χ_l — это функции из разбиения единицы, построенные по системе интервалов (t_k,t_{k+1}), для точки s_l. Если мы теперь выберем последовательность w_n, то получим, что $w_n\to u$ по норме пространства $\tilde{Y}^1_{L_2}$.

На этом плотном множестве, то есть для любых $\chi\in\mathfrak{D}([0,T]), \psi\in\mathfrak{D}(\Omega_t)^n$ таких, что $\operatorname{div}\psi = 0$, $\operatorname{supp}(\chi\psi)\subset Q$, получим, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\frac{\partial u_n}{\partial t\varphi}dx\chi dt + \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right):\nabla\varphi\, dx\chi dt = \\ = \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\int\limits_0^T\frac{\partial u_n}{\partial t}\chi dt\varphi\, dx + \varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\int\limits_0^T\frac{\partial u_n}{\partial t}\chi dt\right):\nabla\psi\, dx = \\ = -\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\int\limits_0^T u_n\frac{\partial\chi}{\partial t}dt\varphi\, dx - \varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\int\limits_0^T u_n\frac{\partial\chi}{\partial t}dt\right):\nabla\psi\, dx = \\ = -\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}u_n\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt - \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla u_n:\nabla\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt.$$

Далее

$$-\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}u_n\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt - \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla u_n:\nabla\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt \to \\ \to -\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}w\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt - \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla w:\nabla\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt \\ \text{при } n\to\infty.$$

Поскольку

$$-\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}w\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt - \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla w:\nabla\varphi\, dx\frac{\partial\chi}{\partial t}dt = \\ = -\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\int\limits_0^T w\frac{\partial\chi}{\partial t}dt\varphi\, dx - \varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\int\limits_0^T w\frac{\partial\chi}{\partial t}dt\right):\nabla\psi\, dx = \\ = \int\limits_{\hat{\Omega}_0}\int\limits_0^T\frac{\partial w}{\partial t}\chi dt\varphi\, dx + \varkappa\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\int\limits_0^T\frac{\partial w}{\partial t}\chi dt\right):\nabla\psi\, dx = \\ = \int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\frac{\partial w}{\partial t}\varphi\, dx\chi dt + \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right):\nabla\varphi\, dx\chi dt,$$

где под обозначением $\frac{\partial w}{\partial t}$ понимается обобщенная производная функции w.

В итоге получим, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\frac{\partial u_n}{\partial t}\varphi\, dx\chi dt + \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right):\nabla\varphi\, dx\chi dt \to \\ \to \int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\frac{\partial w}{\partial t}\varphi\, dx\chi dt + \varkappa\int\limits_0^T\int\limits_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right):\nabla\varphi\, dx\chi dt \\ \text{при } n\to\infty.$$

Следовательно для $\varphi \in \tilde{Y}^1_{L_2}$

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \partial u_n \partial t \varphi \, dx + \varkappa \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla \left(\partial u_n \partial t\right) : \nabla \varphi \, dx \to \langle F, \varphi \rangle =$$

$$= \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \partial w \partial t \varphi \, dx + \varkappa \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla \left(\partial w \partial t\right) : \nabla \varphi \, dx \qquad (5.12)$$

при $n \to \infty$.

Таким образом получили сходимость

$$(J + \varkappa A) \frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup (J + \varkappa A) \frac{\partial w}{\partial t} \text{ слабо в } (\tilde{Y}^1_{L_2})^*.$$

В силу того, что оператор $(J + \varkappa A) : \tilde{Y}^1_{L_2} \to (\tilde{Y}^1_{L_2})^*$ непрерывно обратим, получим что $\frac{\partial w}{\partial t} \in \tilde{Y}^1_{L_2}$. Раньше уже было получено, что предельная функция w принадлежит пространству $\tilde{Y}^1_{L_2}$. Тогда $w \in \tilde{E}_1$.

Далее, поскольку последовательность $\{(J + \varkappa A) \frac{\partial u_n}{\partial t}\}$ слабо сходится в пространстве $(\tilde{Y}^1_{L_2})^*$, а линейный оператор $(J + \varkappa A) : \tilde{Y}^1_{L_2} \to$ $\to (\tilde{Y}^1_{L_2})^*$ — обратим, получим, что последовательность $\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\}$ слабо сходится в пространстве $\tilde{Y}^1_{L_2}$ и, следовательно, ограничена в $\tilde{Y}^1_{L_2}$.

Таким образом имеем, что последовательность u_n ограничена в $\tilde{Y}_{L_\infty}$, а последовательность $\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\}$ ограничена в $\tilde{Y}^1_{L_2}$. Тогда аналогично замечанию 4 (его формулировка была приведена на странице 11 из [14] получим, что из последовательности u_n можно выделить подпоследовательность сильно сходящуюся в $\tilde{Y}_{L_2}$.

