УДК 517.2/.3

СВЯЗЬ ГЛАДКОСТИ МАТРИЧНО-ЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ФАКТОРА

Ю. А. Мельникова

Воронежский государственный университет

Пусть $L(\lambda) = M(\lambda)(Z - \lambda I)$ — факторизация матрично-значной дифференцируемой функции $L(\lambda)$, заданной на отрезке $[a,b]$ вещественной оси $\mathbb{R}$, где $M(\lambda)$ — матрично-значная непрерывная функция и Z — постоянная матрица. Решается вопрос о связи гладкости функций L и M.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] при рассмотрении факторизации $L(\lambda) = M(\lambda)(Z - \lambda I)$ операторно-значных дифференцируемых функций $L(\lambda)$ со значениями во множестве ограниченных операторов возможна следующая проблема: сколько раз непрерывно дифференцируема функция $M(\lambda)$, если $L(\lambda)$ непрерывно дифференцируема m раз, и оператор Z компактен и подобен самосопряжённому. В полной мере эта задача не решена. В предлагаемой работе мы приводим решение для матрично-значных функций без ограничений на область значений и на матрицу Z.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathcal{E}^r$ и $\mathcal{E}^s$ — r- и s-мерное пространство, соответственно. Через $L(\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^s)$ обозначим множество матриц размера $r \times s$, т.е. матриц, имеющих r столбцов и s строк, порождающих линейные операторы, действующие из $\mathcal{E}^r$ в $\mathcal{E}^s$. Символ $L(\mathcal{E}^r)$ будет обозначать множество матриц размера $r \times r$. Ниже мы не будем различать понятия линейного оператора и матрицы, что позволит нам записывать матрицу в специальных базисах. Пусть $L(\lambda)$ — функция, заданная на отрезке $[a,b]$ и $L(\lambda) \in L(\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^s)$ при каждом $\lambda \in [a,b]$. Предположим, что $L(\lambda)$ допускает факторизацию $L(\lambda) = M(\lambda)(Z - \lambda I)$, где $M(\lambda) \in L(\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^s)$ при каждом $\lambda \in [a,b]$ и $Z \in L(\mathcal{E}^r)$ — постоянная матрица. Поскольку резольвента $(Z - \lambda I)^{-1}$ линейного оператора Z — аналитическая функция на множестве регулярных точек оператора Z (точек λ, в которых матрица $Z - \lambda I$ невырождена), то порядок гладкости функций L и M в таких точках совпадает. В общем же случае, порядок гладкости функции L не ниже порядка гладкости функции M. Предположим, что μ — собственное значение матрицы Z и p_μ — максимальный размер жордановой клетки матрицы Z, отвечающая собственному значению μ. Задача, решаемая в этой работе, — выяснить возможную потерю гладкости функции M по сравнению с гладкостью функции L.

Основной результат (**Теорема 1**): если функция M непрерывна в точке μ, и в этой точке L является $n+1 (> p_\mu)$ раз дифференцируемой, то M будет $n+1-p_\mu$ раз дифференцируемой.

Скалярный случай

Рассмотрим сначала специальный скалярный случай.

Лемма 1. *Пусть функция f, возможно комплексно-значная, задана на отрезке $[a,b]$, и $f(x) = g(x)(x - x_0)$, причем $x_0 \in [a,b]$. Если f — $n+1$ раз дифференцируемая функция в окрестности точки x_0, а g — непрерывная функция в этой точке, то g является n раз дифференцируемой в x_0 и* $g^{(k)}(x_0) = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k+1}$, $k = \overline{0,n}$.

☐ Без ограничения общности будем считать ниже $x_0 = 0$: в противном случае сделаем замену переменных $x - x_0 \to x$. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции.

1) $\mathbf{n} = 1$, т.е. докажем, что, если f непрерывно дифференцируема дважды, то g непрерывно дифференцируема и $g(0) = f'(0)$, $g'(0) = \frac{f''(x_0)}{2}$.

По определению производной имеем:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)x - g(x_0)x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)x}{x} = g(0)$$

(при $x_0 = 0$) $\Rightarrow f'(0) = g(0)$.

