УДК 517.9

КОМПОЗИЦИИ РЕДУКЦИЙ В БИФУРКАЦИОННОМ АНАЛИЗЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Ю. И. Сапронов, Ф. А. Белых, А. Ю. Борзаков

Воронежский государственный университет

Объединяющая идея данной работы — композиция из двух или более редукций в бифуркационном анализе вариационных краевых задач, что означает переход от исходной (бесконечномерой) задачи к завершающей (конечномерной) за несколько редуцирующих переходов, в том числе и (вообще говоря) бесконечномерных. Промежуточные переходы могут осуществляться по различным схемам — Пуанкаре, Ляпунова—Шмидта, Морса—Ботта и их обобщениям. Среди рассмотренных примеров — задача о фазовых переходах в сегнетоэлектрических кристаллических средах, в которой использована либо редукция Дзялошинского, либо специальная схема, предназначенная для анализа бифуркаций экстремалей функционала из конечнократной критической точки в случае $\widetilde{\mathbb{Z}}_2^4$-симметрии и 4-мерного вырождения. С их помощью изучены характерные плоские сечения каустик и описаны расклады бифурцирующих критических орбит. Другие примеры связаны с анализом бифуркаций петлеобразных решений уравнения Эйлера—Пуассона на группах $SO(3)$ и $SL(2)$.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении равновесных состояний упругих систем, фазовых переходов в кристаллах, нелинейных волн в реагирующих средах и ряда других проблем современного естествознания естественным образом возникает вариационная задача

$$V_\lambda(x) \longrightarrow \inf, \tag{1}$$

в которой $V_\lambda(x)$ — гладкое семейство гладких функционалов (на банаховом пространстве E или гладком банаховом многообразии M), симметричное (инвариантное) относительно линейного действия T_g группы Ли G на E:

$$V_\lambda(T_g x) = V_\lambda(x) \forall x, \lambda, \tag{2}$$

λ — параметр со значениями в некотором банаховом пространстве L (конечномерном или бесконечномерном).

Фредгольмовость функционала V на E означает, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h \equiv \langle f(x), h \rangle, \tag{3}$$

где $f : E \longrightarrow F$ — гладкое фредгольмово отображение нулевого индекса банаховых пространств, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве H, содержащем E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства.

Фредгольмовость V на подмногообразии M означает фредгольмовость второго кодифференциала V на M [11].

При изучении бифуркаций решений вариационных задач, содержащих параметры, достаточно хорошо зарекомендовал себя метод конечномерной редукции [20], [11], который использован и в настоящей работе. Многие исследования таких задач проведены посредством применения модификаций схем Ляпунова—Шмидта и Морса—Ботта, специально разработанных для этих задач.

Метод конечномерной редукции играет важную роль в анализе нелинейных краевых задач, что связано с его уникальными возможностями в организации алгоритмического и компьютерного сопровождений.

Стержневая идея настоящей статьи — вторичная (повторная) редукции, означающая переход от исходной вариационной задачи к завершающей конечномерной за несколько редуцирующих переходов, в том числе и бесконечномерных. Промежуточные переходы могут осуществляться по различным схемам — Пуанкаре, Ляпунова—Шмидта, Морса—Ботта и их обобщениям.

Сначала опишем одну схему локальной конечномернй редукции, часто используемую в практике [11].

Рассмотрим потенциальное уравнение $f(x, \lambda) = 0$ с потенциалом $V(x, \lambda)$, $x \in E$,

$\lambda \in R^m$. Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, H — гильбертово, E непрерывно вложено в F, F непрерывно вложено в H и E плотно в H. Пусть, далее, $\Omega(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E, $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$ и $f(0,\lambda) = 0 \forall \lambda$. Предположим, что выполнены следующие два условия:

1) на $U(0)$ определен набор гладких нормированных в H функций из E (ведущих мод бифуркации) $\{e_i(\lambda)\}_{i=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)e_i(\lambda) = \alpha_i(\lambda)e_i(\lambda), \qquad (4)$$

где $\{\alpha_i(\lambda)\}_{i=1}^n$ — гладкие функции;

2) нуль является невырожденной критической точкой для сужения

$$V(x,\lambda)|_{x\in L_\lambda}, \quad L_\lambda = E \bigcap N_\lambda^\perp,$$

$N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение к $N_\lambda :=$ $:= span\{e_1(\lambda), e_2(\lambda), ..., e_n(\lambda)\}$ (в метрике H).

Для любого $x \in \Omega(0)$ положим $\xi_i(\lambda) =$ $= \langle x, e_i(\lambda)\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в H). Тогда

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i(\lambda)e_i(\lambda) + v(\lambda),\ v(\lambda) \perp e_i(\lambda)\ \forall i.$$

Аналогично, $f_i(x,\lambda) := \langle f(x,\lambda), e_i(\lambda)\rangle$ и

$$f(x,\lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x,\lambda)e_i(\lambda) + f_*(x,\lambda),$$
$$f_*(x,\lambda) \perp e_i(\lambda)\ \forall i.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \bigcap N_\lambda^\perp$. Из условия 2) следует, что $f_*(\cdot,0) : L_0 \to L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\Omega(0)$ точки $0 \in L_0$). По теореме о неявной функции, найдется такая гладкая функция $u = \Phi(\xi,\lambda)$, $(\xi,\lambda) \in \Omega^n(0) \times$ $\times \mathcal{U}(0), \Phi(\xi,\lambda) \in L_\lambda$, где $\Omega^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, что

$$f_*(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi,\lambda), \lambda) = 0\ \forall(\xi,\lambda) \in \Omega^n(0)\times\mathcal{U}(0).$$

Функция

$$W(\xi,\lambda) = V(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi,\lambda), \lambda) \qquad (5)$$

называтся ключевой для функционала $V(x,\lambda)$. Уравнение

$$f^n(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi,\lambda), \lambda) = 0$$

называется ключевым (уравнением разветвления). Достаточно близкая к нулю точка $a \in E$ является решением уравнения $f(x,\lambda) = 0$ при $\lambda = \bar\lambda$ тогда и только тогда, когда

$$a = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i + \Phi(\bar\xi, \bar\lambda),$$

где $\bar\xi$ — близкая к нулю критическая точка ключевой функции. При этом a — невырожденное решение уравнения $f(x,\lambda) = 0$ (невырожденная экстремаль функционала V) лишь одновременно с невырожденностью $\bar\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, как критической точки функции $W(\cdot,\bar\lambda)$. Таким образом, изучение решение уравнения $f(x,\lambda) = 0$ или экстремалей функционала V вблизи нуля сводится к анализу ветвления критических точек функции $W(\cdot,\lambda)$.

В приложениях возникает проблема вычисления ключевой функции W (точнее, ее тейлоровских разложений). Во многих случаях достаточно ограничиться несколькими первыми членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных задачах такое вычисление реализуется при помощи специальным образом выбранной ритцевской аппроксимации.

Ритцевской аппроксимацией функционала V, заданного на банаховом пространстве E, называется функция

$$W_R(\xi) = V(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i)\,\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации). Экстремалям $\bar\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ функции W соответствуют точки $\bar x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V.

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := span(e_1, ..., e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. Таким образом, схему Ляпунова—Шмидта можно рассматривать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации.

Построение ключевой функции можно осуществлять, используя переход к сужению функционала на квазиинвариантное подмногообразие [29]. Сужение на квазиинвариантное подмногообразие индекса нуль не изменяет свойства критических точек (индекс Морса, кратность, структура локального кольца особенности) [29].

Напомним, что подмногообразие $K \subset E$ называется квазиинвариантным относительно функционала V, если существует такая гладкая ретракция $p : O(K) \to K$, где $O(K)$ — окрестность K в E, что каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $J\,|_{p^{-1}(a)}$. Если K — конечномерное квазиинвариантное подмногообразие, то найдется такая окрестность $\widetilde{O}(K)$, что тройка $\{\widetilde{O}, K, p\}$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K и проекцией p. Таким образом, подмногообразие K является квазиинвариантным, если некоторая окрестность $O(K)$ гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $J\,|_{p^{-1}(a)}$, где p — проекция расслоения. Если каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $J\,|_{p^{-1}(a)}$, то K называется регулярным (морсовским) квазиинвариантным подмногообразием. Для всех точек связного морсовского квазиинвариантного подмногообразия K индекс Морса $J\,|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным и это постоянное значение называется индексом Морса квазиинвариантного подмногообразия K. Каждое инвариантное относительно J подмногообразие $K \subset E$ является квазиинвариантным (подмногообразие K называется инвариантным, если $grad\ V(a)$ принадлежит касательному пространству $T_a(K)$ для $\forall a \in K$).

При условии фредгольмовости индекса ноль функционала V каждое его компактное морсовское квазиинвариантное подмногообразие является структурно устойчивым: при гладком параметрическом возмущении $V_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^m, h_0 = 0,$ функционала V вблизи невозмущенного квазиинвариантного подмногообразия имеется диффеоморфное ему морсовское квазиинвариантное подмногообразие для V_λ (при всех достаточно малых λ) [29]. Значение индекса Морса квазиинвариантного подмногообразия при малом возмущении также сохраняется.

1. РЕДУКЦИИ В ЗАДАЧЕ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В КРИСТАЛЛАХ

Фазовые переходы в кристаллах изучаются, как известно (см., например, [18]), на основе математических моделей, в которых центральную роль играет форма термодинамического потенциала, подбираемого с учетом как общих теоретико-физических соображений, так и с учетом конкретных обстоятельств, сопутствующих изучаемому явлению.

В этом разделе использована редукция Дзялошинского и специальная редуцирующая схема, предназначенная для анализа бифуркаций экстремалей функционала из конечнократной критической точки в случае $\widetilde{\mathbb{Z}}_2^4$-симметрии и 4-мерного вырождения.

1.1. РЕДУКЦИЯ ДЗЯЛОШИНСКОГО (СВЕДЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА)

При рассмотрении двухкомпонентного параметра порядка в кристалле(например, при описании геликоидальных сегнетоэлектрических структур [18]) часто рассматривается потенциал

$$\Pi = \alpha(x_1^2 + x_2^2) + u_1(x_1^2 + x_2^2)^2 + u_2 x_1^2 x_2^2,$$

которому соответствует функционал энергии (действия)

$$\Phi = \int_0^\omega dz \left\{ \gamma \left[\left(\frac{dx_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dz} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \sigma \left(x_2 \frac{dx_1}{dz} - x_1 \frac{dx_2}{dz} \right) + \Pi(x_1, x_2) + \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 \right\},$$

рассматриваемый на пространстве ω-периодических функций. Сегнетоэлектрические фазы соответствуют экстремалям этого функционала. Их исследование можно проводить, применив одну из схем конечномерной редукции, то есть переходом к ключевой функции

$$W(\xi) := \inf_{x:p(x)=\xi} V(x), \qquad (6)$$

$p(x) = (p_1, \ldots, p_n)$, где $\{p_j\}_{j=1}^n$ — некоторый набор гладких функционалов (ключевых параметров).

Предположив сначала, что $\psi_1 = \psi_2 = 0$ (случай отсутствия внешних полей), перейдем, следуя [18], к полярным координатам в пространстве параметров порядка

$$x_1 = \rho \cos\varphi, \quad x_2 = \rho \sin\varphi.$$

Выражая через них подынтегральное выражение, получим

$$\Phi = \int_0^{\omega} dz \left\{ \gamma \left[\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \right] - \sigma\rho^2 \frac{d\varphi}{dz} + \right.$$

$$\left. + \alpha\rho^2 + u_1\rho^4 + \frac{u_2}{8}\rho^4(1-\cos 4\varphi) \right\}.$$

В соответствии с принципом наименьшего действия, стабильное равновесное распределение параметра порядка соответствует глобальнму минимуму этого функционала. Это означает, в частности, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_2}{4}\rho^3(1-\cos 4\varphi) + \gamma\rho\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 - \gamma\frac{d^2\rho}{dz^2} - \\ -\sigma\rho\frac{d\rho}{dz} + \alpha\rho + 2u_1\rho^3 = 0 \\ \gamma\rho^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\gamma\rho\frac{d\rho}{dz}\frac{d\varphi}{dz} - \sigma\rho\frac{d\rho}{dz} + \frac{u_2}{4}\rho^4\sin 4\varphi = 0 \end{aligned}\right\}$$

Решение последнего уравнения, полученное при дополнительном предположении

$$\frac{d\rho}{dz} \equiv 0, \tag{7}$$

называется *решением Дзялошинского* [18].

Условие (7) можно рассматривать как результат построения решения посредством сужения (редукции) функционала энергии на (квазиинвариантное) подмногообразие $\rho = const$. Второе уравнение последней системы превращается при этом в уравнение колебаний математического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \lambda\sin 4\varphi = 0, \lambda = \frac{u_2\rho^2}{4\gamma},$$

к которому можно применять нелокальные редуцирующие схемы [8]. Данный переход к уравнению колебаний маятника называется *редукцией Дзялошинского*.

При наличии внешних полей аналогичная редукция приводит к неоднородному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \lambda\sin 4\varphi = q.$$

Аналогичные уравнения рассматриваются в теории нелинейных колебаний.