Последовательность u_n удовлетворяет начальному условию (5.2). Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим что предельная функция удовлетворяет начальному условию $w(0, x) = 0$ для $x \in \Omega_0$.

Поскольку все оставшиеся слагаемые в (5.1) сходятся при почти всех $t \in (0, T)$ для любого $\varphi \in \tilde{V}$, то они сходятся при почти всех $t \in (0, T)$ и для $\varphi \in \tilde{Y}^1_{L_2}$. Следовательно из (5.4), (5.5), (5.6), (5.9), (5.12) получим, что предельная функция $w \in \tilde{E}_1$ при почти всех $t \in (0, T)$ для любого $\varphi \in \tilde{Y}^1_{L_2}$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0} \frac{\partial w}{\partial t \varphi} dx + \varkappa \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) : \nabla \varphi \, dx +$$
$$+ \nu \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla w : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i,j=1}^{n} \left(R_\delta(w)\right)_i w_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \qquad (5.13)$$
$$- \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i,j=1}^{n} h_i w_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i,j=1}^{n} w_i h_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \langle \tilde{g}, \varphi \rangle$$

и начальному условию

$$w(0, x) = 0, \qquad x \in \Omega_0. \qquad (5.14)$$

6. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ЗАДАЧЕ (5.13), (5.14) ПРИ $\delta \to 0$

В предыдущем пункте было показано, что существует функция $w \in \tilde{E}_1$, которая при почти всех $t \in (0, T)$ и для любого $\varphi \in \tilde{Y}^1_{L_2}$ удовлетворяет равенству (5.13) и начальному условию (5.14). В этом пункте мы сделаем предельный переход в этой задаче при $\delta \to 0$. Таким образом и будет показано существование слабого решения исходной задачи.

6.1 АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (5.13), (5.14)

Для предельного перехода по δ при $\delta \to 0$ нам потребуются априорные оценки, которые мы сейчас и получим.

Теорема 6.1 *Если $w \in \tilde{E}_1$ удовлетворяет равенству (5.13) и начальному условию (5.14), то для него имеет место следующая оценка:*

$$\|w\|^2_{\tilde{Y}_C} \le C_6, \qquad (6.1)$$

где C_6 — константа из априорной оценки (3.2).

Доказательство данного утверждения проводится полностью аналогично доказательству теоремы 3.2.

Теорема 6.2 *Если $w \in \tilde{E}_1$ удовлетворяет равенству (5.13) и начальному условию (5.14), то имеет место следующая оценка:*

$$\|w'\|^2_{\tilde{Y}^1_{L_2}} \le C_9, \qquad (6.2)$$

где $C_9 = \frac{2T\left(C_6 C_{10} + (C_{11} + C_5)\sqrt{C_6}\,\|h\|_{C([0,T], C(\hat{\Omega}_0)^n)}\right)^2 + 2C_1^2 \|\tilde{g}\|^2_{Y_{L_2}}}{\varkappa^2}$.

Доказательство: Поскольку функция $w \in \tilde{E}_1$ удовлетворяет (5.13) при почти всех $t \in (0, T)$ для любого $\varphi \in \tilde{Y}^1_{L_2}$, то она удовлетворяет ему и для $\varphi = w'$.

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_0} w'(t) w'(t) \, dx + \varkappa \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla w'(t) : \nabla w'(t) \, dx +$$
$$+ \nu \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \nabla w(t) : \nabla w'(t) \, dx -$$
$$- \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i,j=1}^{n} \left(R_\delta(w)\right)_i (t) w_j(t) \frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i} dx -$$
$$- \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i,j=1}^{n} h_i(t) w_j(t) \frac{\partial w'(t)_j}{\partial x_i} dx - \qquad (6.3)$$
$$- \int\limits_{\hat{\Omega}_0} \sum_{i,j=1}^{n} w_i(t) h_j(t) \frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i} dx =$$
$$= \langle \tilde{g}(t), w'(t) \rangle.$$

Преобразуем и оценим слагаемые в последнем равенстве следующим образом

$$\int\limits_{\hat\Omega_0} w'(t)w'(t)\,dx = \|w'(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n};$$

$$\varkappa\int\limits_{\hat\Omega_0}\nabla w'(t):\nabla w'(t)dx = \|w'(t)\|^2_{\tilde V};$$

$$\nu\int\limits_{\hat\Omega_0}\nabla w(t):\nabla w'(t)\,dx =$$

$$=\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\hat\Omega_0}\nabla w(t):\nabla w(t)dx = \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{\tilde V};$$

$$\left|\left\langle\tilde g(t), w'(t)\right\rangle\right| \le \|\tilde g(t)\|_{\tilde V^*}\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le \frac{\|\tilde g(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}}{2\gamma} + \frac{\gamma C_1^2\|w'(t)\|^2_{\tilde V}}{2};$$