(**Замечание**. Отсюда видно, что функция $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ без предположения о ее непрерывности может иметь разве что устранимый разрыв в нуле и потому без ограничения общности можно (и будем) считать, что $g(x)$ — непрерывная в нуле функция, т.е. при необходимости заменим функцию g на функцию g_1: $g_1(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $\quad f(x) = g_1(x)x.$)

Воспользуемся следующей локальной формулой Тейлора: *если функция f имеет m производных в точке x_0, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^m). \quad (1)$$

В данном случае получаем:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \end{aligned} \quad (2)$$

или, что то же,

$$g(x)x = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Отсюда

$$g(x) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x),$$

а потому

$$g(x) = g(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x).$$

Следовательно,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{f''(0)}{2} + \frac{o(x)}{x},$$

откуда имеем

$$g'(0) = \frac{f''(0)}{2}. \quad (3)$$

Покажем непрерывность функции $g'(x)$ в нуле.

Так как при $x \neq 0$ имеем

$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$

то

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \qquad ?@8 \qquad x \neq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g'(x) - g'(0) &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{f''(0)}{2} \\ &= -\frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2!}x^2}{x^2} + \\ &+ \left[\frac{f'(x) - f'(0)}{x} - f''(0)\right]. \end{aligned}$$

Так как (2) влечет

$$\frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2!}x^2}{x^2} \to 0,$$

и

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} - f''(0) \to 0,$$

то

$$\lim_{x \to 0}(g'(x) - g'(0)) = 0,$$

т.е. функция g' непрерывна в нуле.

Следовательно, $g(x)$ непрерывно дифференцируема, даже если f просто дважды дифференцируема в нуле.

2) Пусть утверждение верно для $k = n \geq 1$, т.е. в предположении, что f непрерывно дифференцируема в окрестности нуля n раз, функция g непрерывно дифференцируема в нуле $(n-1)$ раз и $g^{(k)}(x_0) = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$. Докажем, что, если f непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз, то g непрерывно дифференцируема n раз и $g^{(k)}(x_0) = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k+1}$, $k = \overline{0, n}$.

Из формулы Тейлора (1) и предположения индукции получаем:

$$\begin{aligned} g(x) = g(0) + g'(0)x + \ldots + \\ + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что g имеет в нуле n-ю производную и

$$g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Осталось проверить непрерывность $g^{(n)}$ в нуле. Так как при $x \neq 0$ справедлива формула

$$f^{(n)}(x) = ng^{(n-1)}(x) + g^{(n)}(x)x,$$

то

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} g^{(n)}(x) = \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - n(g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(0)) - ng^{(n-1)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)) - n(g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(0))}{x} \\ &= f^{(n+1)}(0) - ng^{(n)}(0) = g^{(n)}(0). \end{aligned}$$

■

Пример 1. *Рассмотрим в дополнение пример скалярной функции $f(x) = g(x)x$, заданной в окрестности нуля и такой, что f непрерывно* *дифференцируема в нуле, а g — разрывна в нуле:*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}.$$

Положим

$$f(x) = g(x)x = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

т.е. $f(x) = x$ *. По построению функция g имеет в нуле устранимый разрыв, а $f(x) = x$ непрерывно дифференцируема.*

Z ИМЕЕТ ОДНУ ЖОРДАНОВУ КЛЕТКУ

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда $r \times r$-матрица Z имеет одну жорданову клетку, т.е. имеет единственное собственное значение, обозначим его μ, и матричное представление:

$$Z = \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Пусть

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} m_{11}(\lambda) & m_{12}(\lambda) & \cdots & m_{1r-1}(\lambda) & m_{1r}(\lambda) \\ m_{21}(\lambda) & m_{22}(\lambda) & \cdots & m_{2r-1}(\lambda) & m_{2r}(\lambda) \\ m_{31}(\lambda) & m_{32}(\lambda) & \cdots & m_{3r-1}(\lambda) & m_{3r}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{s-21}(\lambda) & m_{s-22}(\lambda) & \cdots & m_{s-2r-1}(\lambda) & m_{s-2r}(\lambda) \\ m_{s-11}(\lambda) & m_{s-12}(\lambda) & \cdots & m_{s-1r-1}(\lambda) & m_{s-1r}(\lambda) \\ m_{s1}(\lambda) & m_{s2}(\lambda) & \cdots & m_{sr-1}(\lambda) & m_{sr}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

