УДК 517.9

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ВОЗМУЩЁННЫХ КЛАССОВ УСТОЙЧИВЫХ МАТРИЦ

М. Ю. Романова

Воронежский государственный университет

В работе содержатся оценки расстояний различных классов устойчивых матриц до множества неустойчивых матриц. Основное внимание уделяется матрицам простой структуры.

Ряд прикладных задач, и, в том числе, теории управления приводит к исследованию оценок норм возмущений устойчивых матриц, не выводящих эти матрицы из класса устойчивых. В настоящей работе приводятся оценки расстояний различных классов устойчивых матриц до множества неустойчивых матриц, использование которых предполагает лишь информацию о запасе устойчивости, спектральном радиусе исследуемой матрицы и величине обусловленности матрицы Грама, построенной по собственным векторам исходной матрицы. Первая часть работы опирается на оценку матричной экспоненты Гельфанда—Шилова. Вторая часть - использует метод исследования, приведённый в статье [1], и в ней изучается класс матриц, возникающих при исследовании разностных уравнений.

Пусть H — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $Matr_n(H)$ — пространство вещественных квадратных матриц размера $n \times n$. Если $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ — матрицы из $Matr_n(H)$, то через A^* обозначается транспонированная к A матрица, через AB обозначается обычное произведение матриц A и B, а через $\langle A,B\rangle$ - скалярное произведение этих матриц, определяемое формулой

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} .$$

В дальнейшем, при определении собственных значений и собственных векторов матриц используется комплексификация H, и наряду с матрицей рассматривается соответствующий линейный оператор $\tilde{A}$.

Определение 1. Матрица $A \in Matr_n(H)$ называется *устойчивой,* если её спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $C_- = \{\lambda \in C : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ комплексной плоскости C.

Дополнение к множеству устойчивых матриц $S \subset Matr_n(H)$ образует множество $\tilde{S} \subset Matr_n(H)$ *неустойчивых матриц*.

Определение 2. Положительное число $\mu(A) = \left|\max_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda\right|$ (для которого спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le -\mu(A)$) называется *запасом устойчивости* устойчивой матрицы A.

Введём обозначение $dist(A,\tilde{S}) = \inf_{A'\in\tilde{S}} \|A - A'\|$.

Далее получены оценки снизу для величины $dist(A,\tilde{S})$ для различных классов устойчивых матриц.

Отметим, что для нормальной устойчивой матрицы $A \in Matr_n(H)$ справедлива оценка $dist(A,\tilde{S}) \ge \mu(A)$.

Рассмотрим матрицу $A \in Matr_n(H)$, которая не обязательно является нормальной.

Теорема 1. Для любой устойчивой матрицы $A \in Matr_n(H)$ (которая не обязательно является нормальной) справедлива оценка

$$dist(A,\tilde{S}) \ge \chi^{-1}(A),$$

где $\chi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k \|A\|^k}{\mu^{k+1}(A)}$.

Доказательство. Получим вначале оценку норм $\|(A - i\alpha - \beta)^{-1}\|$ матрицы $(A - i\alpha - \beta)^{-1}$, $\alpha \in R, \beta \ge 0$. Для этого используем известное представление $(A - i\alpha - \beta)^{-1} = -\int_0^\infty e^{At - i\alpha t - \beta t} dt.$ Тогда $\|(A - i\alpha - \beta)^{-1}\| = \left\| -\int_0^\infty e^{At - i\alpha t - \beta t} dt \right\| \le$ $\le \int_0^\infty \|e^{At}\| e^{-\beta t} dt$. Воспользовавшись оценкой Гельфанда—Шилова [2]

$$\|e^{At}\| \le e^{\Lambda t}\left(1 + 2t\|A\| + \frac{2^2 t^2 \|A\|^2}{2!} + \ldots + \frac{2^{n-1} t^{n-1} \|A\|^{n-1}}{n!}\right) = e^{\Lambda t} p(t),$$