$$\left|\int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n \big(R_\delta(w)\big)_i(t)w_j(t)\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n \left|\big(R_\delta(w)\big)_i(t)\right|\left|w_j(t)\right|\left|\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\right|dx \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^n \left\|\big(R_\delta(w)\big)_i(t)\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|w_j(t)\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|\frac{\partial w'(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left\|\frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^t w_i(s)\,ds\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|w_j(t)\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|\frac{\partial w'(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)} \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\sum_{i,j=1}^n \int\limits_{t-\delta}^t \|w_i(s)\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\,ds\,\|w_j(t)\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le \frac{\|w'(t)\|_{\tilde V}}{\delta}\sum_{i,j=1}^n \max_{s\in[t-\delta,t]}\|w_i(s)\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\int\limits_{t-\delta}^t ds\,\|w_j(t)\|_{L_4(\hat\Omega_0)} \le$$

$$\le \|w'(t)\|_{\tilde V}\sum_{i,j=1}^n \max_{s\in[0,T]}\|w_i(s)\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\|w_j(t)\|_{L_4(\hat\Omega_0)} \le$$

$$\le n^2\|w'(t)\|_{\tilde V}\|w\|_{C([0,T],L_4(\hat\Omega_0)^n)}\|w(t)\|_{L_4(\hat\Omega_0)^n} \le$$

$$\le C_{10}\|w'(t)\|_{\tilde V}\|u\|^2_{C([0,T],\tilde V)};$$

$$\left|\int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n h_i(t)w_j(t)\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n |h_i(t)||w_j(t)|\left|\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\right|dx \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^n \|h_i(t)\|_{C(\hat\Omega_0)}\|w_j(t)\|_{L_2(\hat\Omega_0)}\left\|\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^n \|h_i(t)\|_{C(\hat\Omega_0)}\|w_j(t)\|_{L_2(\hat\Omega_0)}\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le n^2\|h(t)\|_{C(\hat\Omega_0)^n}\|w(t)\|_{L_2(\hat\Omega_0)^n}\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le C_{11}\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\|w\|_{C([0,T],\tilde V)}\|w'(t)\|_{\tilde V};$$

$$\left|\int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n w_i(t)h_j(t)\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\,dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n |w_i(t)||h_j(t)|\left|\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\right|dx \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^n \|w_i(t)\|_{L_2(\hat\Omega_0)}\|h_j(t)\|_{C(\hat\Omega_0)}\left\|\frac{\partial w'_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^n \|w_i(t)\|_{L_2(\hat\Omega_0)}\|h_j(t)\|_{C(\hat\Omega_0)}\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le C_5\|h(t)\|_{C(\hat\Omega_0)^n}\|w(t)\|_{\tilde V}\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le C_5\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\|w\|_{C([0,T],\tilde V)}\|w'(t)\|_{\tilde V}.$$

Таким образом из (6.3) получим неравенство

$$\|w'(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \varkappa\|w'(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{\tilde V} \le$$

$$\le C_{10}\|w'(t)\|_{\tilde V}\|u\|^2_{C([0,T],\tilde V)} +$$

$$+(C_{11}+C_5)\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\|w\|_{C([0,T],\tilde V)}\|w'(t)\|_{\tilde V} +$$

$$+\frac{\|\tilde g(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}}{2\gamma} + \frac{\gamma C_1^2\|w'(t)\|^2_{\tilde V}}{2}.$$

Отметим, что поскольку $w\in\tilde Y_C$, то $\|w\|_{C([0,T],\tilde V)} = \|w\|_{\tilde Y_C}$. Воспользовавшись оценкой (6.1), оценим часть слагаемых из правой части последнего неравенства сверху

$$C_{10}\|w'(t)\|_{\tilde V}\|u\|^2_{C([0,T],\tilde V)} +$$

$$+(C_{11}+C_5)\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\|w\|_{C([0,T],\tilde V)}\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le \left(C_6C_{10} + (C_{11}+C_5)\sqrt{C_6}\,\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\right)\|w'(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le \frac{\left(C_6C_{10} + (C_{11}+C_5)\sqrt{C_6}\,\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\right)^2}{2\gamma C_1^2} +$$

$$+\frac{\gamma C_1^2\|w'(t)\|^2_{\tilde V}}{2}.$$

Таким образом получим следующее неравенство

$$\|w'(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n} + \varkappa\|w'(t)\|^2_{\tilde V} + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{\tilde V} \le$$

$$\le \frac{\left(C_6C_{10} + (C_{11}+C_5)\sqrt{C_6}\,\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\right)^2}{2\gamma C_1^2} +$$

$$+\frac{\|\tilde g(t)\|^2_{L_2(\hat\Omega_0)^n}}{2\gamma} + \gamma C_1^2\|w'(t)\|^2_{\tilde V}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до T.