— представление $M(\lambda)$ в жордановом базисе матрицы Z и произвольном базисе из $\mathcal{E}^s$, а

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} l_{11}(\lambda) & l_{12}(\lambda) & \cdots & l_{1r-1}(\lambda) & l_{1r}(\lambda) \\ l_{21}(\lambda) & l_{22}(\lambda) & \cdots & l_{2r-1}(\lambda) & l_{2r}(\lambda) \\ l_{31}(\lambda) & l_{32}(\lambda) & \cdots & l_{3r-1}(\lambda) & l_{3r}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{s-21}(\lambda) & l_{s-22}(\lambda) & \cdots & l_{s-2r-1}(\lambda) & l_{s-2r}(\lambda) \\ l_{s-11}(\lambda) & l_{s-12}(\lambda) & \cdots & l_{s-1r-1}(\lambda) & l_{s-1r}(\lambda) \\ l_{s1}(\lambda) & l_{s2}(\lambda) & \cdots & l_{sr-1}(\lambda) & l_{sr}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (6)$$

— представление матрицы $L(\lambda) = M(\lambda)(Z - \lambda I)$ в тех же базисах. Из (4)—(6) следуют соотношения:

$$l_{j1}(\lambda) = m_{j1}(\lambda)(\mu - \lambda), \quad j = \overline{1,s} \qquad (7)$$

$$\begin{gathered} l_{jk}(\lambda) = m_{j\,k-1}(\lambda) + m_{jk}(\lambda)(\mu - \lambda), \\ j = \overline{1,s}, k = \overline{2,r}. \end{gathered} \qquad (8)$$

Лемма 2. *Пусть $L(\lambda)$, $M(\lambda)$ и Z представлены матрицами (4)—(6) и $L(\lambda) = M(\lambda)(Z - \lambda I)$, т.е. выполнены соотношения (7) и (8).*

Если функция M непрерывна и функция L в окрестности точки μ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз, $n \geq r$, то k-ый столбец матрицы $M(\lambda)$ в окрестности этой же точки μ непрерывно дифференцируем $n+1-k$ раз, а потому вся функция M непрерывно дифференцируема $n+1-r$ раз.

□ В самом деле, из (7) и Леммы 1 следует, что первый столбец функции M дифференцируем n раз. Воспользовавшись методом математической индукции и предположив, что $k-1$ столбец матрицы M дифференцируем $n-k+2$, из (8) и Леммы 1 заключаем, что k-ый столбец матрицы M дифференцируем $n+1-k$ раз. Следовательно, вся функция M дифференцируема $n+1-r$ раз. ■

Общий случай

Пусть теперь $Z \in L(\mathcal{E}^r)$ — произвольная матрица, $\{\mu\}$ — множество ее собственных значений, а $\{p_\mu\}$ — множество, состоящее из максимальных порядков жордановых клеток матрицы Z, отвечающих собственным значениям μ. Как отмечалось выше, вопрос о падении гладкости интересен только в точках, являющихся собственными значениями матрицы Z.

Теорема 1. *Пусть M — непрерывная матрично-значная функция, заданная на $[a,b]$, принимающая значения в $L(\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^s)$, пусть $L(\lambda) = M(\lambda)(Z - \lambda I)$ — функция $n+1$ раз непрерывно дифференцируемая в окрестности собственного значения $\mu \in [a,b]$ матрицы Z, $n \geq p_\mu$. Тогда M непрерывно дифференцируема $n+1-p_\mu$ раз в окрестности этой точки μ.*

□ Пространство $\mathcal{E}^r$ представимо в виде прямой суммы инвариантных подпространств матрицы Z:

$$\mathcal{E}^r = \mathcal{L}_\mu(Z) \dotplus \text{л.о. } \{\mathcal{L}_\lambda(Z) \mid \lambda \neq \mu\}, \qquad (9)$$

