УДК 517.986

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ УПОРЯДОЧЕННОЙ ПАРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. Печкуров

Воронежский государственный университет

В данной статье рассматриваются спектральные свойства упорядоченных пар линейных замкнутых операторов на вещественных банаховых пространствах и их комплексификация.

1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве известных монографий (см., например, [1], [2]), в которых подробно излагается, либо существенно используется спектральная теория упорядоченных пар линейных операторов на банаховых пространствах, их авторы, как правило, предполагают, что эти пространства являются комплексными, либо указывают на возможность комплексификации вещественного банахова пространства. Тем не менее, при построении спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов в вещественных банаховых пространствах иногда необходимо подробно отслеживать переход в комплексификацию пространства и обратный переход.

Вопрос построения спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах рассматривался в статье [3]. В данной работе рассматриваются некоторые вопросы спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов и, в частности, упорядоченных пар на вещественных банаховых пространствах.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПАР ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Символами X, Y будем обозначать банаховы пространства, рассматриваемые над полем $\mathbf{C}$. Через $\tilde{\mathbf{C}}$ обозначим расширение поля $\mathbf{C}$ с помощью точки $\{\infty\}$.

Символом $LO(X,Y)$ обозначим множество всех линейных замкнутых операторов, действующих из X в Y. Символом $LRC(X,Y)$ обозначим множество всех линейных замкнутых отношений, действующих из X в Y. Символом $Hom(X,Y)$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y.

Далее символом (G,F) будем обозначать упорядоченную пару линейных замкнутых операторов $F : D(F) \subset X \to Y$, $G : D(G) \subset X \to Y$, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Будем считать, что области определения $D(F)$, $D(G)$ удовлетворяют одному из следующих условий

(i) $D(F) = X, D(G) \neq X$;
(ii) $D(F) \neq X, D(G) = X$;
(iii) $D(F) = X, D(G) = X$.

Через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G,F)$ обозначим подпространство $D(F) \cap D(G)$ и назовем его *областью определения упорядоченной пары операторов* (G,F).

К *резольвентному множеству* $\rho(G,F)$ упорядоченной пары операторов (G,F) отнесем все числа $\lambda \neq 0$ из $\mathbf{C}$, для которых оператор $G - \lambda F : \mathcal{D} \subset X \to Y$ непрерывно обратим, а также точку $\lambda = 0$, если $G : \mathcal{D} \to Y$ — непрерывно обратимый оператор и $D(F) = X$. Множество $\sigma(G,F) = \mathbf{C} \setminus \rho(G,F)$ назовем *спектром этой пары*.

Операторнозначную функцию

$$R(\cdot; G,F) : \rho(G,F) \subset \mathbf{C} \to Hom(Y,X),$$
$$R(\lambda; G,F) = (G - \lambda F)^{-1}, \lambda \in \rho(G,F),$$

назовем *резольвентой упорядоченной пары* (G,F).

Иногда чрезвычайно полезным оказывается введение понятия расширенного спектра упорядоченной пары операторов. Подмножество $\tilde{\sigma}(G,F)$ из $\tilde{\mathbf{C}}$, совпадающее с $\sigma(G,F)$, когда $0 \in \rho(G,F)$, и $\tilde{\sigma}(G,F) = \sigma(G,F) \cup \{\infty\}$ в противном случае, назовем *расширенным спектром* упорядоченной пары (G,F). Множество $\tilde{\rho}(G,F) = \tilde{\mathbf{C}} \setminus \tilde{\sigma}(G,F)$ назовем *расширенным резольвентным множеством*.

Пусть области определений $D(G)$, $D(F)$ удовлетворяют одному из условий (i) или (iii).

Тогда операторнозначные функции $R_l(\lambda;G,F) = R(\lambda;G,F)F$, $\lambda \in \rho(G,F)$, $R_r(\lambda;G,F) = FR(\lambda;G,F)$, $\lambda \in \rho(G,F)$, назовем соответственно *левой* и *правой резольвентой* упорядоченной пары операторов (G,F).