$$\|w'\|^2_{L_2(0,T;L_2(\hat\Omega_0)^n)} + \varkappa\|w'\|^2_{L_2(0,T;\tilde V)} + \frac{\nu}{2}\|w(T)\|^2_{\tilde V} \le$$
$$\le \frac{T\Big(C_6C_{10} + (C_{11}+C_5)\sqrt{C_6}\,\|h\|_{C([0,T],C(\hat\Omega_0)^n)}\Big)^2}{2\gamma C_1^2} +$$
$$+\frac{\|\tilde g\|^2_{Y_{L_2}}}{2\gamma} + \gamma C_1^2\|w'\|^2_{L_2(0,T;\tilde V)}.$$

Отсюда, выбирая $\gamma = \frac{\varkappa}{2C_1^2}$, получим требуемую оценку (6.2). □

6.2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ЗАДАЧЕ (5.13), (5.14) ПРИ $\delta \to 0$.

Возьмём в качестве δ последовательность $\delta_n = \frac{1}{m}$. При каждом δ_m существует функция $w_m \in \tilde E_1$, удовлетворяющая при почти всех $t \in (0,T)$ и каждого $\varphi \in \tilde Y^1_{L_2}$ равенству (5.13):

$$\int_{\hat\Omega_0}\frac{\partial w_m}{\partial t}\varphi\,dx + \varkappa\int_{\hat\Omega_0}\nabla\left(\frac{\partial w_m}{\partial t}\right):\nabla\varphi\,dx +$$
$$+\nu\int_{\hat\Omega_0}\nabla w_m:\nabla\varphi\,dx - \int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m)\Big)_i w_{m\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \quad (6.4)$$
$$-\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n h_i w_{m\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n w_{m\,i}h_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx = \langle\tilde g,\varphi\rangle$$

и начальному условию (5.14):

$$w_m(0,x) = 0, \quad x \in \Omega_0. \qquad (6.5)$$

В силу оценок (6.1) и (6.2) получим, что

$$w_m \rightharpoonup u \;\; *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;\tilde V) \;\text{ при } m\to\infty;$$
$$w'_m \rightharpoonup u \;\text{ слабо в } L_2(0,T;\tilde V) \;\text{ при } m\to\infty.$$

Из следствия 4 получим, что

$$w_m \to u \text{ сильно в } C(0,T;L_4(\hat\Omega_0)^n) \text{ при } m\to\infty.$$

Так как все функции w_m удовлетворяют начальному условию (6.5) в силу указанной сильной сходимости получим, что предельная функция u удовлетворяет начальному условию

$$u(0,x) = 0, \quad x\in\Omega_0.$$

Далее в силу определения слабой сходимости при почти всех $t\in(0,T)$ для $\varphi\in L_2(0,T;\tilde V)$ получим

$$\int_{\hat\Omega_0}\frac{\partial w_m}{\partial t}\varphi\,dx \to \int_{\hat\Omega_0}\frac{\partial u}{\partial t}\varphi\,dx \;\text{ при } m\to\infty;$$
$$\int_{\hat\Omega_0}\nabla\left(\frac{\partial w_m}{\partial t}\right):\nabla\varphi\,dx \to \varkappa\int_{\hat\Omega_0}\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right):\nabla\varphi\,dx$$
$$\text{при } m\to\infty;$$
$$\nu\int_{\hat\Omega_0}\nabla w_m:\nabla\varphi\,dx \to \nu\int_{\hat\Omega_0}\nabla u:\nabla\varphi\,dx \;\text{ при } m\to\infty;$$
$$\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n h_i w_{m\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \to \int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n h_i u_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx$$
$$\text{при } m\to\infty;$$
$$\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n w_{m\,i}h_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \to \int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n u_i h_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx$$
$$\text{при } m\to\infty.$$

Покажем, что при почти всех $t\in(0,T)$

$$\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m)\Big)_i w_{m\,j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx \to \int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n u_i u_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx$$
$$\text{при } m\to\infty.$$

Действительно

$$\left|\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t)\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx - \int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n u_i(t)u_j(t)\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right| =$$
$$= \left|\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big\{\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t) \pm \Big(R_{\frac{1}{m}}(u)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t) \pm\right.$$
$$\left.\pm\Big(R_{\frac{1}{m}}(u)\Big)_i(t)u_j(t) - u_i(t)u_j(t)\Big\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right| \le$$
$$\le\left|\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big\{\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t) - \Big(R_{\frac{1}{m}}(u)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t)\Big\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right| +$$
$$+\left|\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big\{\Big(R_{\frac{1}{m}}(u)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t) - \Big(R_{\frac{1}{m}}(u)\Big)_i(t)u_j(t)\Big\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right| +$$
$$+\left|\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big\{\Big(R_{\frac{1}{m}}(u)\Big)_i(t)u_j(t) - u_i(t)u_j(t)\Big\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right|.$$