где через $\mathcal{L}_\mu(Z)$ и $\mathcal{L}_\lambda(Z)$ обозначена линейная оболочка (л.о.) собственных и присоединенных векторов матрицы Z, отвечающих μ и λ, соответственно. Обозначим через q_m алгебраическую кратность собственного значения μ, т.е. $q_\mu = \dim \mathcal{L}_\mu(Z)$. Тогда $\dim \text{л.о.}\{\mathcal{L}_\lambda(Z) \mid \lambda \neq \mu\} = r - q_\mu$. Рассмотрим разложение $\mathcal{L}_\mu(Z)$, соответствующее жордановому разложению матрицы Z на простые клетки:

$$\mathcal{L}_\mu(Z) = \mathcal{L}_{1\mu} \dot{+} \mathcal{L}_{2\mu} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{L}_{l\mu} \qquad (10)$$

в порядке убывания размерности:

$$q_{1\mu} = \dim \mathcal{L}_{1\mu} \geq q_{2\mu} = \\ = \dim \mathcal{L}_{2\mu} \geq \ldots \geq q_{l\mu} = \dim \mathcal{L}_{l\mu}. \qquad (11)$$

Перепишем разложение (9) с учетом (10):

$$\mathcal{E}^r = \mathcal{L}_{1\mu} \dot{+} \mathcal{L}_{2\mu} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{L}_{l\mu} \dot{+} \text{л.о.}\{\mathcal{L}_\lambda(Z) \mid \lambda \neq \mu\}, \qquad (12)$$

Относительно разложения (12) матрица матрица Z представляется в блочно-диагональном виде:

$$Z = \operatorname{diag}\{Z_{1\mu}, Z_{2\mu}, \ldots, Z_{l\mu}, Z_0\} \qquad (13)$$

где $Z_{j\mu}$ — $(q_{j\mu} \times q_{j\mu})$-матрица, $j = \overline{1,l}$, Z_0 — $(r - q_\mu) \times (r - q_\mu)$-матрица, причем для $Z_{j\mu}$ точка μ — единственное собственное значение и $Z_{j\mu}$ имеет единственную жорданову клетку, а для Z_0 точка μ является регулярной.

Представим матрицы $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ в блочном виде относительно разложения (12):

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} L_1(\lambda) & L_2(\lambda) & \ldots & L_l(\lambda) & L_0(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (14)$$

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} M_1(\lambda) & M_2(\lambda) & \ldots & M_l(\lambda) & M_0(\lambda) \end{bmatrix}, \qquad (15)$$

где $L_j(\lambda)$ и $M_j(\lambda)$ — $q_{j\mu} \times s$-матрицы, $j = \overline{1,l}$, $L_0(\lambda)$ и $M_0(\lambda)$ — $(r - q_\mu) \times s$-матрицы. Из (13), (14), (15) следуют равенства:

$$L_j(\lambda) = M_j(\lambda)(Z_{j\mu} - \lambda), j = \overline{1,l};$$

$$L_0(\lambda) = M_0(\lambda)(Z_0 - \lambda).$$

Из Леммы 2 следует, что матрица $M_j(\lambda)$ дифференцируема $n + 1 - q_{1\mu}$ раз, $j = \overline{1,l}$, а так как μ — регулярная точка для Z_0, то $M_0(\lambda)$ дифференцируема $n+1$ раз. Из (11) следует, что функция M дифференцируема $n + 1 - q_{1\mu}$ раз. Осталось заметить, что по построению $q_{1\mu} = p_\mu$. ■

Следствие 1. *Если в условиях Теоремы 1 матрица Z подобна самосопряженной, то из того, что L дифференцируема $n+1$ раз следует, что M дифференцируема n раз.*

☐ В самом деле, это следует из Теоремы 1 с учетом того, что все жордановы клетки матрицы подобной самосопряженной имеют размерность 1, т.е. для любого μ имеем $p_\mu = 1$. ■

Замечание 1. *Наш подход позволяет доказать результат, аналогичный Теореме 1 и в бесконечномерном случае, т.е. операторном случае, при условии, что μ — нормальная точка оператора Z. Но этот результат будет предметом другой публикации.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Azizov T. Ya., Dijksma A., Sukhocheva L. I.* On basis properties of selfadjoint operator functions, J. Funct. Anal., 178 (2000), 306—342.

Поступила в редакцию 26.09.2007