1.2. НЕЛОКАЛЬНЫЙ БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ 2-ТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

Наряду с уравнением колебаний маятника в теории нелинейных колебаний часто рассматривается уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \lambda x - x^3 = q(t).$$

Внешне эти уравнения очень «похожи». Последнее из них вполне можно рассматривать как приближение первого, полученное заменой нелинейности отрезком ее разложения (в нуле) в ряд Тейлора. Эти уравнения имеют общую линеаризованную задачу и т.д. Локальный анализ этих уравнений дает схожие результаты. При нелокальном рассмотрении эти уравнения обнаруживают существенные разлиия.

Для нас более существенно то, что эти уравнения принадлежат некоторому общему классу, для которого унифицированно выполняются такие свойства, как глобальная редуцируемость, трансверсальность особенностям и т.д. Уравнения Дуффинга и движения маятника безусловно интересны сами по себе, тем не менее было бы неправильным не видеть в их выборе, в выборе их правых частей шага «навстречу теории», точнее — обоснованному ее применению. Такое обоснование может являться не только достаточно трудоемким, но и не всегда возможным в удовлетворительной полноте на данный момент. Поэтому не будет лишним помнить и о более широком контексте, в котором имеют свое место точные конечномерные редукции.

Сведение задачи к более простой — естественный методологический прием. Обычной его проблемой является не столько проблема обоснования, сколько оценка места полученных результатов в изучаемом явлении. Обычно это знание приходит из практики, закрепляя на будущее подобный шаг в исследовании и прочих задач. Так вполне естественным приемом стал поиск решения типа «бегущей волны». Сродни ему широко известные куэттовские течения жидкости.

Заменив уравнение маятника на уравнение Дуффинга, мы получаем экономию вычислительных затрат. Правую часть будем брать в виде линейной комбинации $q(t) = q_1e_1(t) + \ldots + q_ke_k(t)$ первых гармоник тригонометрического базиса в пространстве F, заданном как область значений отображения, определяемого левой частью уравнения (с учетом краевых условий).

При $\lambda < (n+1^2)\pi^2$ рассмотренные уравнения допускают глобальную редукцию в (редуцирующей) системе функционалов $p_j(x) = \langle e_j, x\rangle$, $j = 1,\dots,n$ (по схеме Ляпунова—Шмидта).

Возможность редуцирования обосновывается через рассмотрение более широкого класса задач с потенциалами

$$V_{(\lambda,q)}(x) = \int_0^1 \left(\frac{|\dot{x}|^2}{2} - \lambda\frac{|x|^2}{2} + \omega(x,\lambda) + qx \right) dt,$$

$$x:[0,1] \to \mathbb{R}^n, \omega''(x,\lambda)(h,h) \ge 0 \ \forall x,\lambda. \quad (8)$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа такого функционала имеет вид

$$\ddot{x} + \lambda x - \frac{\partial\omega}{\partial x}(x,\lambda) = q,$$

его левая часть — фредгольмово отображение индекса 0 из

$$E = \left\{ x \in C^2([0,1],\mathbb{R}^n) : x(0) = x(1) = 0 \right\}$$

в $F = C([0,1],\mathbb{R}^n)$, служащая градиентом функционала относительно $H = L_2([0,1])$ (в смысле выполнения соотношения $\langle \operatorname{grad} V_\delta(x), h\rangle_H = \frac{\partial V_\delta}{\partial x}(x)h, (\forall x, h \in E)$).

Из неравенства Пуанкаре—Стеклова

$$\int_0^1 |\dot{x}|^2\, dt \ge \pi^2(k+1)^2 \int_0^1 |u|^2\, dt,$$

верного на $C^1_{[0,1]}$ при $\int_0^1 \sin(\pi j t)u(t)dt = 0$ $(j = 1,\dots,n)$, следует выпуклость функционала в слоях $p^{-1}(\xi)$, а выпуклость и коэрцитивность гарантируют существование невырожденной точки абсолютного минимума $\varphi(\xi)$ для $V_\delta(\cdot)|_{p^{-1}(\xi)}$.

Если левую часть уравнения представить как $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

$$f_1(x) = \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\, x, f_2(x) = \frac{\partial\omega}{\partial x}(x,\lambda),$$

то в основе схемы Ляпунова—Шмидта лежит разбиение уравнения в систему

$$\begin{cases} f_1(u) - P_{E_n}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x}(u+v,\lambda)\right) = q_1e_1 + \ldots + q_ne_n, \\ f_1(v) - P_{E_{\infty-n}}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x}(u+v,\lambda)\right) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $P_{E_n}, P_{E_{\infty-n}}$ — ортопроекторы на E_n и $E_{\infty-n}$. Для второго уравнения этой системы имеет место однозначная разрешимость по v при всяком u ($u + v \in E_n \oplus E_{\infty-n}$). Обозначив решение $v = \Phi(u)$, получим ключевую функцию в виде $W(u) = V\left(u + \Phi(u)\right)$.

1.3. ПОДХОДЫ К ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наличие оценок сходимости (в используемых методах) может оказаться, в некотором смысле, бесполезным — в силу трудностей технической реализации соответствующих итерационных процессов. Поэтому немалый интерес приобретают иные критерии оценки результатов численного эксперимента. Приведенные ниже условия вполне состоятельны с точки зрения эксперимента:

• «подчинение» каустики и раскладов критических точек известному правилу изменения числа критических точек при трансверсальном пересечении стратов каустики в общем положении (не в особых точках и не в точках самопересечения);

• стабилизация итерационного метода — адекватное стремление к нулю норм разности соседних итераций при увеличении их числа (аналог требований классических условий сходимости);

• соответствие результатам, полученным другими методами.

В последнем случае, конечно, мы отдаем себе отчет в том, что категория соответствия здесь «слабо формализована» (часто приходится говорить о топологической эквивалентности, возможно и «ослабленной»).

1.3.1. РИТЦЕВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И КОНЕЧНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ.

Рассмотренную нами выше ритцевскую аппроксимацию функционала можно считать естественным развитием метода приближений, основанного на тейлоровском разложении функции (через рассмотрение отрезка ее ряда Тейлора). И как бы ни был он груб, но хотя бы для очень приблизительной проверки результатов можно использовать и его.

Для уравнения Дуффинга (после соответствующих замен) ритцевская аппроксимация $W_R(\xi) := V(\xi_1e_1 + \xi_2e_2)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\xi_1^4 + \xi_2^4 + 2a\xi_1^2\xi_2^2}{4} - \frac{\delta\xi^2 + (\pi^2+\delta)\xi^2}{2} + \varepsilon_1\xi_2 + \varepsilon_1\xi_2.$$

Наряду с исходной задачей для неоднородного уравнения Дуффинга опишем ее конечномерный аналог, получаемый дискретизацией, то есть рассмотрением вместо неизвестной функции набора ее значений в узлах равномерной сетки $x_k = x(\frac{k}{n}), k = 0,\dots,n+1$, или, что то же самое, заменой интегрального функционала интегральной суммой (в обоих случаях соответствующие производные выражены через правые разностные отношения)

$$\tilde{V} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\frac{1}{n+1}}\right)^2 - \lambda\sum_{k=0}^{n}\frac{x_{k+1}^2}{2} + \right.$$
$$\left. +\sum_{k=0}^{n}\frac{x_{k+1}^4}{4} + \sum_{k=0}^{n}x_{k+1}\left(q_1e_1+q_2e_2\right)\big|_{t=\frac{k+1}{n+1}}\right).$$

Несмотря на очевидность и простоту схемы, оказывается, что данная модель не просто описывает внешние рамки, которые в пределе охватывают исходную задачу, но и определенным образом составляет «скелет» исходной задачи, конституируя во—многом ее содержание и свойства, что особенно понятно, если унифицированно формализовать оба подхода.

1. Для исходной задачи: $q = q_1e_1 + q_2e_2$, $A = \frac{d^2}{dx^2}$, $\langle x, y\rangle = \int_0^1 xydt.$

Для конечномерной модели: $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ $(x_0 = x_{n+1} = 0)$, $q = (q_1,\ldots,q_n)$, $q_k = q(\frac{k}{n+1})$,

$$A = (n+1)^2\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \mathbb{O} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ldots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbb{O} & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Исходная задача. Для оператора A известны собственные значения и функции:

$$\lambda_k = -(\pi k)^2, e_k = \sqrt{2}\sin(\sqrt{-\lambda_k}t).$$

Конечномерная модель. Задача на отыскание собственных значений и векторов для A далеко не очевидна в вычислительном аспекте, который, однако, легко обходится, если рассмотреть действие A на дискретизацию собственных функций оператора исходной модели. Таким путем мы получим:

$$\omega_k = \frac{\pi k}{n+1}, \lambda_k = 2(1-\cos(\omega_k))(n+1)^2,$$
$$e_k = (\sin(\omega_k), \sin(2\omega_k), \ldots, \sin(n\omega_k)).$$

Замечательно и то, что при $n \to \infty$ значения λ_k в обеих моделях совпадают.

3. Исходная задача. Используем следующую форму записи для функционала:

$$V = \frac{\langle Ax, x\rangle}{2} - \lambda\frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|x^2\|^2}{2} + \langle q, x\rangle. \quad (10)$$

Конечномерная модель. Если задать скалярное произведение с помощью обычного, как $\langle x, y\rangle = \frac{1}{n+1}(x, y)$ (собственные векторы сразу становятся единичной длины), то нашу функцию также можно представить в виде (10).

Для дальнейшего рассмотрения конечномерной модели отметим, что, в отличие от исходной, ее вид (развернутая запись) не согласован с базисом из собственных векторов оператора A. Если перейти к базису из нормированных (в стандартной метрике[1]) собственных векторов, то это не нарушит полученную форму (10).

Общность записи исходной и конечномерной задач наводит на мысль о сведении задачи к меньшему числу переменных. Действительно, в нашем случае выполнены условия к применению редуцирующей схемы Пуанкаре [11]. То есть, вместо задачи $\tilde{V}(\xi_1,\ldots,\xi_n) \to extr$ можно рассмотреть задачу

$$W(\xi_1,\xi_2) = \inf_{\xi_3,\ldots,\xi_n}\tilde{V} \to extr. \quad (11)$$

Согласование с базисом из собственных функций оператора A приводит к тому, что (q_1, q_2) входят «привычным» для нас образом в функционал энергии, в уравнения нулей градиента и параболических точек, что позволяет достаточно просто описать каустику[2].

1.3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Применив указанные соображения для получения ключевой функции по схеме Ляпунова—Шмидта, мы ограничимся второй итерацией (то есть получением $W_2(\xi_1,\xi_2)$ в принятых прежде обозначениях). Приведем результаты вычислений графических изображений параболических множеств, каустик и линий уровней ключевой функции, опубликованные в [8] (рис. 1—6).

При увеличении λ наблюдается некоторая перестройка каустики (рис. 7—9).

Для новой компоненты связности дополнения к каустике — картина линий уровня и, соответственно, критических точек:

1.4. БИФУРКАЦИИ СЕГНЕТО-ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФАЗ КРИСТАЛЛА ИЗ ТОЧКИ 4-МЕРНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ (В ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ)

Здесь описан другой подход к изучению бифуркаций сегнетоэлектрических фаз крис-

---

[1] Такое рассмотрение удобней, поскольку именно в этой метрике ортонормирован исходный базис $\mathbb{R}^n$.

[2] Переход (11) осуществлен при каждой фиксированной паре (ξ_1, ξ_2) численным отысканием нулей градиента по остальным переменным, на основании единственности экстремума.

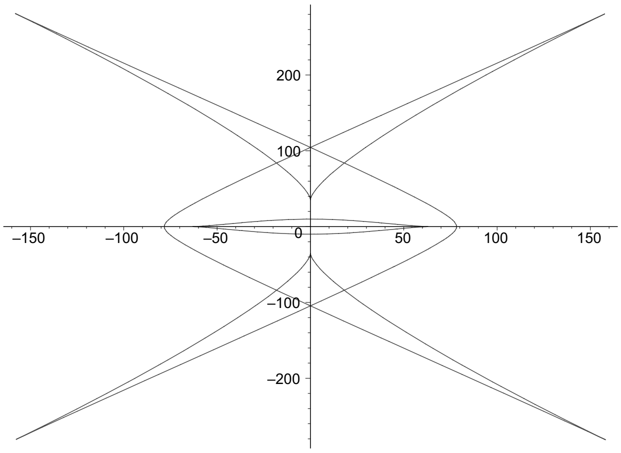

Рис. 1. Каустика ритцевской аппроксимации при $\lambda = 4\pi^2 + 10$ для уравнения Дуффинга

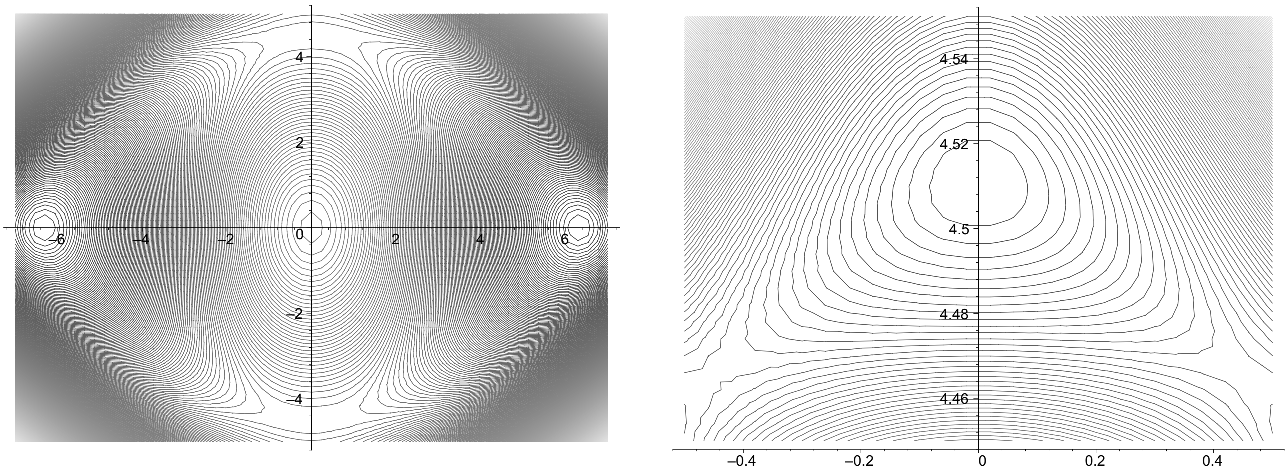

Рис. 2. Линии уровня ритцевской аппроксимации однородной задачи при $\lambda = 70$