Покажем теперь, что каждое из трех слагаемых в правой части последней оценки стремится к нулю. Аналогично оценке похожего члена в априорной оценке получим

$$\left|\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big\{\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t) - \Big(R_{\frac{1}{m}}(u)\Big)_i(t)w_{m\,j}(t)\Big\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right| =$$
$$=\left|\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\Big\{\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m-u)\Big]_i(t)w_{m\,j}(t)\Big\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right| \le$$
$$\le\int_{\hat\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n\left|\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m-u)\Big)_i(t)\right|\left|w_{m\,j}(t)\right|\left|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right|dx \le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^n\left\|\Big(R_{\frac{1}{m}}(w_m-u)\Big)_i(t)\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|w_{m\,j}(t)\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)} =$$
$$=\sum_{i,j=1}^n\left\|m\int_{t-\frac{1}{m}}^t(w_m-u)_i(s)\,ds\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|w_{m\,j}(t)\right\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat\Omega_0)} \le$$
$$\le m\sum_{i,j=1}^n\int_{t-\frac{1}{m}}^t\|(w_m-u)_i(s)\|_{L_4(\hat\Omega_0)}ds\,\|w_{m\,j}(t)\|_{L_4(\hat\Omega_0)}\|\varphi(t)\|_{\tilde V} \le$$

$$\le m\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\sum_{i,j=1}^{n}\max_{s\in[t-\frac{1}{m},t]}\left\|(w_m-u)_i(s)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\int_{t-\frac{1}{m}}^{t}ds\left\|w_{m\,j}(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\le$$

$$\le\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\sum_{i,j=1}^{n}\max_{s\in[0,T]}\left\|(w_m-u)_i(s)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|w_{m\,j}(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\le$$

$$\le n^2\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\left\|w_m-u\right\|_{C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)}\left\|w_m\right\|_{C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)}\to 0$$

при $m\to\infty$.

Для второго слагаемого опять же аналогично оценке подобного члена в априорной оценке имеем

$$\left|\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)w_{m\,j}(t)-\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)u_j(t)\right\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right|=$$

$$=\left|\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)(w_m-u)_j(t)\right\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right|\le$$

$$\le\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)\right|\left|(w_m-u)_j(t)\right|\left|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right|dx\le$$

$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|(w_m-u)_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left\|m\int_{t-\frac{1}{m}}^{t}u_i(s)\,ds\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|(w_m-u)_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)}\le$$

$$\le m\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t-\frac{1}{m}}^{t}\left\|u_i(s)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}ds\left\|(w_m-u)_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\le$$

$$\le m\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\sum_{i,j=1}^{n}\max_{s\in[t-\frac{1}{m},t]}\left\|u_i(s)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\int_{t-\frac{1}{m}}^{t}ds\left\|(w_m-u)_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\le$$

$$\le\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\sum_{i,j=1}^{n}\max_{s\in[0,T]}\left\|u_i(s)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|(w_m-u)_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\le$$

$$\le n^2\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\left\|u\right\|_{C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)}\left\|w_m-u\right\|_{C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)}\to 0$$

при $m\to\infty$.

Наконец для последнего члена аналогично предыдущим имеем

$$\left|\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)u_j(t)-u_i(t)u_j(t)\right\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right|=$$

$$=\left|\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\left[\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)-u\right]_i(t)u_j(t)\right\}\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}dx\right|\le$$

$$\le\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)-u_i(t)\right|\left|u_j(t)\right|\left|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right|dx\le$$

$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\left(R_{\frac{1}{m}}(u)\right)_i(t)-u_i(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|u_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left\|m\int_{t-\frac{1}{m}}^{t}u_i(s)ds-u_i(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|u_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left\|m\int_{t-\frac{1}{m}}^{t}\left(u_i(s)-u_i(t)\right)ds\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|u_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left\|m\int_{-\frac{1}{m}}^{0}\left(u_i(t+\tau)-u_i(t)\right)d\tau\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|u_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\frac{\partial\varphi_j(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\hat{\Omega}_0)}\le$$

$$\le m\sum_{i,j=1}^{n}\int_{-\frac{1}{m}}^{0}\left\|u_i(t+\tau)-u_i(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}d\tau\left\|u_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\le$$

$$\le m\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\sum_{i,j=1}^{n}\max_{\tau\in[-\frac{1}{m},0]}\left\|u_i(t+\tau)-u_i(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\int_{-\frac{1}{m}}^{0}ds\left\|u_j(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)}\le$$

$$\le n^2\left\|\varphi(t)\right\|_{\tilde{V}}\max_{\tau\in[-\frac{1}{m},0]}\left\|u(t+\tau)-u(t)\right\|_{L_4(\hat{\Omega}_0)^n}\left\|u\right\|_{C([0,T],L_4(\hat{\Omega}_0)^n)}\to 0$$

при $m\to\infty$.