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \in X$$

для линейного дифференциального уравнения

$$F\dot{x}(t) = Gx(t),\ t \in \mathbf{R}_+ = [0,+\infty),$$

с парой линейных замкнутых операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, при $KerF \neq \{0\}$.

В вопросах разрешимости и построения решений уравнения используется два подхода. Первый основан на спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов. Второй базируется на использовании дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathcal{A}y(t), t \in \mathbf{R}_+, y(0) = y_0 \in D(\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{A} \in LRC(X)$ и имеет вид $\mathcal{A} = F^{-1}G$.

Линейные отношения $\mathcal{A}_l = F^{-1}G \subset X \times X$, $\mathcal{A}_r = GF^{-1} \subset Y \times Y$ назовем соответственно *левым и правым отношениями для упорядоченной пары* (G,F).

3. СВОЙСТВА ЛЕВОГО И ПРАВОГО ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПАР

Для левого $\mathcal{A}_l$ и правого $\mathcal{A}_r$ линейных отношений, построенных по упорядоченной паре (G,F), имеют место следующие равенства:

$$D(\mathcal{A}_l) = G^{-1}(ImF), Im\mathcal{A}_l = F^{-1}(ImG),$$

$$D(\mathcal{A}_r) = F(D(G)), Im\mathcal{A}_r = G(D(F)),$$

$$R(\lambda,\mathcal{A}_l) = (G-\lambda F)^{-1}F, \lambda \in \rho(G,F),$$

$$R(\lambda,\mathcal{A}_r) = F(G-\lambda F)^{-1}, \lambda \in \rho(G,F),$$

При этом предпоследняя формула справедлива, если $D(G)$ и $D(F)$ удовлетворяют одному из условий (i) или (iii).

Из этих представлений видно, что если $\infty \in \tilde{\rho}(G,F)$, то $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$, значит, $\mathcal{A}_l \in EndX, \mathcal{A}_r \in EndY$. Отсюда следует

Лемма 1. *Выполнены включения*

$$\tilde{\rho}(G,F) \subset \tilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \tilde{\rho}(\mathcal{A}_r),$$

$$\tilde{\sigma}(G,F) \supset \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r).$$

Резольвенты отношений $\mathcal{A}_l$ и $\mathcal{A}_r$ назовем *левой и правой резольвентами упорядоченной пары операторов* (G,F) и обозначим символами $R_l(\cdot;G,F)$ и $R_r(\cdot;G,F)$ соответственно.

В дальнейшем будем считать выполненным условие *несингулярности* пары (G,F):

Предположение 1. *Для упорядоченной пары (G,F) множество $\rho(G,F)$ непусто.*

В рамках сделанного предположения справедлива следующая важная

Теорема 1. *Для упорядоченной пары операторов (G,F) имеют место следующие свойства:*

1. $\tilde{\sigma}(G,F) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$*;*
2. $\tilde{\sigma}(G,F) \setminus \{0,\infty\} = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) \setminus \{0,\infty\}$*;*
3. $\tilde{\sigma}(G,F) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$*, если* $\mathcal{D} = X$*;*
4. $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \Leftrightarrow G^{-1}F \in EndX$*;*
5. $0 \in \rho(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow FG^{-1} \in EndY$*;*
6. $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \cap \rho(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow 0 \in \rho(G,F)$*;*
7. $\infty \in \tilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \Leftrightarrow \mathcal{A}_l = F^{-1}G \in EndX$*;*
8. $\infty \in \tilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \mathcal{A}_r = GF^{-1} \in EndY$*;*
9. $\infty \in \tilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \tilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \infty \in \tilde{\rho}(G,F)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы приведено в [1]. □

4. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ УПОРЯДОЧЕННОЙ ПАРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этой главе символами X, Y, Z будем обозначать вещественные банаховы пространства.