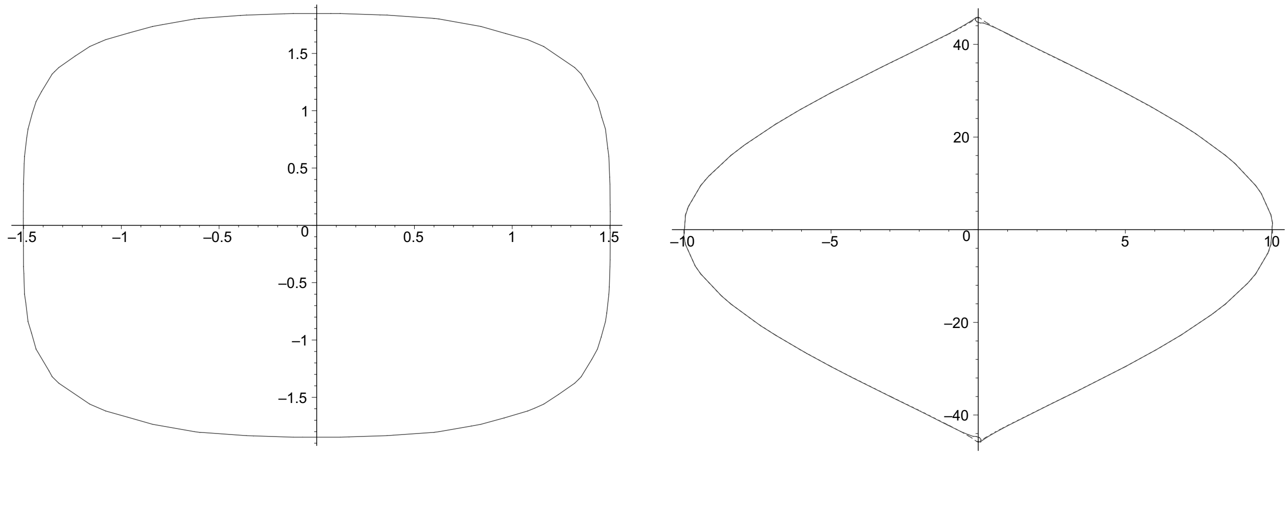

Рис. 3. Параболическое множество и каустика $\tilde{W}_2(\xi_1)$ и $\tilde{W}_4(\xi_1)$ при $\lambda = \pi^2 + 10$

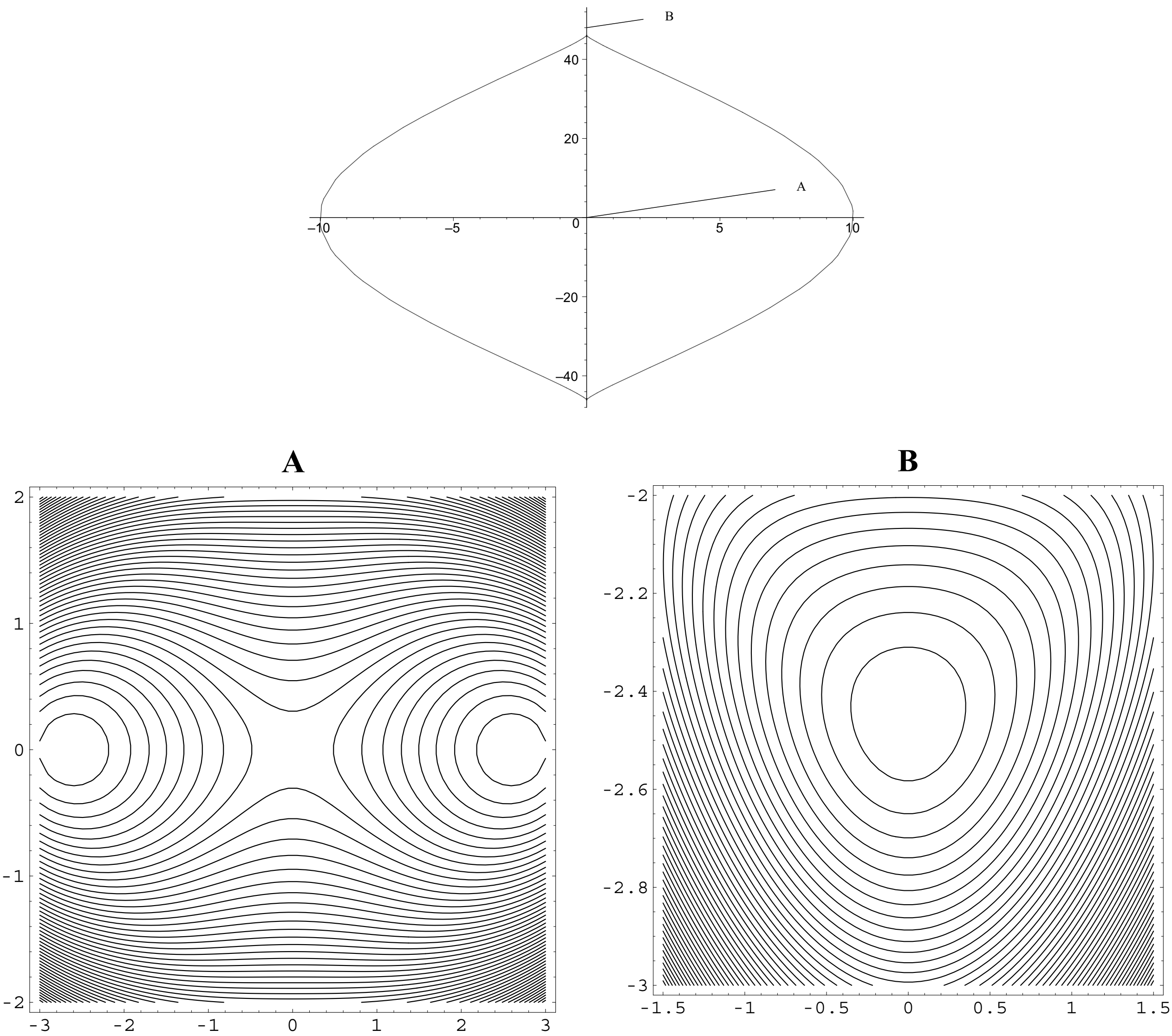

Рис. 4. Линии уровня $\tilde{W}_2(\xi_1)$ для соответствующих областей дополнения к каустике

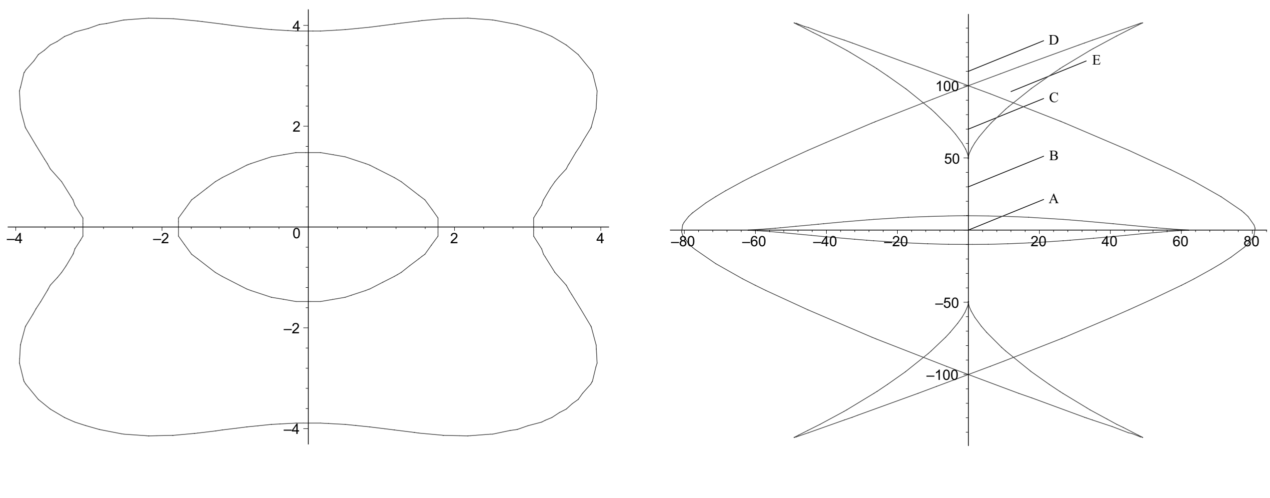

Рис. 5. Параболическое множество и каустика $\tilde{W}_2(\xi_1, \xi_2)$ при $\lambda = 4\pi^2 + 10$

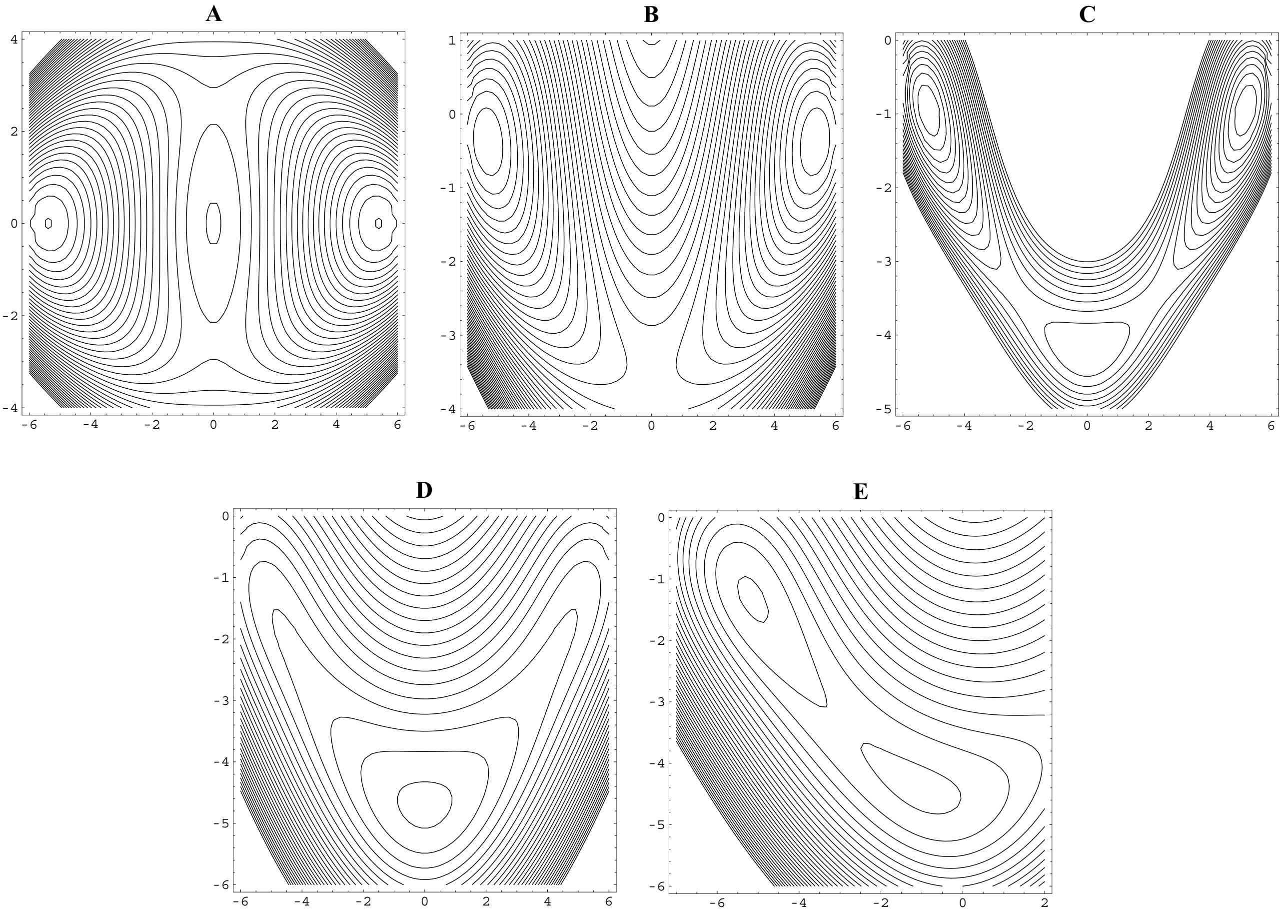

Рис. 6. Линии уровня $\tilde{W}_2(\xi_1, \xi_2)$ для соответствующих областей дополнения к каустике

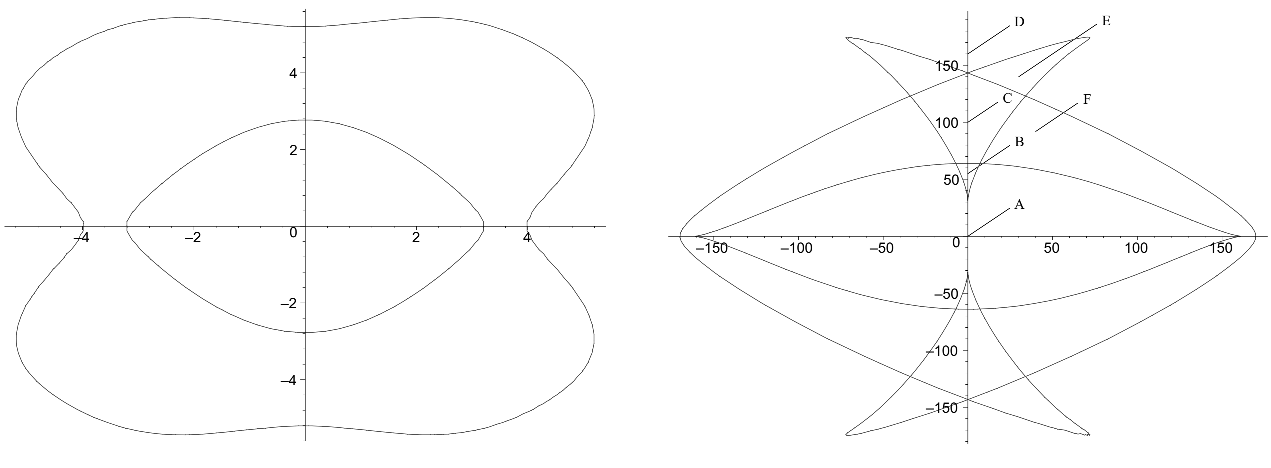

Рис. 7. Параболическое множество и каустика $\tilde{W}_2(\xi_1, \xi_2)$ при $\lambda = 7\pi^2 + 5$.