Таким образом переходя в каждом из интегралов равенства (6.4) к пределу при $m\to\infty$, получим, что предельная функция u будет удовлетворять при почти всех $t\in(0,T)$ и для любого $\varphi\in\tilde{Y}^1_{L_2}$ следующему равенству

$$\int_{\hat{\Omega}_0}\frac{\partial u}{\partial t}\varphi\,dx+\varkappa\int_{\hat{\Omega}_0}\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right):\nabla\varphi\,dx+$$
$$+\nu\int_{\hat{\Omega}_0}\nabla u:\nabla\varphi\,dx-\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}u_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx- \qquad (6.6)$$
$$-\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}h_iu_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx-\int_{\hat{\Omega}_0}\sum_{i,j=1}^{n}u_ih_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx=\langle\tilde{g},\varphi\rangle$$

и начальному условию:

$$u(0,x)=0,\quad x\in\Omega_0. \qquad (6.7)$$

А в силу полученных выше априорных оценок (6.1) и (6.2) получим, что $u\in\tilde{E}_1$. То есть функция u удовлетворяет определению 1.2 слабого решения.

Таким образом показано, что существует слабое решение начально-краевой задачи (1.6)—(1.9), и, следовательно, задачи (1.2)—(1.5)

7. ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ

Теорема 8. *Слабое решение задачи (1.6)—(1.9) единственно.*

Доказательство: Предположим противное. Пусть существуют два слабых решения u_1 и u_2 ($u_1\ne u_2$) начально-краевой задачи (1.6)—(1.9). Вычтем из равенства (1.10) для u_1 равенство (1.10) для u_2. Обозначим $w=u_1-u_2$. Тогда для w мы получим равенство

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi \, dx + \nu \int_{\Omega_t} \nabla w : \nabla \varphi \, dx -$$
$$-\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ u_{1\,i} u_{1\,j} - u_{2\,i} u_{2\,j} \right\} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx -$$
$$-\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} h_i w_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i h_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx +$$
$$+\varkappa \int_{\Omega_t} \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) : \nabla \varphi \, dx = 0,$$

которое выполнено при почти всех $t \in (0,T)$ для каждого $\varphi \in Y^1_{L_2}$. Поскольку, это равенство выполнено для всех $\varphi \in Y^1_{L_2}$, то оно выполнено и для $\varphi = w$. Таким образом при почти всех $t \in (0,T)$ получим:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \frac{\partial w}{\partial t} w \, dx + \nu \int_{\Omega_t} \nabla w : \nabla w \, dx - \\ &-\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ u_{1\,i} u_{1\,j} - u_{2\,i} u_{2\,j} \right\} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx - \\ &-\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} h_i w_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i h_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx + \\ &+\int_{\Omega_t} \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) : \nabla w \, dx = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Заметим, что

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial w}{\partial t} w \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} w^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{\partial t} \int_{\Omega_t} w^2 \, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{d}{\partial t} \|w\|^2_{L_2(\Omega_t)},$$
$$\int_{\Omega_t} \nabla \frac{\partial w}{\partial t} : \nabla w \, dx = \frac{\varkappa}{2} \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla w : \nabla w) \, dx =$$
$$= \frac{\varkappa}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \nabla w : \nabla w \, dx = \frac{\varkappa}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2_{V_t},$$
$$\nu \int_{\Omega_t} \nabla w : \nabla w \, dx = \nu \|w\|^2_{V_t},$$
$$\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} h_i w_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} h_i \frac{\partial (w_j w_j)}{\partial x_i} dx =$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_t} w^2 \operatorname{div} h \, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} (u_{1\,i} u_{1\,j} - u_{2\,i} u_{2\,j}) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx =$$
$$= \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} (u_{1\,i} u_{1\,j} - u_{1\,i} u_{2\,j}) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx +$$
$$+ \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} (u_{1\,i} u_{2\,j} - u_{2\,i} u_{2\,j}) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx =$$
$$= \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} u_{1\,i} w_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i u_{2\,j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} u_{1\,i} \frac{\partial (w_j w_j)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i u_{2\,j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div} u_1 w_j^2 dx + \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i u_{2\,j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx =$$
$$= \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i u_{2\,j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx.$$

Тогда равенство (7.1) при почти всех $t \in (0,T)$ можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\varkappa}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2_{V_t} + \nu \|w\|^2_{V_t} -$$
$$-\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i (u_2 + h)_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx = 0.$$

Проинтегрируем это равенство по t от 0 до t где $t \in [0,T]$ и перенесем нелинейный член в правую часть

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|w(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\varkappa}{2} \|w(t)\|^2_{V_t} + \nu \int_0^t \|w(s)\|^2_{V_t} \, ds = \\ &= \int_0^t \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i(x,s) (u_2 + h)_j (x,s) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} (x,s) \, dx \, ds. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $w(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = 0$.

Перед тем как перейти к оценке нелинейного члена отметим, что для слабого решения начально-краевой задачи (1.6)—(1.9) имеет место оценка $\|u\|^2_{Y^1_C} \le C_6$, где C_6 — константа из априорной оценки (3.2). Доказательство данной оценки полностью аналогично доказательству теоремы 6.1.