Линейное пространство $X^2 = X \times X$ над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел с законом внешней композиции $(\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, $(x,y) \in X^2$, называется *комплексификацией* вещественного линейного пространства X и обозначается через $\mathbb{X}$ или через $Compl\,X$.

Далее символом $\mathbb{I}_X$ будем обозначать тождественный оператор в комплексификации $\mathbb{X}$ пространства X. Элементы из $\mathbb{X}$ удобно записывать в виде $x + iy$, где $x,y \in X$, i — мнимая единица. При этом X будем рассматривать в качестве подпространства $\mathbb{X}$. Норму в $\mathbb{X}$ определим равенством $\|(x,y)\| = \max\limits_{\psi\in[0,2\pi]} \|(\cos\psi)x + (\sin\psi)y\|,\ x,y \in X.$

Символом $\mathbb{J}_X$ обозначим отображение $\mathbb{J}_X : \mathbb{X} \to \mathbb{X}, \mathbb{J}_X(x+iy) = x - iy,\ x,y \in X$, которое является аддитивным, но не однородным. Ясно, что $\mathbb{J}_X^2 = \mathbb{I}_X$ и $\mathbb{J}_X^{-1} = \mathbb{J}_X$.

Лемма 2. *Для каждого линейного подпространства $\mathbb{X}_0$ из $\mathbb{X}$ его образ при отображении $\mathbb{J}_X$ является линейным подпространством в $\mathbb{X}$.*

Подпространство $\mathbb{X}_0$ из комплексификации $\mathbb{X}$ пространства X назовем *симметричным*, если выполнено условие $\mathbb{J}_X(\mathbb{X}_0) = \mathbb{X}_0$, или, что эквивалентно, для любого вектора $x+iy$ из $\mathbb{X}_0$ подпространству $\mathbb{X}_0$ принадлежит вектор $x-iy$.

Лемма 3. *Линейное подпространство $\mathbb{X}_0$ из $\mathbb{X}$ является комплексификацией некоторого подпространства X_0 из X тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}_0$ — симметричное подпространство из $\mathbb{X}$.*

Замечание 1. *Если $\mathbb{X}_0$ — симметричное подпространство из $\mathbb{X}$, то $\mathbb{X}_0$ является комплексификацией подпространства $X_0 = \mathbb{X}_0 \cap X$.*

Пусть $A : D(A) \subset X \to Y$ — линейный оператор. Его *комплексификацией* назовем оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ с областью определения $D(\mathbb{A}) = Compl(D(A))$, определенный по правилу

$$\mathbb{A}(x_1 + ix_2) = Ax_1 + iAx_2.$$

Лемма 4. *Линейный оператор $\mathbb{A} \in LO(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ является комплексификацией некоторого линейного оператора $A \in LO(X,Y)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\mathbb{A} = \mathbb{J}_y \mathbb{A} \mathbb{J}_x \tag{1}$$

Следствие 1. *Пусть линейный оператор $\mathbb{A}$ из $LO(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ является комплексификацией линейного оператора A из $LO(X,Y)$. Тогда выполняется равенство*

$$\mathbb{J}_Y \mathbb{A} = \mathbb{A} \mathbb{J}_X$$

Лемма 5. *Для любого линейного оператора A из $LO(X,Y)$ верны следующие равенства $Ker\mathbb{A} = Compl(KerA)$, $Im\mathbb{A} = Compl(ImA)$.*

Лемма 6. *Для любых линейных операторов A, B из $LO(X,Y)$, F из $LO(Y,Z)$ выполняются соотношения*

$$Compl(A+B) = \mathbb{A} + \mathbb{B},$$

$$Compl(\alpha A) = \alpha \mathbb{A} \ \forall \alpha \in \mathbf{R},$$

$$Compl(FA) = \mathbb{F}\mathbb{A};$$

$$Compl(A^{-1}) = \mathbb{A}^{-1},$$

последнее равенство выполнено, если оператор A обратим.