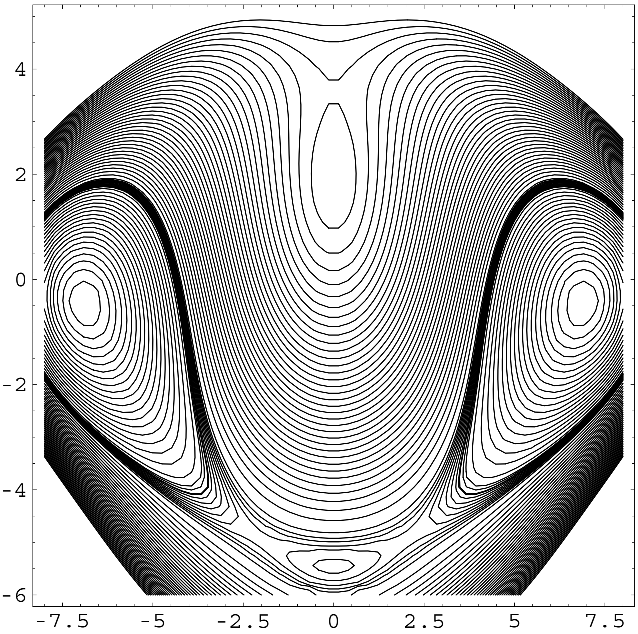

Рис. 8 Линии уровня $\tilde{W}_2(\xi_1,\xi_2)$ для новой области дополнения к каустике

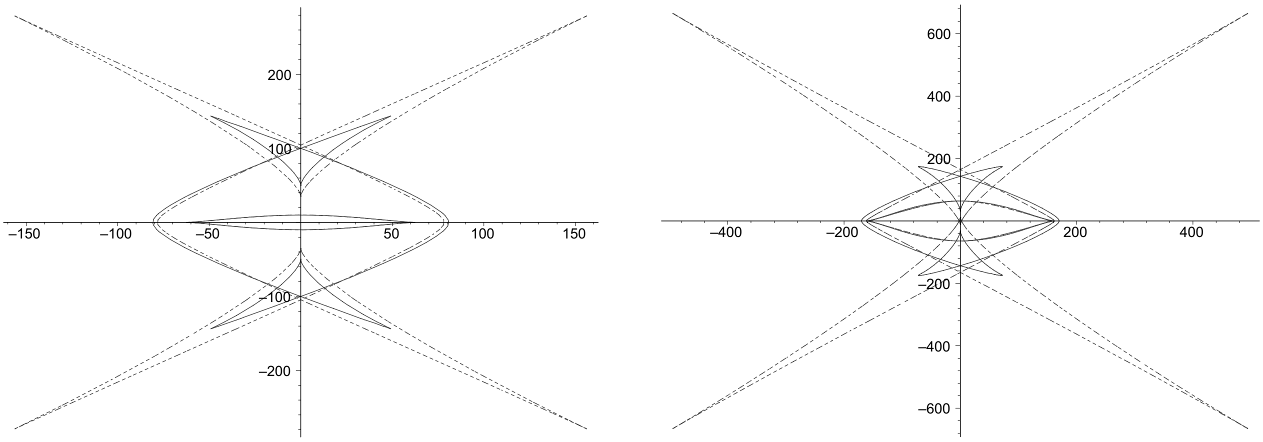

Рис. 9 Каустика для ритцевской аппроксимации (пунктиром) и $\tilde{W}_2(\xi_1,\xi_2)$ при $\lambda = 4\pi^2 + 10{,}7\pi^2 + 5$

талла в случае геликоидальной модели сегнетоэлектрической структуры кристалла (с двухкомпонентным параметром порядка) [18]. Фазовые переходы в кристаллах изучаются, как известно (см., например, [18]), на основе математических моделей, в которых ведущую роль играет алгебраическая форма термодинамического потенциала. Как правило, термодинамический потенциал подбирается не только из общих теоретических или физических соображений, но и с учетом конкретных обстоятельств, сопутствующих изучаемому явлению.

Ниже рассмотрен термодинамический потенциал

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\alpha\left|w\right|^2 + \frac{1}{2}\left|w\right|^4 + \beta w_1^2 w_2^2\right), \quad w := (w_1, w_2)^\top .$$

Сегнетоэлектрические фазы, соответствующие экстремалям функционала действия при краевых условиях

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0,$$

определяются уравнением $f(x) = 0$, где

$$f(x) := \frac{d^4 w}{dz^4} + \gamma\,\frac{d^2 w}{dz^2} + \operatorname{grad}\Pi(w).$$

Исследование уравнения можно провести, перейдя к ключевой функции, которая при локализации параметров $\alpha = 4\pi^2 + \delta_1, \gamma = 5\pi^4 + \delta_2$ и подходящем подборе ключевых параметров (в схеме Ляпунова—Шмидта) ключевая функция допускает представление в виде

$$\frac{1}{4}\left(\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2+\left(\xi_3^2+\xi_4^2\right)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\alpha_1\xi_1^2\xi_3^2+\alpha_2\xi_2^2\xi_4^2+\alpha_3(\xi_1^2\xi_2^2+\xi_3^2\xi_4^2)+\right.$$
$$++\alpha_4(\xi_1^2\xi_4^2+\xi_2^2\xi_3^2)\Big)+\alpha_5\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4+\frac{\delta_1}{2}(\xi_1^2+\xi_3^2)+$$
$$+\frac{\delta_2}{2}(\xi_2^2+\xi_4^2)+o(|\,\xi\,|^5)+O(|\,\xi\,|^4)O(\delta)+o(\delta).$$

Далее описана методика вычисления критических точек ключевой функции, основанная на введении двух систем полярных координат — в плоскости первой и второй ключевых координат (по первой и второй модам бифуркации), и, соответственно, в плоскости третьей и четвертой ключевых координат, с дальнейшей (вторичной) редукцией к функции от двух радиальных переменных.

1.4.1. ПЕРЕХОД К КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ

Итак, в случае двухкомпонентного параметра порядка при описании геликоидальных сегнетоэлектрических структур [18] иногда используется потенциал

$$\Pi=\frac{1}{2}\left(\alpha|w|^2+\frac{1}{2}|w|^4+\beta w_1^2w_2^2\right),\ w:=(w_1,w_2)^\top,$$

входящий в лагранжиан

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2w}{dz^2}\right|^2-\gamma\left|\frac{dw}{dz}\right|^2\right)+\Pi(w)$$

функционала энергии

$$V=\int_0^1\mathcal{L}\left(\frac{d^2w}{dz^2},\frac{dw}{dz},w\right)dz.$$

Сегнетоэлектрические фазы, соответствующие экстремалям этого функционала при краевых условиях

$$w(0)=w(1)=w''(0)=w''(1)=0, \qquad (12)$$

определяются уравнением

$$f(x)=0,\ x\in E,\ f(x)\in F, \qquad (13)$$

где

$$f(x):=\frac{d^4w}{dz^4}+\gamma\frac{d^2w}{dz^2}+\operatorname{grad}\Pi(w).$$

Отображение f рассматривается как нелинейный оператор, действующий из банахова пространства

$$E:=\{w\in C^2[0,1]\mid w(0)=w(1)=w''(0)=w''(1)=0\}$$

(пространства дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих краевым условиям (12)) в банахово пространство $F:=C^0[0,1]$ (пространство непрерывных функций на $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{R}^2$). Исследование уравнения (13) можно проводить, применив одну из схем конечномерной редукции [7]—[11], то есть переходом к ключевой функции

$$W(\xi):=\inf_{x:g(x)=\xi}V(x), \qquad (14)$$

где $g(x)=(g_1(x),\dots,g_n(x))$, $\{g_j\}_{j=1}^n$ — некоторый набор гладких функционалов (ключевых параметров).

1.4.2. ГРУППА СИММЕТРИЙ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ И НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ГЛАВНОЙ ЧАСТИ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ

Группой симметрий исходного уравнения (13) является группа $G=\overbrace{\mathbb{Z}}^{4}_{2}:=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, действие которой порождено следующими (базисными) инволюциями:

$$J_1:\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-w_1\\w_2\end{pmatrix},J_2:\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w_1\\-w_2\end{pmatrix},$$
$$J_3:\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w_2\\w_1\end{pmatrix},J_4:\begin{pmatrix}w_1(x)\\w_2(x)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w_1(2\pi-x)\\w_2(2\pi-x)\end{pmatrix}.$$

При локализации параметров

$$\gamma=5\pi^2+\delta_1,\alpha=4\pi^4+\delta_2,$$

получаем в нуле 4-мерное вырождение со следующими модами бифуркации (направлениями потери стабильности):

$$e_1=\begin{pmatrix}s_1(x)\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}s_2(x)\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\s_1(x)\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\s_2(x)\end{pmatrix},$$

где

$$s_1(x)=\sqrt{2}\sin(\pi x),s_2(x)=\sqrt{2}\sin(2\pi x).$$

В линейной оболочке $\mathcal{N}=Span(e_1,e_2,e_3,e_4)$, естественно отождествляемой с $\mathbb{R}^4$ (пространством ключевых параметров), индуцируется действие группы $\widetilde{\mathbb{Z}}_2^4$. Образ этой группы в $SO(4)$ также обозначим G.

Теорема 1. *Ключевая функция*

$$W(\xi):=\inf_{x:g(x)=\xi}V(x),\ \xi\in\mathbb{R}^4, \qquad (15)$$

где

$$g(x)=(g_1,g_2,g_3,g_4)^\top,\ g_j(w):=\left\langle w,e_j\right\rangle$$

($\left\langle w,e_j\right\rangle=\int_0^{2\pi}we_jdx$), наследует симметрию функционала V в следующем уточненном смысле:

функция W симметрична (инвариантна) относительно ортогонального действия группы $\widetilde{\mathbb{Z}}_2^4$ в $\mathbb{R}^4$, порожденного матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство этой теоремы нетрудно провести, если воспользоваться теоремами о наследовании симметрий ключевыми функциями [11] и проверить, что действие группы G в пространстве ключевых координат порождено перечисленными выше матрицами $\{U_j\}$.

Теорема 2. *Ключевая функция $W(\xi)$ в некоторой ортогональной системе координат имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 + \xi_4^4 + 2\alpha_1\xi_1^2\xi_3^2 + 2\alpha_2\xi_2^2\xi_4^2 + \right. \\ &+2\alpha_3(\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_3^2\xi_4^2) + 2\alpha_4(\xi_1^2\xi_4^2 + \xi_2^2\xi_3^2) + \\ &+\alpha_5\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) + \frac{1}{2}\left(\delta_1(\xi_1^2 + \xi_3^2) + \delta_2(\xi_2^2 + \xi_4^2)\right) + \\ &+o(|\xi|^5) + O(|\xi|^4)O(\delta) + o(\delta), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\alpha_j, \beta, \delta_k$ — некоторые линейные функции (явно вычисляемые) от исходных параметров.