С помощью неравенства Гёльдера, непрерывного вложения V_t в $L_4(\Omega_t)^n$ и априорной оценки для функции u_2 правую часть (7.2) можно оценить следующим образом

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} w_i(x,s) (u_2 + h)_j (x,s) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} (x,s) \, dx \, ds \right| \le$$
$$\le \int_0^t \int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} \left| w_i(x,s) (u_2 + h)_j (x,s) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} (x,s) \right| dx \, ds \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \|w_i(s)\|_{L_4(\Omega)} \left\| (u_2 + h)_j (s) \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} (s) \right\|_{L_2(\Omega)} ds \le$$
$$\le C_{12} \int_0^t \|w(s)\|^2_{V_t} \, ds.$$

Поскольку в левой части (7.2) каждое слагаемое неотрицательно, то её можно оценить снизу:

$$\frac{\varkappa}{2}\|w(t)\|_{V_t}^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|w(t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \frac{\varkappa}{2}\|w(t)\|_{V_t}^2 + \nu\int_0^t \|w(s)\|_{V_t}^2\, ds.$$

Из оценок на левую и правую часть равенства (7.2) мы получаем следующее неравенство:

$$\frac{\varkappa}{2}\|w(t)\|_{V_t}^2 \leq C_{14}\int_0^t \|w(s)\|_{V_t}^2\, ds,$$

которое имеет место при всех $t \in [0,T]$. Воспользовавшись неравенством Гроноулла—Беллмана получим, что $\|w(t)\|_{V_t} \equiv 0$, а следовательно $u_1 \equiv u_2$. Получили противоречие, из которого и следует единственность слабого решения задачи (1.6)—(1.9) на отрезке $[0,T]$. □

8. ТЕХНИЧЕСКАЯ ЛЕММА

Лемма 8.1 *Определения пространства* $Y_{L_2}^1$, *введённые в первом пункте эквивалентны.*

Доказательство: Для того чтобы различать эти определения мы будем пространство $Y_{L_2}^1$, определенное согласно второму определению (определению, данному Лионсом [12]), обозначать через $Z_{L_2}^1$.

Сначала покажем, что $Y_{L_2}^1 \subset Z_{L_2}^1$.

Действительно, для каждой функции $u \in Y_{L_2}^1$ в силу определения пространства $Y_{L_2}^1$, имеем, что u при каждом $t \in [0,T]$ принимает значение $u(t) \in V_t$. Если же мы продолжим функцию u при каждом t нулём на всё $\tilde{V}$, то в силу проведенных выше рассуждений полученная таким образом функция $\tilde{u}$ будет принадлежать пространству $L_2(0,T;\tilde{V})$.

Покажем теперь, что $Z_{L_2}^1 \subset Y_{L_2}^1$.

Для того чтобы показать, что функция $u \in Z_{L_2}^1$ принадлежит $Y_{L_2}^1$ достаточно показать, что u можно аппроксимировать по норме $Y_{L_2}^1$ функциями из D. В силу гладкости границы Q получим, что область Q — локально-звёздна. Выберем теперь покрытие Q открытыми множествами $U, U_1, ..., U_k$ такими, что $U \subset \overline{U} \subset Q$ и каждое из множеств $U_j \cap Q, j = 1,...,k$ звездное относительно одной из своих точек (t_j^*, x_j^*). Данное покрытие конечно в силу того, что Q — компакт.

Выберем C^∞-гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $U, U_1, ..., U_k$ множества Q. Таким образом нами выбраны числовые функции $\phi, \phi_1, ..., \phi_k$, определённые на Q и такие, что

$$1 = \phi + \sum_{j=1}^k \phi_j, \quad \operatorname{supp}\phi \subset U, \operatorname{supp}\phi_j \subset U_j,$$

$$j = 1,...,k.$$

Тогда имеем, что

$$u = \phi u + \sum_{j=1}^k \phi_j u.$$

Каждое слагаемое из правой части последнего равенства принадлежит $L_2(Q)^n$.

Обозначим через $\varrho_\varepsilon(t_j^*, x_j^*)$, $\varepsilon \neq 0$, преобразование гомотетии с коэффициентом $1-\varepsilon : (t,x) \mapsto$ $\mapsto (t_j^* * \varepsilon + t * (1-\varepsilon), x_j^* * \varepsilon + x * (1-\varepsilon))$. Для этого преобразования

$$\sigma_\varepsilon(Q \cap U_j) \subset \sigma_\varepsilon(\overline{Q} \cap U_j) \subset Q \cap U_j$$