Пусть (G,F) — упорядоченная пара линейных операторов. Множество $\sigma(\mathbb{G},\mathbb{F})$ назовем *комплексным спектром* упорядоченной пары, а множество $\tilde{\sigma}(\mathbb{G},\mathbb{F})$ — ее *расширенным комплексным спектром*. Они обозначаются соответственно через $\sigma(G,F,\mathbf{C})$ и $\tilde{\sigma}(G,F,\mathbf{C})$. Множества $\rho(G,F,\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \sigma(G,F,\mathbf{C}), \tilde{\rho}(G,F,\mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{C}} \setminus \tilde{\sigma}(G,F,\mathbf{C})$ называются соответственно *комплексным резольвентным* и *расширенным комплексным резольвентным* множествами отношения A.

Теорема 2. *Для упорядоченной пары (G,F) выполняются равенства*

(1) $\tilde{\sigma}(G,F) = \tilde{\sigma}(\mathbb{G},\mathbb{F}) \cap \tilde{\mathbf{R}}$;

(2) $\tilde{\rho}(G,F) = \tilde{\rho}(\mathbb{G},\mathbb{F}) \cap \tilde{\mathbf{R}}$.

Для любого множества $\Delta \subseteq \mathbf{C}$ через $\overline{\Delta}$ обозначим множество $\{\overline{\lambda} : \lambda \in \Delta\}$. Таким же символом $\overline{\Delta}$ традиционно обозначается замыкание множества, но в этой работе оно не используется. Если $\Delta = \overline{\Delta}$, то множество Δ будем называть *симметричным* относительно $\mathbf{R}$.

Лемма 7. *Спектр упорядоченной пары $(\mathbb{G},\mathbb{F})$, где $\mathbb{G},\mathbb{F}$ — комплексификации линейных операторов G,F соответственно, симметричен. Кроме того выполняются равенства*

(1) $\mathbb{G} - \overline{\lambda}\mathbb{F} = \mathbb{J}_Y(\mathbb{G} - \lambda\mathbb{F})\mathbb{J}_X$, $\lambda \in \mathbf{C}$,

(2) $R(\overline{\lambda},\mathbb{G},\mathbb{F}) = \mathbb{J}_X R(\lambda,\mathbb{G},\mathbb{F})\mathbb{J}_Y$, $\lambda \in \rho(\mathbb{G},\mathbb{F})$,

(3) $\mathbb{J}_X R_l(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})\mathbb{J}_X = R_l(\overline{\lambda};\mathbb{G},\mathbb{F})$,

(4) $\mathbb{J}_Y R_r(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})\mathbb{J}_Y = R_r(\overline{\lambda};\mathbb{G},\mathbb{F})$.

5. К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Упорядоченная пара подпространств (X_1,Y_1), где $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, называется *инвариантной для пары* (G,F), если $GX_1 \subset Y_1$ и $FX_1 \subset Y_1$.

Пусть

$$X = X_0 \oplus X_1, \ \ Y = Y_0 \oplus Y_1 \tag{2}$$

— прямые суммы замкнутых подпространств, причем (X_0,Y_0) и (X_1,Y_1) — инвариантные пары подпространств для (G,F).

Пусть $G_i, F_i : \mathcal{D}(G,F) \cap X_i = \mathcal{D}_i \to Y_i$, $i = 0,1$, — сужения операторов G, F на X_i, $i = 0,1$. Тогда будем использовать запись

$$(G,F) = (G_0,F_0) \oplus (G_1,F_1) \tag{3}$$

и говорить, что упорядоченная пара операторов (G,F) допускает представление 3 относительно разложений 2 пространств и является *прямой суммой пар* (G_0,F_0) и (G_1,F_1).

Пусть выполнено условие *несингулярности* пары (G,F). Кроме того, предположим, что области определения $D(G), D(F)$ удовлетворяют одному из условий (i) или (iii).

Доказательство следующей теоремы в случае, когда X,Y являются комплексными банаховыми пространствами, приведено в [1].