Доказательство проводится традиционным способом — через построение порождающей системы инвариантов. Одной из таких систем является, как нетрудно проверить, следующий набор многочленов:

$$\xi_1^2 + \xi_3^2, \xi_2^2 + \xi_4^2, \xi_1^2\xi_3^2, \xi_2^2\xi_4^2, \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_3^2\xi_4^2, \xi_1^2\xi_4^2 + \xi_2^2\xi_3^2, \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4.$$

1.4.3. СТРУКТУРА ОРБИТ ДЕЙСТВИЯ G В ПРОСТРАНСТВЕ КЛЮЧЕВЫХ КООРДИНАТ

Итак, следующие преобразования (принадлежащие группе G) оставляют функцию W без изменений:

$$\begin{aligned} &w(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = w(-\xi_1,-\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \\ &= w(\xi_1,\xi_2,-\xi_3,-\xi_4) = w(-\xi_1,\xi_2,-\xi_3,\xi_4) = \\ &= w(\xi_1,-\xi_2,\xi_3,-\xi_4) = w(-\xi_1,\xi_2,\xi_3,-\xi_4) = \\ &= w(\xi_1,-\xi_2,-\xi_3,\xi_4) = w(-\xi_1,-\xi_2,-\xi_3,-\xi_4) = \\ &= w(\xi_3,\xi_4,\xi_1,\xi_2) = w(-\xi_3,-\xi_4,\xi_1,\xi_2) = \\ &= w(\xi_3,\xi_4,-\xi_1,-\xi_2) = w(-\xi_3,\xi_4,-\xi_1,\xi_2) = \\ &= w(\xi_3,-\xi_4,\xi_1,-\xi_2) = w(-\xi_3,\xi_4,\xi_1,-\xi_2) = \\ &= w(\xi_3,-\xi_4,-\xi_1,\xi_2) = w(-\xi_3,-\xi_4,-\xi_1,-\xi_2). \end{aligned}$$

Группа G состоит из 16 элементов, под действием которых пространство переменных $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ разбивается на подмножества — орбиты группы. Представляет интерес вопрос сколько существует типов орбит. С этим вопросом тесно соприкасается вопрос о структуре самой группы G. Пусть $g_1 = e$ — единичный элемент G, и пусть g_2, g_3, g_4, g_5 — элементы из указанного выше списка образующих, $g_6 = g_2 \cdot g_3$ — пятый элементы группы. В качестве шестого, седьмого и т.д. элементов рассмотрим $g_7 = g_4 \cdot g_5$, $g_8 = g_4 \cdot g_3$, $g_9 = g_4 \cdot g_2$, $g_{10} = g_5 \cdot g_2$, $g_{11} = g_5 \cdot g_3$; $g_{12} = g_5 \cdot g_4$; $g_{13} = g_5 \cdot g_4$; $g_{14} = g_5 \cdot g_6$; $g_{15} = g_5 \cdot g_7$; $g_{16} = g_5 \cdot g_8$. Группа является коммутативной, и, как мы видим, порождается четырьмя элементами: g_2, g_3, g_4, g_5. Действие каждого элемента группы на $\mathbb{R}^4$ (пространстве ключевых переменных) выделяет стационар (стационарное подпространство), точки которого остаются на месте под действием этого элемента. Так для g_2 — это плоскость $\xi_3 = \xi_4 = 0$. Возьмём точку, принадлежащую этой плоскости и, рассмотрев ее орбиту

$$\begin{array}{ccccccc} (\xi_1,\xi_2,0,0) & \leftrightarrow & (-\xi_1,\xi_2,0,0) & \leftrightarrow & (\xi_1,-\xi_2,0,0) & \leftrightarrow & (-\xi_1,-\xi_2,0,0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (0,0,\xi_1,\xi_2) & \leftrightarrow & (0,0,-\xi_1,\xi_2) & \leftrightarrow & (0,0,\xi_1,-\xi_2) & \leftrightarrow & (0,0,-\xi_1,-\xi_2), \end{array}$$

получим восемь различных точек (при условии $\xi_1^2 \neq \xi_2^2, \xi_1\xi_2 \neq 0$) вместо 16 (всего элементов в группе). То есть наложенное ограничение выделяет подмножество, точки которого задают орбиты, состоящие не более чем из восьми точек. К этому же подмножеству можно прийти, отталкиваясь от стационара $g_5 : \xi_1 = \xi_2 = 0$. Аналогично g_4 и g_7 порождают стационары $\xi_1 = \xi_4 = 0$ и $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Произвольной точке $(\xi_1, 0, \xi_3, 0)$ стационара $g_3 : \xi_2 = \xi_4 = 0$ соответствует орбита

$$(\xi_1,0,\xi_3,0), (-\xi_1,0,\xi_3,0), (\xi_1,0,-\xi_3,0), (-\xi_1,0,-\xi_3,0),$$
$$(\xi_3,0,\xi_1,0), (-\xi_3,0,\xi_1,0), (\xi_3,0,-\xi_1,0), (-\xi_3,0,-\xi_1,0),$$

— не более, чем восемь различных точек. Стационар g_3 совпадает с подпространством, порождённым действием группы на это подпространство, для g_6 стационарное подпространство так же совпадает с порождаемым множеством $\xi_1 = \xi_3 = 0$. Для элементов $g_8, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{15}$ стационарным подпространством является

$\{0\}$ — одноточечное подмножество. Стационарное подпространство g_9: $\{\xi_1 - \xi_3 = \xi_2 - \xi_4 = 0\}$ под действием группы переходит в себя. Это же множество также порождается стационарным подпространством элемента g_{16}: $\xi_1 + \xi_3 = = \xi_2 + \xi_4 = 0$. Оставшиеся два элемента g_{11} и g_{14} имеют своими стационарами подпространства $\xi_1 - \xi_3 = \xi_2 + \xi_4 = 0$ и $\xi_1 + \xi_3 = \xi_2 - \xi_4 = 0$.

Любой точку, принадлежащая пересечению любой пары рассмотренных подмножеств, соответствует орбита из четырёх элементов.

Итак, пространство ключевых параметров $\mathbb{R}^4$ разбивается на не пересекающиеся подмножества следующих типов:

1. Орбита из одного элемента $\{0\}$.
2. Орбиты из четырех элементов. Эти подмножества принадлежат объединениям пар ортогональных прямых.
3. Здесь орбиты состоят из восьми точек.
4. Это орбиты «общего положения», состоящие из 16 точек.

1.5. ВТОРИЧНЫЕ РЕДУКЦИИ (В ПРОСТРАНСТВЕ КЛЮЧЕВЫХ КООРДИНАТ)

Анализ ключевой функции (16) в полном объеме представляется весьма сложной задачей. Если же воспользоваться методом вторичных редукций [11] (на квазиинвариантные подмногообразия [29]), то можно разыскать и изучить ветвление большого количествай критических точек, представляющих реальный интерес для исходной задачи.

Изучение экстремалей и многообразий уровней гладкого функционала часто можно осуществлять, перейдя к сужению функционала на квазиинвариантное подмногообразие. Критические точки сужения остаются критическими и для функционала в целом. Сужение на квазиинвариантное подмногообразие индекса нуль не изменяет свойства критических точек (индекс Морса, кратность, структура локального кольца особенности). Имеется прямая связь между топологическими строениями многообразий уровней исходного функционала и его сужения. Сужение на квазиинвариантное подмногообразие полезно, например, при изучении поведения функционала в условиях разрушения непрерывной симметрии: компактные морсовские критические орбиты превращаются в квазиинвариантные подмногообразия, диффеоморфные исходным орбитам.

1.5.1. СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ИЗ ТОЧКИ МИНИМУМА ТИПА 2-МЕРНОЙ СБОРКИ.

Для построения квазиинвариантных относительно функции (16) подмногообразий в $\mathbb{R}^4$ воспользуемся полярными координатами в плоскостях ξ_1, ξ_3 и ξ_2, ξ_4. Предварительно представим функцию (16) в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\left(\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)^2+\left(\xi_3^4+\xi_4^4\right)^2\right)+\\ \frac{1}{2}\left(\alpha_1\xi_1^2\xi_3^2+\alpha_2\xi_2^2\xi_4^2+\alpha_3(\xi_1^2\xi_2^2+\xi_3^2\xi_4^2)+\right.\\ \left.+\alpha_4(\xi_1^2\xi_4^2+\xi_2^2\xi_3^2)+\alpha_5\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\right)+\\ +\frac{1}{2}\left(\delta_1(\xi_1^2+\xi_3^2)+\delta_2(\xi_2^2+\xi_4^2)\right)+\\ +o(|\xi|^5)+O(|\xi|^4)O(\delta)+o(\delta).\end{gathered}\tag{17}$$

После замены

$$\xi_1 = r_1\cos(\varphi_1),\ \xi_2 = r_1\sin(\varphi_1),$$
$$\xi_3 = r_2\cos(\varphi_2),\ \xi_4 = r_2\sin(\varphi_2)$$

получим функцию с главной частью $\widetilde{W}(r,\varphi) =$

$$\begin{gathered}= r_1^4\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha_1}{2}\cos^2(\varphi_1)\sin^2(\varphi_1)\right)+\\ +r_2^4\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha_2}{2}\alpha_2\cos^2(\varphi_2)\sin^2(\varphi_2)\right)+\\ \frac{r_1^2r_2^2}{2}\left(\alpha_3\left(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)+\sin^2(\varphi_1)\sin^2(\varphi_2)\right)+\right.\\ \left.+\alpha_4\left(\cos^2(\varphi_1)\sin^2(\varphi_2)+\sin^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)\right)\right)+\\ +\beta\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_2)+\frac{1}{2}\left(\delta_1 2r_1^2+\delta_2 r_2^2\right).\end{gathered}\tag{18}$$

В качестве квазиинвариантных подмногообразий для этой функции можно выбрать, например, следующие подмножества:

$$\mathcal{M}_0 := \{\varphi_1 = \varphi_2 = 0\},$$
$$\mathcal{M}_1 := \{\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4\},$$
$$\mathcal{M}_2 := \{\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4\},$$

Легко проверить, что каждое из этих подмножеств содержит лишь точки, стационарные по φ_1, φ_2, то есть во всех точках этих подмножеств выполняются равенства:

$$\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\varphi_2} = 0.$$

Сужая $\widetilde{W}$ на $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, получим (редуцированные) функции

$$\mathcal{W}_0(r), \mathcal{W}_1(r), \mathcal{W}_2(r),$$

анализ которых можно осуществить по стандартным методикам [11].

Каждая из этих функций обладает симметрией прямоугольного параллелограмма, то есть допускает представление в следующем виде:

$$W_0(\xi,\delta) = \\ = \frac{\lambda_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}\left(A\xi_1^4 + 2B\xi_1^2\xi_2^2 + C\xi_2^4\right). \tag{19}$$

После соответствующих масштабирующих преобразований получим нормализованную функцию (19):

$$\widetilde{U}(\xi,\delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}\left(\xi_1^4 + 2a\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4\right).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi,\delta)$ полностью определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi,\delta)$, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $2a$), четную по каждой переменной.

Критические точки определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\lambda}_1\xi_1 + \xi_1^3 + a\xi_1\xi_2^2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\lambda}_2\xi_2 + a\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

все решения которой делятся на три типа:

1) 0-решение $\xi_1 = \xi_2 = 0$,

2) 1-модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_1}(\lambda_1 < 0)$, $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 0, \xi_2 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_2}(\lambda_2 < 0)$,

3) 2-модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1 - a\tilde{\lambda}_2}{a^2-1}}$, $\xi_2 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - a\tilde{\lambda}_1}{a^2-1}}$, ($\tilde{\lambda}_1 - a\tilde{\lambda}_2 > 0, \tilde{\lambda}_2 - a\tilde{\lambda}_1 > 0$).

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - a\tilde{\lambda}_2, \theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - a\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\tilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + a\xi_2^2 & 2a\xi_1\xi_2 \\ 2a\xi_1\xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + a\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика (бифуркационная диаграмма функций [2]) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_1 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_2 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}, \\ \omega_3 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}, \\ \omega_4 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}, \\ \omega_5 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}. \end{aligned}$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (bif-расклад) бифурцирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле, для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

При обходе плоскости управляющих параметров против часовой стрелки вокруг нуля, начиная с зоны ω_0, соответствующие метаморфозы линий уровней и распределений критических точек при $a > 1$ изображены на диаграмме (рис. 10).

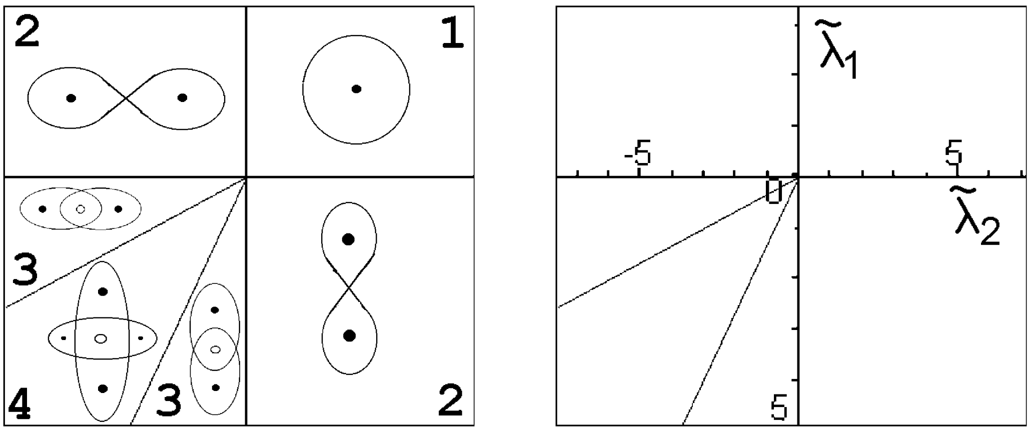

Рис. 10

В этом случае появляются те и только те расклады бифурцирующих критических точек (bif -расклады), которым соответствуют следующие целочисленные векторы: $(1,0,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,1)$, $(4,4,1)$ [3] (см. [11]).