где $\Lambda = \max \operatorname{Re} \lambda_j$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $A \in Matr_n(H)$, получаем следующее неравенство

$$\left\| (A - i\alpha - \beta)^{-1} \right\| = \left\| -\int_0^\infty e^{At - i\alpha t - \beta t} dt \right\| \le$$

$$\le \int_0^\infty \left\| e^{At} \right\| e^{-\beta t} dt \le \int_0^\infty p(t) e^{(\Lambda - \beta)t} dt \le$$

$$\le \int_0^\infty p(t) e^{\Lambda t} dt \le \int_0^\infty p(t) e^{-\mu(A)t} dt.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, получаем оценку резольвенты матрицы A в правой полуплоскости комплексной плоскости $C_+ = \{\lambda \in C : \operatorname{Re} \lambda \ge 0\}$:

$$\left\| (A - i\alpha - \beta)^{-1} \right\| \le \int_0^\infty p(t) e^{-\mu(A)t} dt =$$

$$= \left(-\frac{p(t)}{\mu(A)} e^{-\mu(A)t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{\mu(A)} \int_0^\infty e^{-\mu(A)t} p'(t) dt \right) =$$

$$= \left(-\frac{p(t)}{\mu(A)} e^{-\mu(A)t} \Big|_0^\infty - \frac{p'(t)}{\mu^2(A)} e^{-\mu(A)t} \Big|_0^\infty + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu^2(A)} \int_0^\infty e^{-\mu(A)t} p''(t) dt \right) = \ldots = \left(\frac{p(0)}{\mu(A)} + \frac{p'(0)}{\mu^2(A)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{p^{(n-2)}(0)}{\mu^{n-1}(A)} - \frac{2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 1}{\mu^n(A)} e^{-\mu(A)t} \Big|_0^\infty \right) =$$

$$= \left(\frac{p(0)}{\mu(A)} + \frac{p'(0)}{\mu^2(A)} + \ldots + \frac{p^{(n-2)}(0)}{\mu^{n-1}(A)} + \frac{p^{(n-1)}(0)}{\mu^n(A)} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p^{(k)}(0)}{\mu^{k+1}(A)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k \|A\|^k}{\mu^{k+1}(A)}.$$

Таким образом, $\left\| (A - i\alpha - \beta)^{-1} \right\| \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k \|A\|^k}{\mu^{k+1}(A)}$.

Из представления $A - i\alpha - \beta - B = (A - i\alpha - \beta)(I - (A - i\alpha - \beta)^{-1} B)$, при условии $\|B\| < \frac{1}{\left\| (A - i\alpha - \beta)^{-1} \right\|}$ получаем, что матрица $A - i\alpha - \beta - B$ обратима [3].

Значит, если $\|B\| (\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k \|A\|^k}{\mu^{k+1}(A)}) < 1$, то из полученных равенств следует, что C_+ лежит в резольвентном множестве матрицы A, причём получаем доказываемую оценку. Теорема доказана.

Пусть теперь A — устойчивая вещественная матрица простой структуры со спектральным радиусом $r = r(A) < 1$, собственные значения которой $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, a_1 \pm ib_1, \ldots, a_q \pm ib_q$ различны (т.е. $p+2q=n$). Обозначим через $x_1, \ldots, x_p, y_1 \pm iz_1, \ldots, y_q \pm iz_q$ собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Положим $e_k = x_k (1 \le k \le p), e_{k+p} = y_k (1 \le k \le q)$, $e_{p+q+k} = z_k (1 \le k \le q)$ и обозначим через B матрицу Грама, построенную по векторам $e_i (i = 1, .., n)$:

$$B = \begin{bmatrix} (e_1, e_1) \ldots\ldots (e_1, e_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (e_n, e_1) \ldots\ldots (e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

Пусть $0 < \mu_1 \le \ldots \le \mu_n$ — собственные значения матрицы B. Положим $\chi = \frac{\mu_n}{\mu_1}$. Величина χ называется мерой обусловленности матрицы B.

Теорема 2. Пусть A — устойчивая вещественная матрица простой структуры со спектральным радиусом $r = r(A) < 1$, собственные значения которой $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, a_1 \pm ib_1, \ldots, a_q \pm ib_q$ различны. Пусть $0 < \mu_1 \le \ldots \le \mu_n$ — собственные значения матрицы Грама B, $\chi = \frac{\mu_n}{\mu_1}$. Тогда справедлива следующая оценка $dist(A, \tilde{A}) \ge$ $\ge r(A) \frac{2\sqrt{\chi}}{1 + \chi}$.

Доказательство теоремы 2 существенно использует результаты статьей [1], [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобылёв Н. А.* Оценки возмущений устойчивых матриц. — Н. А. Бобылёв, С. В. Емельянов, С. К. Коровин//Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 4, — С. 15—24.

2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М: Наука, 1958.

3. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2004.

4. *Гиль М. И.* Метод операторных функций в теории дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990 .

5. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. кн., 1997 .