Теорема 3. *Пусть расширенный спектр $\tilde{\sigma}(G,F)$ упорядоченной пары (G,F) представим в виде*

$$\tilde{\sigma}(G,F) = \sigma_0 \cup \sigma_1,$$

где множество σ_0 компактно, σ_1 замкнуто и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$.

Тогда существуют инвариантные для (G,F) *пары подпространств* (X_0,Y_0), (X_1,Y_1) *такие, что имеют место разложения 2, 3 и, кроме того,*

1. Проекторы $P_i \in EndX$, $Q_i \in EndY$, $i=0,1$, *осуществляющие разложения (1) (* $ImP_i = X_i$, $ImQ_i = Y_i$, $i=0,1$*), определяются формулами*

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} R_l(\lambda;G,F)d\lambda,$$

$$Q_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} R_r(\lambda;G,F)d\lambda,$$

$$P_1 = I - P_0,\ \ Q_1 = I - Q_0,$$

где γ_0 *— замкнутая жорданова кривая (или конечное число таких кривых), расположенная в* $\rho(G,F)$ *так, что внутри нее лежит* σ_0*, а вне —* σ_1*;*

2. $\tilde{\sigma}(G_0,F_0) = \sigma(G_0,F_0) = \sigma_0, \tilde{\sigma}(G_1,F_1) = \sigma_1$.

Для получения вещественного аналога данной теоремы необходимо ответить на вопрос, когда проекторы Рисса определенные формулами $P = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} R_l(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})d\lambda$, $Q = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} R_r(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})d\lambda$ являются комплексификацией некоторых проекторов P, Q.

Пусть спектр упорядоченной пары $(\mathbb{G},\mathbb{F})$ удовлетворяет условию теоремы 3. Пусть γ — контур, являющийся образом непрерывно дифференцируемой функции $\varphi: L \to \mathbf{C}$ (допускается конечное число разрывов первого рода у φ'), расположенный в $\rho(\mathbb{G},\mathbb{F})$ так, что внутри него лежит σ_0, а вне — σ_1; где L — некоторый промежуток из $\mathbf{R}$, либо совпадающий с отрезком вида $[-\Theta,\Theta], \Theta \in \mathbf{R}_+$, либо $L = \mathbf{R}$ (тогда полагается $\Theta = \infty$). Дополнительно предположим, что $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}, t \in L$.

Тогда справедлива следующая

Лемма 8. *Проекторы Рисса, определенные формулами*

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R_l(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})d\lambda,$$

$$Q = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R_r(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})d\lambda,$$

являются комплексификацией некоторых проекторов P, Q.

Лемма 9. *Пусть* $\mathbb{G},\mathbb{F} \in LO(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *— комплексификации некоторых линейных операторов* $G,F \in LO(X,Y)$ *и* $\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0$ *— подпространства из* $\mathbb{G},\mathbb{F}$*, являющиеся комплексификацией подпространств* X_0 *из* X *и* Y_0 *из* Y. *Тогда* $(\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0)$ *— инвариантная пара подпространств для* $(\mathbb{G},\mathbb{F})$ *тогда и только тогда, когда* (X_0,Y_0) *— инвариантная пара для* (G,F).

Из лемм 9, 8 и теоремы 3 непосредственно следует следующая

Теорема 4. *Пусть расширенный комплексный спектр* $\tilde{\sigma}(G,F,\mathbf{C})$ *допускает представление в виде* $\tilde{\sigma}(G,F,\mathbf{C}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, *где* σ_0 *— компакт из* $\mathbf{C}$, σ_1 *— замкнутое множество из* $\tilde{C}$ *и* $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. *Тогда проекторы* $\mathbb{P} \in End\mathbb{X}$, $\mathbb{Q} \in End\mathbb{Y}$*, построенные по спектральной компоненте* σ_0*, являются комплексификациями некоторых проекторов* $P \in EndX$, $Q \in EndY$ *соответственно тогда, когда* $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$.