1.5.2. КАУСТИКА В СЛУЧАЕ ЧЕТНОЙ ДЕФОРМАЦИИ min-ОСОБЕННОСТИ ТИПА 2-МЕРНОЙ СБОРКИ

Рассмотрим функцию двух переменных

$$u(x,y) = x^4 + 2\,a\,x^2\,y^2 + y^4 + \delta_1\,x^2 + 2\,\delta_2\,x\,y + \delta_3\,y^2$$

где $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ — малые вещественные параметры, $a > -1$. После замены $x = r\cos(\psi), y = r\sin(\psi)$ имеем

$$\tilde{u}(r,\psi) = u(r\cos(\psi), r\sin(\psi)) =$$
$$= (r^2\cos(\psi)^2 + r^2\sin(\psi)^2)^2 +$$
$$+2(a-1)r^4\cos(\psi)^2\sin(\psi)^2 + \delta_1 r^2\cos(\psi)^2 +$$
$$+2\delta_2 r^2\cos(\psi)\sin(\psi) + \delta_3 r^2\sin(\psi)^2 =$$
$$= \left(1 + b\sin(\varphi)^2\right)\rho^2 + \left(b_1\cos(\varphi) + b_2\sin(\varphi) + b_3\right)\rho,$$

где

$$\varphi = 2\psi,\ b = \frac{(a-1)}{2},\ r^2 = \rho,$$
$$b_1 = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2},\ b_2 = \delta_2,\ b_3 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2}.$$

Редуцируя по ρ, получим

$$\frac{\partial\hat{\hat{u}}}{\partial\rho}(\rho,\varphi) = 2\rho\alpha(\varphi) + \beta(\varphi) = 0,$$

где

$$\alpha(\varphi) = 1 + b(\sin(\varphi))^2,$$
$$\beta(\varphi) = b_1\cos(\varphi) + b_2\sin(\varphi) + b_3.$$

Следовательно, $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$ и для редуцированной функции получаем представление

$$w(\varphi) = \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\left(b_1\cos(\varphi) + b_2\sin(\varphi) + b_3\right)^2}{1 + b(\sin(\varphi))^2}.$$

Теорема 3. *Каустика функции $w(\varphi)$ совпадает с каустикой Σ функции $u(x,y)$.*

Множество вырожденных критических точек функции $w(\varphi)$ удовлетворяет отношениям

$$w' = \frac{\beta}{\alpha^2}(2\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0,$$
$$w'' = \frac{\beta}{\alpha^2}(2\alpha\beta'' + \alpha'\beta' - \alpha''\beta) +$$
$$+\frac{\alpha^2\beta' - 2\alpha\alpha'\beta}{\alpha^4}(2\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0,$$

которые приводят к следующим двум системам уравнений:

$$\beta = \beta' = 0,$$
$$2\alpha\beta' - \alpha'\beta = 2\alpha\beta'' + \alpha'\beta' - \alpha''\beta = 0.$$

Из первой системы уравнений получаем соотношения

$$b_1 = -b_3\cos(\varphi), b_2 = -b_3\sin(\varphi), b_3 = b_3,$$

а из второй —

$$b_1 = -\frac{bb_3}{1+b}\cos^3(\varphi),\ b_2 = bb_3\sin^3(\varphi),\ b_3 = b_3.$$

Нетрудно заметить, что эти системы задают конические поверхности. Так как $\beta \le 0$, $b_1\cos(\varphi) + b_2\sin(\varphi) + b_3 \le 0$, то, в силу последней системы, $b_3 \le 0$. Следовательно, в каустику входит лишь нижняя часть второго конуса.

Представление о строении каустики можно получить, рассмотрев в пространстве параметров b_1,b_2,b_3 сечения каустики плоскостью $b_3 = -1$. Конус будет представлен единичной окружностью (в плоскости параметров b_1,b_2), а вторая поверхность астроидой с осями зависящими от параметра b (по b_1 длина полуоси $\frac{b}{1+b}$, по b_2 длина b). В итоге получаем семь видов сечений (рис. 11).

В каждой ячейке регулярности (компоненте связности дополнения к каустике в секущей плоскости) количество критических точек неизменно. Ячейки регулярности обозначены на рисунках римскими цифрами. Внутри положительной полости конуса область с одной критической точкой.

1.5.3. КАУСТИКА В СЛУЧАЕ ДЕФОРМАЦИИ 2-МЕРНОЙ СБОРКИ, ЧЕТНОЙ ПО ОДНОЙ ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию, чётную по переменной x :

$$u(x,y) = x^4 + 2ax^2y^2 + y^4 + c_1x^2y + \delta_1x^2 + \delta_3y^2 - q_2y,$$

где $c_1,\delta_1,\delta_3,q_2$ — вещественные параметры, $a > -1$.

Необходимым и достаточным условием вырождения критической точки является система равенств

$$\frac{\partial u}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \det H = 0,$$

где H — матрица Гессе.

Проведя редукцию по переменной x , получим функции от одной переменной y . Находя и приравнивая нулю первую и вторую производную редуцированной функции, получим

[3] Компонента l_k строки (l_0,l_1,l_2) равна количеству критических точек с индексом Морса k в рассматриваемом раскладе бифурцирующих критических точек.

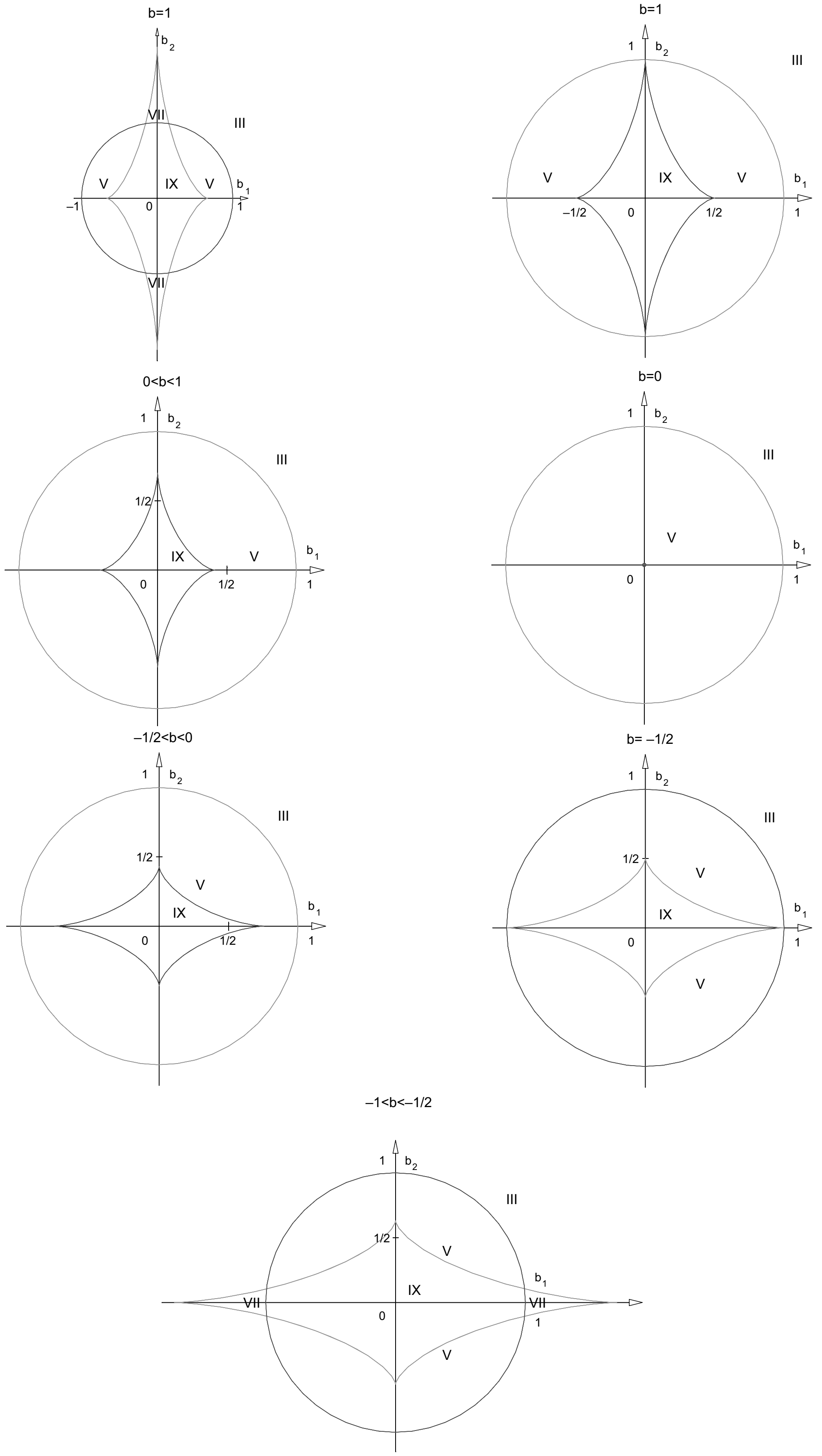

Рис. 11

систему соотношений, задающую поверхность в пространстве параметров $(c_1, \delta_1, \delta_3, q_2)$

Вычисления с помощью системы символьного программирования Maple с последующим построением графиков дают типы сечений, по которым можно составить представление о геометрической структуре каустики. На рис. 12. изображены лишь некоторые из них. Более подробное описание результатов компьютерного анализа будет приведено в отдельной статье.

2. КИРХГОФОВ СТЕРЖЕНЬ И ПЕТЛЕОБРАЗНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА НА ГРУППЕ ЛИ $SL(2)$

Этот раздел связан с исследованием кирхгофова стержня [27] (см. также [11]) и с исследованием модельной задачи — уравнения Эйлера—Пуассона на группе $SL(2)$ [4].

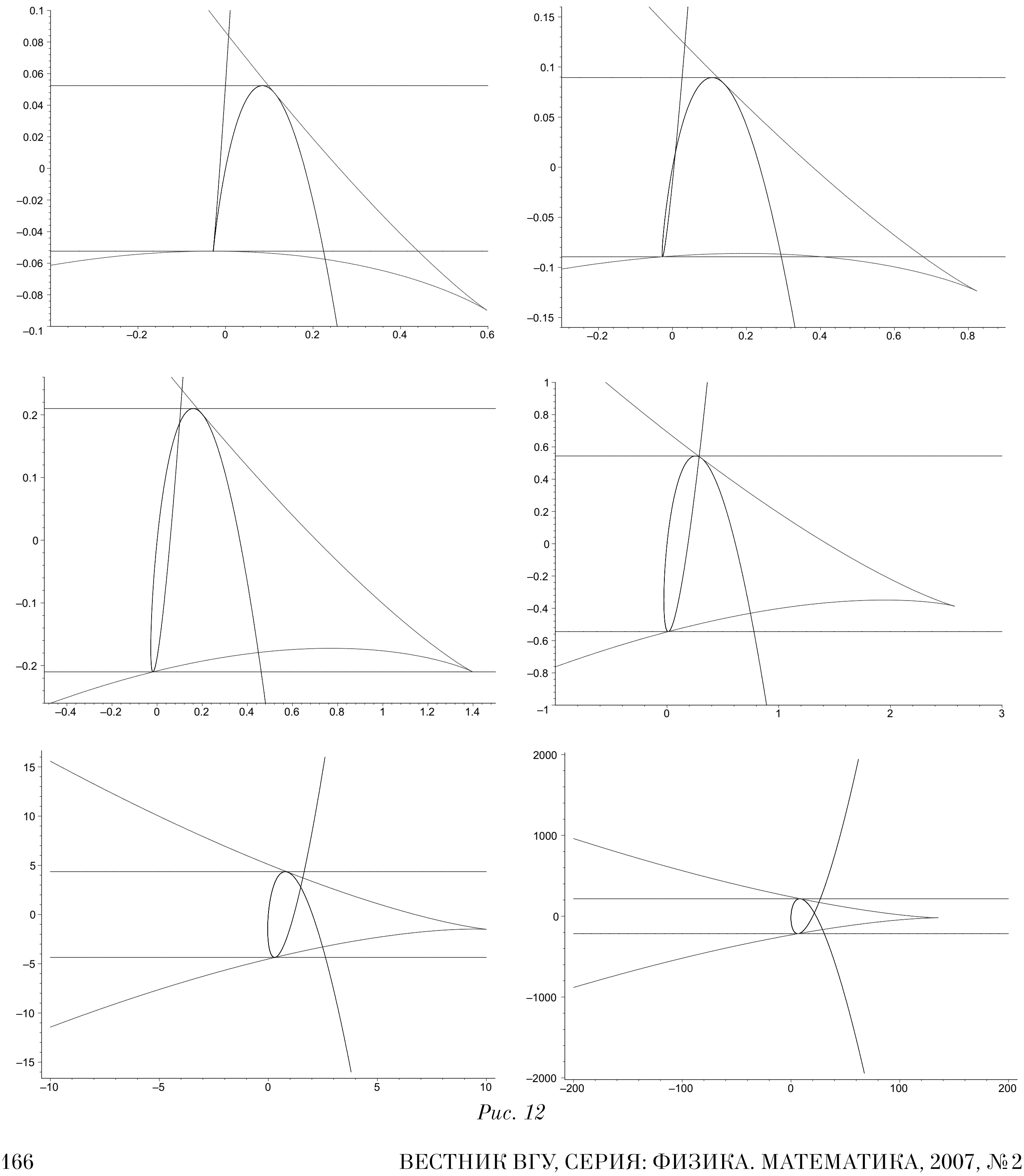

Рис. 12

2.1. ЭКСТРЕМАЛИ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ СИММЕТРИЧНОГО КИРХГОФОВА СТЕРЖНЯ

Равновесные конфигурации прямолинейного и продольно сжатого кирхгофова стержня длины единица с жестким закреплением концов описывается краевой задачей (см. [21], [22], [19], [11])

$$\begin{cases} A\dot{\omega} + [\omega, A\omega] + \lambda[f^{-1}r_3, r_3] = 0, \\ f(0) = f(1) = I. \end{cases} \qquad (20)$$

Здесь λ — параметр сжимающей нагрузки, $A = diag(A_1, A_2, A_3)$ — тензор упругости в поперечном сечении ($J_k > 0\ \forall k$), $\omega(s)$ — угловая скорость движения нормального сечения стержня в зависимости от параметра длины s средней линии стержня, записанная в координатах тройки ортов $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$, направленных по осям инерции нормального сечения, $r_3 = f_3(0)$. Орт $f_3(s)$ является касательным вектором к средней линии стержня, $f(s)$ — матричная функция, столбцами которой являются векторы $f_1(s), f_2(s)$ и $f_3(s)$, ($f_k(s) = f(s)r_k$).