для каждого $j = 1,2,...,k.$

Введем следующие обозначения $w_j = \phi_j u$ и $\sigma_\varepsilon[w_j](x) = w_j(\sigma_\varepsilon(x))$. Будем считать, что каждая функция w_j продолжена нулем на все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Как показано в [16] (глава I, лемма 1.1) последовательность $\sigma_\varepsilon[w_j]$ сходится к w_j в $L_2(Q)^n$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ носитель каждой функции $\sigma_\varepsilon[w_j], j = 1,2,...,k$ и его 2δ-окрестность содержатся в $Q \cap U_j$ для достаточно малого $\delta > 0$. Также для фиксированного $\varepsilon > 0$ носитель функции $w = \phi u$ и его 2δ-окрестность содержатся в $Q \cap U$ для достаточно малого $\delta > 0$ в силу того, что функция ϕ имеет компактный носитель в Ω. Таким образом получили, что функция

$$\overline{w} = w + \sum_{j=1}^k \sigma_\varepsilon[w_j].$$

имеет компактный носитель в Ω.

Выберем теперь подобласть

$$Q_\delta = \{(t,x) \in Q : \operatorname{dist}((t,x), \partial Q) > \delta\}$$

области Q, содержащую носитель функции $\overline{w}$.

Обозначим через P_δ оператор ортогонального проектирования $L_2(Q_\delta)^n$ на $H(Q_\delta)$. (Здесь и далее принадлежность функции пространству $H(Q_\delta)$ означает, что функция суммируема с квадратом как функция двух переменных t и x и дивергенция этой функции равна нулю.) Применим этот оператор к функции $\overline{w}$, получим $w_\delta = P_\delta(\overline{w})$. Функция w_δ принадлежит пространству $H(Q_\delta)$ и поэтому ее продолжение нулем на всю область Q обладает свойством $\operatorname{div} v_\delta = 0$ в каждой точке области Q и, следовательно, $v_\delta \in H = H(Q)$.

Применим операцию усреднения по Стеклову к полученной функции v_δ. Получим $\breve{v} = \rho_\delta * v_\delta$. Здесь $\rho_\delta = \rho_\delta(t,x)$. В силу выбора δ имеем, что носитель $\breve{v}$ является компактом в Q. Поскольку

$$\operatorname{div} \breve{v} = \operatorname{div}(\rho_\delta * v_\delta) = \rho_\delta * \operatorname{div} v_\delta = 0,$$

то $\breve{v}$ принадлежит пространству $C_0^\infty(Q)^n$ и при каждом $t \in [0,T]$ функция $\breve{v} \in V_t$. Таким образом $\breve{v} \in D$.

Сходимость функции $\breve{v}$ к u следует из свойств усреднения по Стеклову и доказывается аналогично [16] (глава I, теорема 1.1) и [17]. Это и завершает доказательство данного факта. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amedodji K.* On the unsteady Navier-Stokes equations in a time-moving domain with velocity-pressure boundary conditions / K. Amedodji, G. Bayada, M. Chambat // Nonlinear Analysis, 2002. — V. 49. — P. 565—587.

2. *Ладыженская О. А.* Начально-краевая задача для уравнений Навье—Стокса в областях с меняющейся со временем границей / О. А. Ладыженская // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1968. — Т. 11. — С. 97—128.

3. *Fujita H.* On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in region-moving boundaries / H. Fujita, N. Sauer // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math, 1970. — V. 17. — P. 403—420.

4. *Salvi R.* On the existence of weak solutions of a nonlinear mixed problem for the Navier-Stokes equations in time-dependent domain / R. Salvi // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math, 1985. — V. 32. — P. 213—221.

5. *Salvi R.* On the existence of periodic weak solutions of Navier-Stokes equations in regions with periodically moving boundaries / R. Salvi // Acta Applicandae Mathematicae, 1994. — V.37. — P. 169—179.

6. *Salvi R.* On the Navier-Stokes equations in non-cylindrical domains: on the existence and regularity / R. Salvi // Mathematische Zeitschrift, 1988. — V. 199. — P. 153—170.

7. *Zvyagin V. G.* On weak solutions of the equations of motion of a viscoelastic medium with variable boundary / V. G. Zvyagin, V. P. Orlov // Boundary Value Problems, 2005. — I. 3. — P. 215—245.

8. *Бетчов Р.* Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале — М. : Мир, 1971. — 350 с.

9. *Осколков А. П.* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина—Фойгта / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1982. — Т. 115. — С. 191—202.

10. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Труды МИАН СССР, 1987. — Т. 179. — С. 126—164.

11. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1973. — Т. 38. — С. 98—136.

12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс — М. : Мир, 1972. — 587 с.

13. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская — М. : Наука, 1970.

14. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl., 1987. — V. 146. — P. 65—96.

15. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас — М. : Мир, 1978.

16. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам — М. : Мир, 1987.

17. *Дмитриенко В. Т.* Конструкции оператора регуляризации в моделях движения вязкоупругих сред / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Вестник ВГУ. Серия Физика, Математика, 2004. — № 2. — С.148—153.

Поступила в редакцию 1.10.2007