Если $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$*, то банаховы пространства* X,Y *допускают разложения вида 2 в прямую сумму инвариантных относительно упорядоченной пары* (G,F) *замкнутых подпространств* $X_0 = ImP$, $Y_0 = ImQ$, $X_1 = KerP$, $Y_1 = KerQ$. *Кроме того, для сужений операторов* (G_i,F_i), $i=0,1$, *упорядоченной пары* (G,F) *верны следующие свойства:*

1. $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \oplus \mathbb{X}_1,\ \mathbb{Y} = \mathbb{Y}_0 \oplus \mathbb{Y}_1$*;*

2. $(\mathbb{G},\mathbb{F}) = (\mathbb{G}_0,\mathbb{F}_0) \oplus (\mathbb{G}_1,\mathbb{F}_1)$, *кроме того* $(G,F) = (G_0,F_0) \oplus (G_1,F_1)$*;*

3. $\tilde{\sigma}(\mathbb{G}_0,\mathbb{F}_0) = \sigma(\mathbb{G}_0,\mathbb{F}_0) = \sigma_0$, $\tilde{\sigma}(\mathbb{G}_1,\mathbb{F}_1) = \sigma_1$.

Для нахождения проекторов P и Q введем определение комплексной левой и комплексной правой резольвенты упорядоченной пары.

Отображения

$$\mathbb{R}_l(\cdot,\cdot;G,F): \mathbf{C} \times \rho(G,F,\mathbf{C}) \to EndX,$$

$$\mathbb{R}_r(\cdot,\cdot;G,F): \mathbf{C} \times \rho(G,F,\mathbf{C}) \to EndY,$$

где $\mathbb{R}_l(\mu,\lambda;G,F)$, $\mathbb{R}_r(\mu,\lambda;G,F)$ — операторы, комплексификацией которых являются операторы из $End\mathbb{X}$, $End\mathbb{Y}$ вида

$$\frac{1}{2}(\mu R_l(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F}) + \overline{\mu} R_l(\overline{\lambda};\mathbb{G},\mathbb{F})),$$

$$\frac{1}{2}(\mu R_r(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F}) + \overline{\mu} R_r(\overline{\lambda};\mathbb{G},\mathbb{F}))$$

будем называть соответственно *комплексной левой и комплексной правой резольвентой* упорядоченной пары (G,F).

Корректность этого определения следует из лемм 4 и 7. Используя его, мы можем найти вид проекторов P и Q.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть* γ_0 *— контур, являющийся образом непрерывно дифференцируемой функции*

$\varphi : L \to \mathbf{C}$, *где* L *— некоторый промежуток из* $\mathbf{R}$, *либо совпадающий с отрезком вида* $[-\Theta, \Theta]$, $\Theta \in \mathbf{R}_+$, *либо* $L = \mathbf{R}$, *кроме того предположим, что* $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, $t \in L$. *Тогда проекторы* P *и* Q *имеют вид*

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\Theta} \mathbb{R}_l(i\varphi'(t), \varphi(t); G, F)dt,$$

$$Q = \frac{1}{\pi}\int_0^{\Theta} \mathbb{R}_r(i\varphi'(t), \varphi(t); G, F)dt.$$

Автор выражает благодарность А. Г. Баскакову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов/ А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов// Математ. сборник — Воронеж, 2002. — Т. 371, № 11 — С. 3—42.

2. *Favini A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks/ A. Favini, A. Yagi. — New York: M. Dekker, 1998.

3. *Баскаков А. Г.* К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах/ А. Г. Баскаков, А. С. Загорский// Матем. заметки — 2007. — Т. 81, № 1. — С. 17—31.

4. *Cross R.* Multivalued linear operators/ R. Cross — New York: M. Dekker, 1998.

5. *Колмогоров А. Н.* Элементы теорий функций и функционального анализа/ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1976.

6. *Данфорд Н.* Линейные операторы: общая теория/ Н. Данфорд, Дж. Шварц — М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

Поступила в редакцию 18.10.2007