Уравнение (20) является уравнением Эйлера—Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(f, \lambda) = \frac{1}{2}\langle J\omega, \omega\rangle + \lambda\langle r_3, fr_3\rangle \qquad (21)$$

(здесь $\langle \phi, \psi\rangle = \int\limits_0^1 (\phi(s), \psi(s))ds$).

Вектор $\omega = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ канонически отождествляется с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой имеет место представление $\Omega(s) = f^{-1}(s)\,\frac{df}{ds}(s)$.

Уравнение (20) описывает также и движение в поле тяготения твердого тела вокруг неподвижной точки (после замены параметра длины s на параметр времени t) и называется уравнением Эйлера—Пуассона динамики твердого тела. Этому уравнению также соответствует потенциал в виде функционала действия (21), который мы будем в связи этим называть функционалом Эйлера—Пуассона.

На первый взгляд, для функционала (21) существует весьма широкий класс конечномерно редуцирующих систем (линейных в координатах θ_j), ключевые функции которых имеют постоянный тип в отношении стабильной гладкой эквивалентности.

Однако этот пример не укладывается в развитую выше схему из-за наличия вырождения в слоях $\theta_1 \equiv \pi k$. Эйлеровы углы искажают топологическую картину поведения функционала (21) на банаховом многообразии C^2-петель в $SO(3)$, что вызвано наличием особенностей в параметризации группы $SO(3)$ эйлеровыми углами.

По-видимому, здесь следует говорить о замене данной задачи новой (хотя и родственной) вариационной задачей на трехмерном торе с угловыми координатами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (поднятие функционала (21) в накрывающее многообразие).

Более точную информацию о функционале (21) на энергетическом многообразии

$$\Lambda := \{f(t) \in C^2([0,1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}$$

можно получить рассматривая естественную для него редукцию Морса—Ботта со значениями в двумерной сфере. Эту редукцию можно разложить в композицию двух редукций: бесконечномерной редукции в многообразие петель на двумерной сфере и конечномерной редукции из многообразия петель на сфере к функции на двумерной сфере. Причем переход к угловым координатам можно осуществить на втором этапе (при редуцировании из многообразия петель на сфере).

2.2. РЕДУКЦИИ ФУНКЦИОНАЛА КИРХГОФА

Задача о формах равновесия пространственного упругого стержня в модели Кирхгофа [21] исследовалась многими на основе кинетической аналогии с задачей о движении твердого тела вокруг неподвижной точки [21], [22], [19]. При этом детально были проанализированы ситуации, отвечающие случаям полной интегрируемости уравнений равновесия. В работах Ю. И. Сапронова и Ю. Н. Заваровского ([11]) были исследованы бифуркации закритических равновесий кирхгофова стержня локальным методом Ляпунова—Шмидта без предположения интегрируемости.

Применение метода Ляпунова—Шмидта требует предварительного введения системы координат на окрестности единицы в $SO(3)$. Для исследования поведения кирхгофова стержня в целом целесообразнее использовать метод Морса—Ботта.

Равновесные конфигурации прямолинейного и продольно сжатого кирхгофова стержня длины единица с жестким закреплением концов описываются краевой задачей (20), в которой λ — параметр сжимающей нагрузки, $A = diag(A_1, A_2, A_3)$ — тензор упругости в поперечном сечении $(A_j > 0)$, для которого выполняется условие Е. Л. Николаи: $A_3^{-1} > \frac{1}{2}(1+\nu)(A_1^{-1} + A_2^{-1})$ (ν — коэффициент Пуассона), $\omega(s)$ — угловая скорость движения нормального сечения стержня в зависимости от параметра длины s средней линии стержня, записанная в координатах тройки ортов $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$, направленных по осям инерции нормального сечения, $r_3 = f_3(0)$. Орт $f_3(s)$ является касательным вектором к средней линии стержня, $f(s)$ — матричная функция, столбцами которой являются векторы $f_1(s), f_2(s)$ и $f_3(s)$ $(f_j(s) = f(s)r_j)$.

Задача (20) является уравнением Эйлера—Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(f,\lambda) := \frac{1}{2}\langle A\omega, \omega\rangle + \lambda\langle r_3, fr_3\rangle \qquad (22)$$

(здесь $\langle \varphi, \psi\rangle = \int_0^1 (\varphi(s), \psi(s))ds$).

Вектор $\omega = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ канонически отождествляется [1] с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

для которой имеет место представление

$$\Omega = f^{-1}(s)\frac{df}{ds}(s).$$

Пусть $\mathcal{M}$ — банахова группа Ли C^2-петель на $SO(3)$ в единице:

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2([0,1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}.$$

Отображение $p : f(s) \mapsto \tau(s) := f(s)r_3$ задает гладкую субмерсию из $\mathcal{M}$ на гладкое банахово многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ петель класса C^2 на двумерной сфере S^2:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{\tau \in C^2([0,1], S^2) : \tau(0) = \tau(1) = r_3\}.$$

Прообраз $p^{-1}(\tau)$ любой петли $\tau \in \tilde{\mathcal{M}}$ является орбитой правого действия

$$G \times \mathcal{M} \to M,\ (g(s), f(s)) \mapsto g(s)f(s),$$

банаховой группы Ли $G = \{g : g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)\}$. Через R_3 обозначается представление вида (23) для вектора r_3. Функция $\varphi(s)$ принадлежит классу C^2 и для нее выполняется условие

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (24)$$

Следовательно, $p^{-1}(\tau)$ состоит из счетного набора компонент связности $\mathcal{N}_k(\tau)$, определяемых выбором k в (24).

Теорема 4. *В случае $A_1 = A_2$ (симметричного стержня) имеет место представление*

$$V(fg,\lambda) = \\ = \int_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot\tau|^2}{2} + A_3 \frac{(\omega_3 + \dot\varphi)^2}{2} \right) ds + \lambda\langle \tau, r_3\rangle, \qquad (25)$$

где $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, ω_3 — третья компонента угловой скорости, $|\dot\tau(s)|$ — кривизна средней линии стержня.

Доказательство следует из соотношения

$$|\dot\tau(s)|^2 = \omega_1^2(s) + \omega_2^2(s),$$

вытекающего из равенств

$$\tau(s) = f(s)r_3,\ |\dot f(s)r_3| = |f^{-1}(s)\dot f(s)r_3| = |\Omega r_3| = \|[\omega, r_3]\|,$$

и соотношения

$$(fg)^{-1}\frac{d}{ds}(fg) = g^{-1}f^{-1}(\dot f g + f\dot g) = g^{-1}(\Omega + \dot\varphi R_3)g.$$

Из представления (25) получаем, что $V|_{p^{-1}(\tau)}$ имеет ровно по одной точке минимума на каждой компоненте $\mathcal{N}_k(\tau)$. Причем $f \in \mathcal{N}_k(\tau)$ является точкой минимума $V|_{p^{-1}(\tau)}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\int_0^1 \omega_3^2 ds = c_k^2 \qquad (26)$$

где

$$c_k = 2\pi k + \int_0^1 \omega_3 ds$$

(интеграл $\int_0^1 \omega_3 ds$ является инвариантом правого действия G на $\mathcal{M}$). Нетрудно установить, что ограничение $V|_{p^{-1}(\tau)}$ является геодезически выпуклым в бесконечномерной римановой метрике, в которой расстояние между $f(s)$ и $f(s)g(s)$, $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, измеряется интегралом $\int_0^1 \varphi^2(s)ds$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{O} = \left\{ f \in \mathcal{M} : \left|\int_0^1 \omega_3 ds\right| < \pi \right\}$. *Тогда функционал*

$$\tilde V(\tau,\lambda) := \inf_{f : f\in\mathcal{O}\cap\pi^{-1}(\tau)} V(f,\lambda), \tau \in p(\mathcal{O}),$$

является гладким и для него имеет место представление

$$\int_0^1 \left(A_1\frac{|\dot\tau|^2}{2} + \lambda(\tau, r_3) \right) ds + \frac{A_3}{2}\left(\int_0^1 \omega_3 ds + 2\pi k \right)^2. \qquad (27)$$

Данная теорема означает возможность редукции (бесконечномерной), позволяющей сводить изучение поведения V на области $\mathcal{O}$ к изучению $\tilde{V}$ на области $p(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Из геодезической выпуклости V на $p^{-1}(\tau)$ следует, что критические точки V на $\mathcal{O}$ взаимно однозначно соответствуют критическим точкам V на $p(\mathcal{O})$. При этом невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные с сохранением значений индекса Морса, а соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.

Если $\lambda < 4\pi^2$, то дальнейший анализ функционала (27) можно осуществить через конечномерную редукцию Морса—Ботта к ключевой функции W

$$W(\xi,\lambda) := \inf_{\tau:\tau(1/2)=\xi} \tilde{V}(\tau,\lambda), \xi \in S^2. \qquad (28)$$

Ключевую функцию W удобно вычислять, перейдя к промежуточной вариационной задаче для функционала

$$\int_0^1 \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \lambda\cos(\varphi)\right)dt,\ \varphi = \varphi(t),\ t \in [0,1],$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Лемма 1. *Подмногообразие $\mathfrak{M}$ петель в единице (группы $so(3)$) вида*

$$f(t) := \exp\left(\varphi(t)R_2\right),\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

$$R_2 := \mathcal{E}_{3,1} := e_3 \wedge e_1,$$

квазиинвариантно относительно функционала V.

Доказательство леммы основано на следующих ниже замечаниях. Во-первых, заметим, что общий касательный вектор η к подмногообразию $\mathfrak{M}$ в точке f допускает, как нетрудно проверить, следующее представление (после «снесения в единицу»):

$$\eta(t) = h(t)R_2. \qquad (29)$$

Так как

$$\exp\left(\varphi R_2\right) = \cos(\varphi)I + \sin(\varphi)R_2,$$

то

$$\tau(t) := f^{-1}(t)e_3 = \exp\left(-\varphi(t)R_2\right)e_3 = $$
$$= \cos(\varphi)e_3 - \sin(\varphi)e_1.$$

Из соотношений

$$\omega := f^{-1}f = \dot{\varphi}e_2,$$
$$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}e_2,\ A\dot{\omega} = A_2\ddot{\varphi}e_2,$$

получаем

$$\mathcal{F}(f) := A\dot{\omega} + [\omega, A\omega] - \lambda[e_3, f^{-1}e_3] =$$
$$= \left(A_2\ddot{\varphi} + \lambda\sin(\varphi)\right)e_2$$

(здесь $\mathcal{F} = \operatorname{grad} V$). Из последнего соотношения вытекает квазиинвариантность $\mathfrak{M}$ относительно V (см. (29)).

Заметим, что отображение $\mathcal{F}$ здесь действует (фредгольмово) из многообразия $\mathcal{M} = \{f \in C^2([0,1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}$ в пространство $\mathcal{M}_0 = \{f \in C^0([0,1], \mathcal{SO}(3))\}$.

Теорема 6. *Если $\lambda < 4\pi^2$, то функция (28) является гладкой на $S^2 \setminus \{-r_3\}$. При этом её критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde{V}$ на $p(\mathcal{O})$ с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.*

Функцию (28) можно получить в явном виде. Действительно, маргинальное отображение $\xi \mapsto \tau_\xi$ здесь допускает представление в виде

$$\tau_\xi(s) = (\cos\varphi(s))r_3 + (\sin\varphi(s))r,\ r \perp r_3,$$

где $\varphi(s)$ получено склейкой решений $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ уравнения

$$\ddot{\varphi} + \lambda\sin\varphi = 0, \qquad (30)$$

отвечающих краевым условиям

$$\varphi_1(0) = 0,\ \varphi_1(1/2) = \psi,\ \varphi_2(1/2) = \psi,\ \varphi_2(1) = 0,$$
$$\cos(\psi)r_3 + \sin(\psi)r = \xi.$$

Произведя в уравнении (30) стандартную подстановку [22]

$$\varphi_1 = 2\arcsin(k\sin u), \qquad (31)$$

где k — константа, $0 < k < 1$, получим, что u является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda^{1/2}(1 - k^2\sin^2 u)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$u(s) = am(\sqrt{\lambda}s; k), \qquad (32)$$

где $am(\sqrt{\lambda}s;k)$ — так называемая амплитуда, полученная обращением эллиптического интеграла первого рода (в нормальной тригонометрической форме Лежандра):

$$\sqrt{\lambda}s = F(u;k) := \int_0^u \frac{dy}{(1 - k^2\sin^2 y)^{1/2}}.$$

Из (31) и (32) получаем явную формулу решения

$$\varphi_1(s) = 2\arcsin\left(k\ sn(\sqrt{\lambda}s;k)\right),$$

где

$$sn(\tau;k) := \sin am(\tau;k)$$

— эллиптический синус. Для производной функции φ_1 получаем представление

$$\dot{\varphi}_1(s) = 2\sqrt{\lambda}\ cn(\sqrt{\lambda}s;k),$$

где $cn(\tau;k) := \cos am(\tau;k)$ — эллиптический косинус.

Соответственно, для лагранжиана

$$L = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \lambda(\cos\varphi - 1)$$

на решении $\varphi_1(s)$ имеем представление

$$L = 2\lambda k^2(cn^2(\sqrt{\lambda}s;k) - sn^2(\sqrt{\lambda}s;k)) = \\ = 2\lambda k^2(2cn^2(\sqrt{\lambda}s;k) - 1).$$

Решение φ_2 уравнения (31) получается продолжением $\varphi_1(s)$ с интервала $[0, 1/2]$ на интервал $[1/2, 1]$ по симметрии: $\varphi_2(s) = \varphi_1(1-s)$. Следовательно,

$$\int_0^1 Lds = 2\int_0^{1/2} Lds,$$

и для ключевой функции (28) получаем глобальное представление

$$W(\xi,\lambda) = 4\lambda k^2\left(2\int_0^{1/2} cn^2(\sqrt{\lambda}s;k)ds - \frac{1}{2}\right).$$

2.3. ФУНКЦИОНАЛ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА НА ГРУППЕ $SL(2)$

Интерес к уравнениям Эйлера—Пуассона на произвольных группах Ли существует в связи с представляющими большой интерес приложениями к задачам о зарождении вихревых структур в нелинейных средах.

Петлеобразные траектории динамической системы Эйлера — Пуассона на группе $SL(2)$ описываются краевой задачей

$$\begin{cases} A\dot{\omega} - [A\omega,\omega] - \lambda[R_3, f^{-1}R_3 f] = 0, \\ f(0) = f(1) = I. \end{cases} \qquad (33)$$

Здесь λ — параметр внешнего силового поля, $A = diag(A_1, A_2, A_3)$ — «тензор инерции» ($A_k > 0\ \forall k$), $\omega(t)$ — угловая скорость: $\omega(t) := f^{-1}(t)\dot{f}(t) = \sum \omega_k R_k$ (определение R_k см. ниже).

Уравнение (33) является уравнением Эйлера—Лагранжа экстремалей функционала действия

$$V(f,\lambda) = \frac{1}{2}\langle A\omega,\omega\rangle + \lambda\langle R_3, fR_3f^{-1}\rangle \qquad (34)$$

(здесь $\langle\phi,\psi\rangle = \int_0^1(\phi(t),\psi(t))dt = \frac{t}{r}\int_0^1\phi(t)\psi^\top(t)dt$).

Вектор $\omega = \omega_1R_1 + \omega_2R_2 + \omega_3R_3$ канонически отождествляется с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2-\omega_3 \\ \omega_2+\omega_3 & -\omega_1 \end{pmatrix}$$

(для нее имеет место представление $\Omega(t) = f^{-1}(t)\ \dot{f}(t).$)

Точную информацию о функционале (21) на многообразии

$$\{f(t) \in C^2([0,1], SL(2)) : f(0) = f(1) = I\}$$

можно получать, рассматривая естественную для него редукцию Морса—Ботта со значениями в орбите действия группы внутренних автоморфизмов. Эту редукцию можно разложить в композицию двух редукций: бесконечномерной — в многообразие петель на орбите действия группы внутренних автоморфизмов и конечномерной: из многообразия петель на орбите в пространство петель на числовой оси, а затем, по схеме Ляпунова—Шмидта, в конечномерное пространство.

Алгебра Ли $sl(2)$, отвечающая группе $SL(2)$, порождена каноническим базисом

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которого реализуется следующая «таблица умножения»:

$$[R_1, R_2] = -2R_3, [R_2, R_3] = 2R_1, [R_3, R_1] = 2R_2.$$

2.4. РЕДУКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА НА ГРУППЕ $SL(2)$

Итак, петлеобразные «твердотельные» траектории на $SL(2)$ описываются краевой задачей (33), в которой λ — параметр внешнего силового поля, A — линейный оператор, $A = diag(A_1, A_2, A_3)$ — тензор инерции ($A_j > 0$), $A(\sum_j \omega_j) := \sum_j A_j\omega_jR_j$; $\omega(t)$ — угловая скорость, записанная в координатах тройки ортов $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, направленных по «осям инерции», $R_k = f_k(0)$. Орт $f_3(t)$ называется вертикальным, $f(t)$ — матричная функция (со значениями в $SL(2)$).

Задача (33) является уравнением Эйлера—Лагранжа экстремалей функционала действия (34).

Пусть $\mathcal{M}$ — банахова группа Ли C^2-петель на $SL(2)$ в единице:

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2([0,1], SL(2)) : f(0) = f(1) = I\}.$$

Отображение $p : f(t) \mapsto \tau(t) := f(t)R_3f^{-1}(t)$ задает гладкую субмерсию из $\mathcal{M}$ на гладкое банахово многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ петель класса C^2 на двумерном подмногообразии (орбите матрицы

R_3 под действием группы внутренних автоморфизмов) $\mathcal{O}^2$:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{\tau \in C^2([0,1],\mathcal{O}^2) : \tau(0) = \tau(1) = R_3\}.$$

Прообраз $p^{-1}(\tau)$ любой петли $\tau \in \tilde{\mathcal{M}}$ является орбитой действия

$$G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M},\ \ (g(t), f(t)) \mapsto f(t)g(t),$$

банаховой группы Ли $G = \{g : g(t) = \exp(\varphi(t)R_3)\}$, Функция $\varphi(t)$ принадлежит классу C^2 и для нее выполняется условие

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (35)$$

Следовательно, $p^{-1}(\tau)$ состоит из счетного набора компонент связности $\mathcal{N}_k(\tau)$, определяемых выбором k в (35).

Теорема 7. *В случае динамической симметрии* $(A_1 = A_2)$ *имеет место представление*

$$V(fg,\lambda) = \\ = \int_0^1 \left(A_1 \frac{\left|f^{-1}\dot{\tau} f\right|^2}{8} + A_3 \frac{(\omega_3 + \dot{\varphi})^2}{2} \right) ds + \lambda \left\langle \tau, R_3 \right\rangle, \qquad (36)$$

где $g(t) = \exp(\varphi(t)R_3)$, ω_3 *— третья компонента угловой скорости.*

Доказательство следует из соотношения

$$\left|f^{-1}\dot{\tau}(t) f\right|^2 = 4(\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)),$$

вытекающего из равенств

$$\tau(t) = f(t)R_3 f^{-1}(t), \dot{\tau}(t) = f(t)[\omega, R_3]f^{-1}(t),$$

и соотношения

$$(fg)^{-1} \frac{d}{dt}(fg) = g^{-1}f^{-1}(\dot{f}g + f\dot{g}) = g^{-1}(\Omega + \dot{\varphi}R_3)g = \\ = g^{-1}\Omega g + \dot{\varphi}R_3.$$

Из представления (36) получаем, что ограничение V на прообраз петли на орбите имеет ровно по одной точке минимума на каждой компоненте связности.

Дальнейший анализ функционала Эйлера—Пуассона можно осуществить через редукцию к функционалу на орбите $\mathcal{O}^2$.

Теорема 8. *В случае* $A_1 = A_2$ *имеет место представление*

$$\inf_g V(fg,\lambda) = \\ = \int_0^1 \left(A_1 \frac{\left|f^{-1}\dot{\tau} f\right|^2}{8} + \lambda \left\langle \tau, R_3 \right\rangle \right) dt + const. \qquad (37)$$

Здесь $g(s) = \exp\left(\varphi(s)R_3\right)$, ω_3 *— третья компонента угловой скорости.*

Пусть $\widehat{V} := \inf_g V(fg,\lambda)$.

Лемма 2. *Подмногообразие* $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ *петель в единице (группы* $sl(2)$*) вида*

$$f(t) := \exp\left(\varphi(t)R_2\right),\ \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

квазиинвариантно относительно функционала V.

Доказательство леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 1.

Таким образом, поиск экстремалей данного функционала сводится к поиску экстремалей функционала

$$\widetilde{V}(\psi) := \widehat{V}\,|_{\mathfrak{M}},$$
$$\mathfrak{M} := \{\theta(t) = \exp(\psi(t)R_1)R_3\exp(-\psi(t)R_1)\},$$
$$\psi(0) = \psi(1) = 0,$$

и последующую конечномерную редукцию к ключевой функции.

Теорема 9. *Имеет место следующее представление:*

$$\widetilde{V}(\psi) = \int_0^1 \left(\frac{A_1}{2}\dot{\psi}^2 + \lambda(2\psi) \right) dt + const.$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой (аналогично тому, как это делается в случае $SO(3)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. — 472 с.

2. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука. 1982. — 304 с.

3. *Белых Ф.А.,Зачепа А.В., Сапронов Ю.И.* Вторичные редукции в анализе бифуркаций экстремалей из точки минимума с особенностью 3-мерной сборки// Семинар по глобальному и стохастическому анализу, вып 1. Воронеж: ВГУ, 2005. — С. 18—33.

4. *Белых Ф.А.* К бифуркационному анализу 2-точечной краевой задачи для уравнения Эйлера—Пуассона на группе $SL(2)$ // Семинар по глобальному и стохастическому анализу, вып 2. Воронеж: ВГУ, 2007. — С. 11—20.

5. *Белых Ф.А., Сапронов Ю.И.* Вторичные редукции для случая 4-мерного вырождения краевой задачи в геликоидальной модели кристалла// Математические модели и операторные уравнения. Т. 4. 2007. Воронеж, ВГУ. — С. 5—14.

6. *Белых Ф.А., Борзаков А.Ю., Лобода А.В.* Вещественные подалгебры малых размерностей матричной алгебры Ли $M(2,C)$ // Изв. ВУЗов. Математика. 2007, № 5. — С. 13—24.

7. *Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998. — 658 с.

8. *Борзаков А.Ю.* Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга// Сборник трудов математическогго факультета ВГУ. 2005. Вып. 9. С. 9—22.

9. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977. — 208 с.

10. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И.* Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки// Известия ВУЗов. Математика. Т. 2. — Казань: Форт-Диалог, 1997. — С. 35—46.

11. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т. 12. 2004. С. 3—140.

12. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Шалимов В.В.* К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах // Кристаллография. — 1999. — Т. 44, № 4. — С. 1—5.

13. *Darinskii M.M., Sapronov Yu.I., Shalimov V.V.* Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter// Ferroelectrics. — 2002. V. 265. — P. 31—42.

14. *Даринский Б.М., Сапронов Ю.И.* Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений// Современная математика и ее приложения. — Тбилиси. 2003. Т. 7. — С. 72—86.

15. *Даринский Б.М., Ладыкина Е.В., Сапронов Ю.И.* Фредгольмовы функционалы с круговой симметрией и периодические волны// Математические модели и операторные уравнения. Т. 2. — Воронеж: ВГУ. 2003. — С. 52—67.

16. *Даринский Б.М., Дьяченко А.А., Сапронов Ю.И., Чаплыгин М.Н.* Фазовые переходы в доменных границах ферроиков// Известия РАН. Сер.: физическая. 2004. Т 768, № 7. — С. 920—926.

17. *Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж, ВГУ. 2002. — 185 с.

18. *Изюмов Ю.А., Сыромятников В.Н.* Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М.:Наука, 1984. — 247 с.

19. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка. 1979. — 216 с.

20. *Красносельский М.А., Бобылев Н.А., Мухамадиев Э.М.* Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления// ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 3. — С. 530—533.

21. *Николаи Е.Л.* К задаче об упругой линии двоякой кривизны// Труды по механике. М.: Гостехиздат. 1955. — С. 45—277.

22. *Попов Е.П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.: ОГИЗ. 1948. — 170 с.

23. *Постников М.М.* Введение в теорию Морса// — М.: Наука. 1971. — 568 с.

24. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения// — М.: Мир. 1980. — 608 с.

25. *Сапронов Ю.И.* Многомодовые бифуркации упругих равновесий// Прикл. матем. и механ. — 1988. Т. 52, Вып 6. — С. 997-1006.

26. *Сапронов Ю.И.* Полурегулярные угловые особенности гладких функций// Матем. сборник. — 1989. Т. 180, № 10. — С. 1299—1310.

27. *Сапронов Ю.И.* Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи матем. наук. — 1996. Т. 51, № 1. — С. 101—132.

28. *Сапронов Ю.И., Царев С.Л.* Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах// Матем. заметки. — 2000. Т. 58, № 5. — С. 745—754.

29. *Сапронова Т.Ю.* О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов// В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж, ВГУ. 2000. — С. 107—124.

Поступила в редакцию 24.10.2007